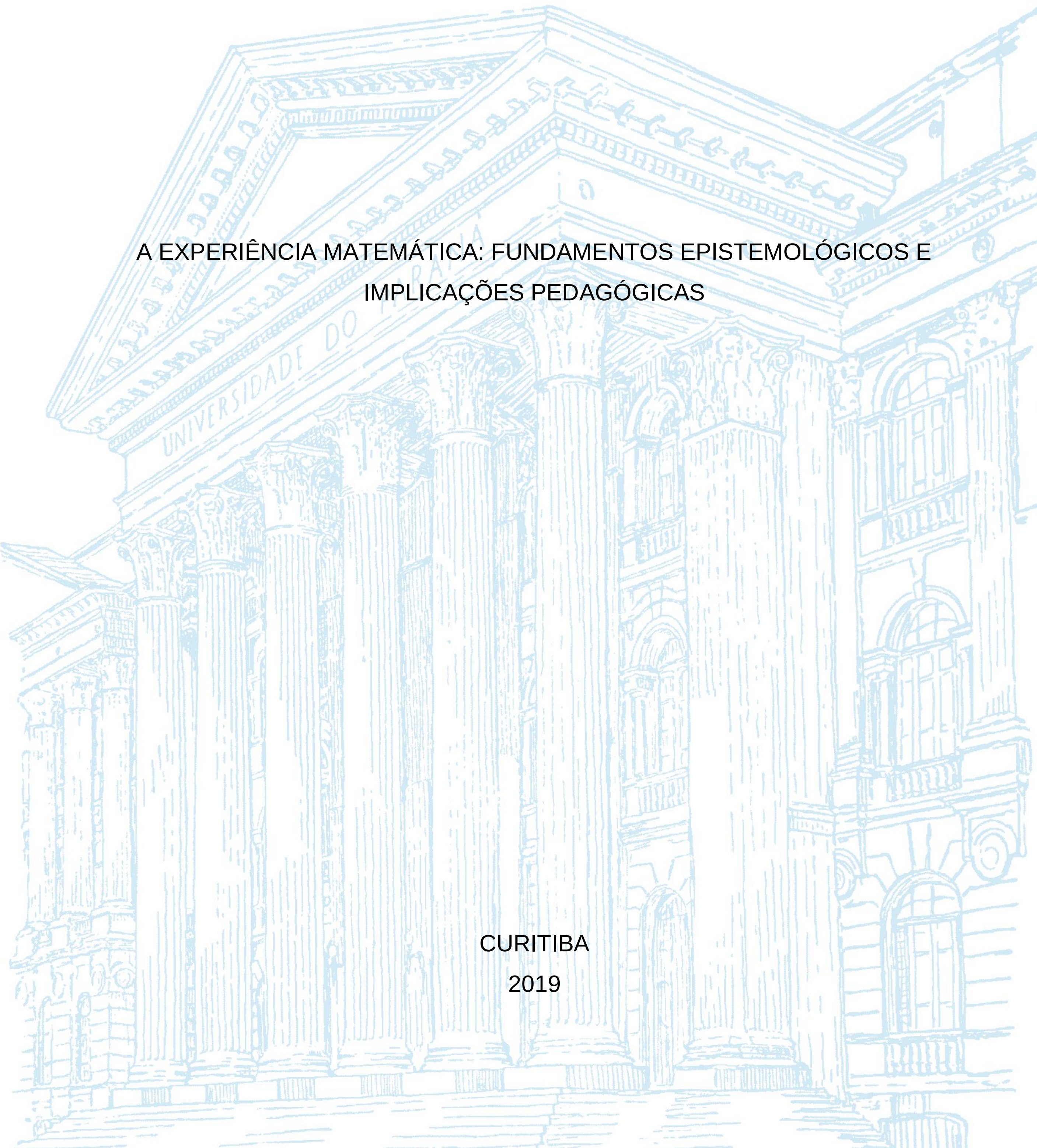
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

WILLIAN VALVERDE

A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA: FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS E IMPLICAÇÕES PEDAGÓGICAS



CURITIBA

2019

WILLIAN VALVERDE

A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA: FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS E IMPLICAÇÕES PEDAGÓGICAS

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. José Carlos Cifuentes Vasquez

CURITIBA

2019

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

V215e Valverde, Willian
A experiência matemática: fundamentos epistemológicos e implicações pedagógicas [recurso eletrônico] / Willian Valverde – Curitiba, 2019.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes Vasquez

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Formação de Professores. 3. Gödel, Teoremas de. I. Universidade Federal do Paraná. II. Cifuentes Vasquez, José Carlos. III. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA - 40001016068P7

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **WILLIAN VALVERDE** intitulada: **A Experiência Matemática: fundamentos epistemológicos e implicações pedagógicas**, sob orientação do Prof. Dr. JOSÉ CARLOS CIFUENTES, que após após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 28 de Agosto de 2019.

JOSÉ CARLOS CIFUENTES
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

MARCELO MUNIZ SILVA ALVES
Avaliador Externo ()

Luciane Ferreira Mocrosky
LUCIANE FERREIRA MOCROSKY
Avaliador Interno

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
1912
SETOR DE CIÊNCIAS
Coordenação de Pós-Graduação

À minha companheira Izabelle, meus pais Osni e Marilete e meu irmão Lucca. Aos amigos e mestres que contribuíram em minha jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha companheira Izabelle, pela força de sempre, compreensão e amor.

Aos meus pais Osni e Marilete, pelo amor, dedicação na minha formação e ensinamentos.

Ao meu irmão Lucca, com quem gostaria de poder passar mais tempo.

Aos amigos e familiares que, de uma maneira ou outra contribuíram com apoio, alegria e momentos importantes.

Ao professor Cifuentes por confiar em mim e dedicar seu tempo a este trabalho de forma tão valorosa e significativa.

Ao professor e amigo Marcelo, pela importante contribuição na minha formação, pela presença de sempre, pela amizade e carinho.

Ao grande Marco Zanlorenzi (Zan) pela contribuição imensurável que teve.

(...) A nossa própria linguagem já nos trai
quando temos que falar de o conceito,
pois ela nos dá a impressão
de que estamos falando de algo já pronto e acabado,
mas não é isso que entendemos por conceito.

(O AUTOR, 2019, p. 65)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo geral abrir uma discussão sobre uma concepção de educação matemática que transcenda o ensino puramente técnico, informativo e rígido. Inicialmente abordamos a noção de conceito de Ludwig Wittgenstein, para depois diferenciar esta da noção de definição. Estendemos esta discussão para as correntes que buscaram fundamentar o que é matemática até chegarmos nos teoremas de Gödel, que mostram que a própria matemática apresenta limites gerados na sua base e que culminam em uma concepção de ciência construída pelo homem, falível e questionável. Defendemos que essa concepção de matemática se mostra essencial para a formação humana daqueles que a estudam. Além disso, buscamos delimitar uma visão do que vem a ser o ensino de matemática, limitado pelos seus conteúdos. Assim, apontamos para uma visão mais abrangente para educação matemática, que além de conteúdos matemáticos, engloba conceitos e pensamento matemático vistos como atitudes na forma de "experiências matemáticas". Ao longo do texto, buscamos trazer exemplos que reforçam nossas concepções e que abrangem implicações do discutido no campo pedagógico em diferentes níveis de ensino, bem como apontam para uma noção preliminar de "experiência matemática".

Palavras-chave: Limites do ensino de matemática. Experiência matemática. Teoremas de Gödel. Pensamento matemático. Formação de professores de Matemática.

ABSTRACT

This essay aims the main objective to open a discussion about a conception of mathematical education that transcends the purely technical, informative and rigid teaching. We first approached Ludwig Wittgenstein's notion of concept, and then differentiated it from the notion of definition. We extend this discussion to the currents that sought to ground mathematics until we reach Gödel's theorems, which show that mathematics itself has limits generated at its base and culminating in a fallible and questionable conception of man-made science. We argue that this conception of mathematics proves to be essential for the human formation of those who study it. In addition, we seek to delimit a view of what mathematics teaching is, limited by its contents. Thus, we point to a broader view of mathematics education, which in addition to mathematical content, encompasses concepts and mathematical thinking seen as attitudes in the form of "mathematical experiences". Throughout the text, we seek to bring examples that reinforce our conceptions and encompass implications of what is discussed in the pedagogical field at different levels of education, as well as point to a preliminary notion of “mathematical experience”.

Keywords: Limits of math teaching. Mathematical experience. Gödel's theorems. Mathematical thinking. Training of mathematics teachers.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Platão, em um de seus diálogos, mais precisamente no diálogo *Ménon*, na voz de Sócrates, discute o seguinte tema: a virtude pode ser ensinada?

> MEN[1]. Podes dizer-me, Sócrates: a virtude é coisa que se ensina? Ou não é coisa que se ensina mas que se adquire pelo exercício? Ou nem coisa que se adquire pelo exercício nem coisa que se aprende, mas algo que advém aos homens por natureza ou por alguma outra maneira? (2001, p. 70)

A conclusão de Sócrates foi que a virtude não pode ser ensinada.

O argumento para a impossibilidade de seu ensino, no final das contas, pode até dar a impressão de ser a ausência de pessoas capazes de realizar tal tarefa. No entanto, a discussão apresentada por Platão é um pouco mais sutil, pois passa pelo entendimento que, para ensinar a virtude, seria necessário defini-la, e isto significa, segundo Cifuentes (2016, p.50), transformar a virtude em um conteúdo, uma vez que a palavra 'ensinar' já trazia o entendimento presente até hoje na escola de que há algo anunciado para ser transmitido "teoricamente" a alguém, não no sentido filosófico de teoria, mas em um sentido mais pragmático, de uma elaboração técnica de algo que tem tempo e lugar no currículo (enquanto conjunto de conteúdos, como posto hoje em dia) para ser endereçado a outros momentos pedagógicos. Desta forma, não é possível traduzir a virtude em uma nota, um esquema ou uma sequência de ações.

Esta reflexão já aponta para possíveis limites do ensino, ou seja, que existem coisas que talvez não possam ser ensinadas na forma de conteúdos.

Aqui, pretendemos, com inspiração na pergunta de Platão, discutir quais são os limites do ensino de matemática, ou seja, o que, dentro da matemática, pode ser ensinado e o que não pode ser ensinado na forma de conteúdos, bem como apontar

[1] MEN é uma abreviação para Ménon. A fala citada é deste personagem.

que estes limites se dão tanto por um caráter social, que envolve a matemática enquanto construção humana e que podemos chamar de limites externos, assim como se dão por um caráter interno, inerente à própria matemática. Neste trabalho, já buscamos trazer alguns aspectos de limites internos do ensino da matemática e, mais do que isso, pretendemos trazer uma concepção do que é “educar matematicamente”, abordando o termo ‘educação’ como algo que supera os limites do ensino.

Acreditamos que essa discussão pode servir como subsídio para uma reflexão filosófica mais profunda de educadores matemáticos acerca de suas práticas, bem como de suas concepções sobre ensino, educação e sobre a própria matemática. Também buscaremos dar subsídios para uma futura abordagem de educação matemática como algo que busca, mais do que ensinar conteúdos, “promover” o pensamento matemático, envolvendo não só conceitos matemáticos, como o movimento destes conceitos.

Começaremos discutindo a noção de ‘conceito’, baseada principalmente nas concepções filosóficas de *Ludwig Wittgeinstein*, para depois sermos capazes de diferenciar um ‘conceito’ de uma ‘definição’ e de ‘conteúdos’, entendendo que a matemática possui aspectos que fogem à abordagem puramente lógica, que traz sentidos além de significados e que possui uma dinâmica social e racionalidade próprias. Esta discussão será nosso ponto de partida para abordar aspectos do *pensamento matemático* e também entender que, assim como a “virtude”, não pode ser ensinado, pelo menos não na forma de conteúdos, o que nos leva a uma concepção de educação mais ampla que de ensino.

Também abordaremos o quanto uma visão reducionista de ensino, baseada apenas em conteúdos, pode causar prejuízos em um contexto mais amplo da educação e na formação intelectual no âmbito da matemática.

Para tal, buscamos subsídios teóricos por meio de uma pesquisa exploratória que se construiu por meio de exemplos da Educação Matemática e da própria Matemática.

2 WITTGENSTEIN: CONCEITOS E DEFINIÇÕES

Ludwig Wittgenstein (1889 - 1951) foi um filósofo nascido em Viena, discípulo de Bertrand Russell (1872 - 1970), destacado filósofo e filósofo da matemática da primeira metade do século XX. Wittgenstein é usualmente conhecido por duas etapas de seu pensamento. Por conta disto, é de costume referir-se à primeira concepção, condensada na obra *Tractatus Logico-Philosophicus*, publicada originalmente em alemão em 1921, como *o primeiro Wittgenstein*. Esta obra teve uma forte influência para a formação do *neopositivismo* ou *positivismo lógico* do Círculo de Viena, cujas ideias principais baseiam-se em uma visão neutra de ciência, impessoal, dando ênfase ao método científico com base no experimento, na lógica, na exatidão e na exclusão de toda a metafísica do pensamento científico.

Nessa obra, Wittgenstein (1994) defende que todo problema filosófico é fruto de problemas na linguagem e, desta forma, resolvendo-se esses, não haveria problemas filosóficos.

> Na linguagem corrente, acontece com muita frequência que uma mesma palavra designe de maneiras diferentes – pertença, pois, a símbolos diferentes – ou que duas palavras que designam de maneiras diferentes sejam empregadas, na proposição, superficialmente do mesmo modo.
> Assim a palavra “é” aparece como cópula, como sinal de igualdade e como expressão da existência; “existir” como verbo intransitivo, tanto quanto “ir”; “idêntico” como adjetivo; falamos de algo, mas também de acontecer algo.
> (Na proposição “Rosa é rosa” – onde a primeira palavra é um nome de pessoa, a última é um adjetivo – essas palavras não têm simplesmente significados diferentes, mas são símbolos diferentes). (WITTGENSTEIN, 1994, 3.323)

Assim, temos que uma mesma palavra pode representar vários objetos distintos, bem como um único objeto pode ser representado por várias palavras distintas. Esta concepção de Wittgenstein resulta na concepção filosófica onde a linguagem é o limite da realidade. Assim, o caráter de verdade em dada proposição se dá a partir de uma concepção de realidade ligada a fatos expressáveis na linguagem, ou seja, uma proposição é verdadeira quando diz que ocorre algo que acontece e falsa quando diz que ocorre algo que não acontece, bem como é verdadeira quando diz que não ocorre algo que não acontece e falsa quando diz que não ocorre algo que acontece.

Nessa visão, o verdadeiro ou falso não reside no fato em si, mas sim no que é dito sobre o fato, ou seja, o verdadeiro ou falso encontra-se exclusivamente na linguagem. Esta também é uma característica da visão aristotélica de verdade, sintetizada na famosa frase: "Dizer daquilo que é que não é, ou daquilo que não é que é, é falso, enquanto dizer daquilo que é que é, ou daquilo que não é que não é, é verdadeiro" (ARISTÓTELES, 1969, p. 107).

Esta concepção é sintetizada por Wittgenstein no prefácio do *Tractatus Logico-Philosophicus*:

> (...) o que se pode em geral dizer, pode-se dizer claramente; e sobre aquilo de que não se pode falar, deve-se calar.
> O livro pretende, pois, traçar um limite para o pensar, ou melhor – não para o pensar, mas para a expressão dos pensamentos: a fim de traçar um limite para o pensar, deveríamos poder pensar os dois lados desse limite (deveríamos, portanto, poder pensar o que não pode ser pensado).
> O limite só poderá, pois, ser traçado na linguagem, e o que estiver além do limite será simplesmente um contrassenso. (WITTGEINSTEIN, 1994, Prefácio)

Devemos reparar que Wittgenstein já aponta para a existência de limites no pensamento em geral, estes ligados à sua expressividade. Essa noção preliminar de limite terá uma importância destacada na nossa discussão posterior.

Com o passar do tempo, Wittgenstein foi reformulando seu pensamento, construindo uma nova etapa, a qual nos referimos hoje por *segundo Wittgenstein*, representado principalmente pela obra *Investigações Filosóficas*, publicada postumamente pela primeira vez em 1953. Nesta obra, o filósofo revelou uma concepção holística de conhecimento, baseada em uma perspectiva social que se contrapunha ao *neopositivismo* defendido pelo Círculo de Viena (CONDÉ, 2012).

Em *Investigações Filosóficas,* nosso autor enfoca sua investigação sobre o conhecimento no campo da linguagem, porém em uma concepção de linguagem mais ampla, onde tal linguagem não se restringe apenas aos significados lógicos, absolutos, das definições, e sim em um contexto que engloba uma "lógica" mais abrangente, denominada *gramática*, rica em *sentidos,* construídos socialmente, por meio do uso das palavras nos *jogos de linguagem*.

> Na sua segunda filosofia, Wittgenstein estabelece a crítica à lógica do mais "puro cristal" (...). Algo é lógico não porque expressa uma essência metafísica, oculta e transcendental, mas sim porque emerge do "solo áspero", ou como formula Wittgenstein, dos nossos *jogos de linguagem* (*I.F. § 23*) em nossa *forma de vida.* Para ele, a "gramática diz que tipo de objeto algo é" (I.F. *§373)*. (CONDÉ, 2012, p. 87)

Ou seja, o conhecimento é construído levando em consideração não somente os fatos, mas também seu uso através das regras linguísticas e as práticas sociais, que dão significados e sentidos a elas, a partir da vivência, entendida como uma forma de experiência, e esta talvez seja uma das maiores diferenças entre o primeiro e segundo Wittgenstein.

Desta forma, o autor defendeu uma aproximação entre lógica e experiência, porém de maneira diferente de como era proposto pelo Círculo de Viena, que buscava a fundamentação última, ou seja, a garantia da "verdade absoluta". (CONDÉ, 2012, p. 87)

Sua segunda filosofia baseia-se principalmente na formação de três noções: 'jogos de linguagem', 'semelhança de família' e 'gramática'. No entanto, Wittgenstein não as "define", pois essa é justamente sua crítica aos filósofos da época, que buscavam a fundamentação última. Ao contrário, o filósofo de Viena busca levar o leitor a uma reflexão filosófica sobre jogo de linguagem, gramática e semelhança de família, promovendo, justamente, jogos de linguagem para este fim.

Não temos a intenção de nos aprofundar nessas três noções, mas utilizaremos, como pano de fundo, aspectos a respeito da discussão do autor sobre a noção de ‘jogo’ a fim de ilustrar, principalmente, a visão que Wittgenstein tem sobre o que vem a ser um conceito: como algo dinâmico, sem limites pré-definidos e que ganha sua significação por meio de seu uso, ou seja, socialmente.

Isto é ilustrado pela sua discussão sobre “número”:

> (...) Por que chamamos algo de “número”? Ora, talvez porque tem um direto-parentesco com alguma coisa que até agora se chamou de número; e pode-se dizer que através disso adquire um parentesco com uma outra coisa que também chamamos assim. E alargamos nosso conceito de número do mesmo modo que, ao traçarmos um fio, traçamos fibra por fibra. E a robustez do fio não consiste em que uma fibra qualquer perpasse toda sua extensão, mas em que muitas fibras se sobrepunham umas às outras. (WITTGENSTEIN, 2014, p. 52)

Esse exemplo matemático de Wittgenstein é relevante para uma concepção moderna de matemática, onde o próprio conceito de “número” não tem fronteiras fixas, ele é construído progressivamente acrescentando a ele novas classes de “números”.

O autor, utiliza a discussão sobre “número” para ilustrar a impossibilidade de definir o que vem a ser um jogo:

> “Muito bem; assim está explicado para você o conceito de número como a soma lógica daqueles conceitos individuais aparentados: número cardinal, número racional, número real, etc. e, igualmente, o conceito de jogo como a soma lógica dos conceitos parciais correspondentes.” – Não necessariamente. Pois assim, eu posso conferir limites rígidos ao conceito “número”, isto é, usar a palavra “número” como designação de conceitos limitados rigidamente, mas posso usá-la também de tal modo que a

> extensão do conceito não seja fechada por um limite. E é assim que empregamos a palavra “jogo”. De que modo está fechado o conceito jogo? O que é ainda um jogo e o que não é mais? Você pode indicar os limites? Não. Você pode *traçar* alguns: pois ainda não se traçou nenhum. (mas isto jamais o incomodou ao empregar a palavra “jogo”). (WITTGENSTEIN, 2014, p.53)

Wittgenstein continua sua reflexão dizendo que limites até podem ser traçados com finalidades específicas, porém o conceito é utilizável mesmo que tais limites não sejam traçados e, faz assim, uma crítica ao pensamento do lógico alemão Gottlob Frege (1848 – 1925):

> Frege compara o conceito a uma região e diz: uma região delimitada sem clareza não pode, absolutamente, ser chamada de região. Isto significa que não podemos fazer nada com ela. – Mas não tem sentido dizer: “detenha-se mais ou menos aqui? Imagine que eu estivesse com uma outra pessoa em um lugar e dissesse isto. Nisso, nem ao menos traçarei algum limite, mas farei um movimento indicativo com a mão, - como se lhe mostrasse um determinado *ponto*. E é precisamente assim que se explica o que é um jogo. Dá-se exemplos e pretende-se que eles sejam entendidos num certo sentido. – Mas com esta expressão não tenho em mente: nestes exemplos ele deve ver o comum, aquilo que – por uma razão qualquer – não consegui trazer à fala. Mas: ele deve *empregar* estes exemplos apenas num determinado modo. A exemplificação não é aqui um meio *indireto* de explicação, - na falta de um melhor. Pois, toda explicação geral também pode ser mal-entendida. E *assim* que jogamos um jogo. (É o jogo de linguagem que tenho em mente com a palavra “jogo”). (WITTGENSTEIN, 2014, p. 54-55, grifos do autor)

Isso faz sentido quando nos deparamos com certos exemplos matemáticos, como o próprio conceito de número: o que é um número? A tarefa de tentar definir o que vem a ser um número é mais do que ingrata (Frege que o diga...[2]). Ao comparar aquilo que já se conhece como número, como os números naturais, inteiros, reais, etc., poderíamos estar propensos a pensar em número como "algo com que podemos fazer determinadas operações" como adição, multiplicação, etc., mas isto não basta, pois podemos fazer o mesmo com matrizes por exemplo, mas não temos matrizes como exemplo de números.

Os números reais, desde os naturais aos racionais e irracionais, possuem algumas características algébricas, em especial são conjuntos cuja adição e multiplicação são operações comutativas, isto é, para quaisquer números reais a e b, temos que $a + b = b + a$ e $a.b = b.a$. Essa comutatividade, do ponto de vista da adição, mantém a ideia aditiva de juntar objetos, essência da gênese de tal operação no âmbito da contagem, que se expande para a multiplicação como forma de simplificação da adição (detalharemos mais adiante). Poderíamos dizer que estas propriedades geram uma espécie de paradigma aritmético que, de alguma forma, "amarram" o conceito de número.

O conjunto das matrizes, por sua vez, apesar de possuir as mesmas operações e maioria das propriedades algébricas, possui uma operação que também chamamos de multiplicação, por semelhança ao que já entendemos por multiplicação em outros conjuntos. Porém, esta multiplicação é não comutativa, isto é, para quaisquer matrizes A e B não é válida a propriedade $A.B = B.A$. Esta diferenciação, ou esta ruptura, poderia ser um possível norte para uma tentativa de esclarecimento da noção de número.

No entanto, a expansão natural dos números complexos, são os quatérnios, números de dimensão 4 da forma $a + bi + cj +dk$, onde a, b, c e d são reais e i, j e k são eixos complexos. Nos quatérnios, a multiplicação entre as unidades imaginárias i, j e k segue a chamada de 'regra da mão direita'.

i) $i.j = k = - j.i$

[2] O grande objetivo de Gottlob Frege, ao escrever em 1884, Die Grundlagen der Arithmetik (Os Fundamentos da Aritmética), e posteriormente, em 1903, seu segundo volume: Grundgesetze der Arithmetik (Leis básicas da Aritmética), era, por meio de seu simbolismo, dar uma definição precisa de números. Esta tentativa se mostrou falha, culminando no Paradoxo de Russell.

ii) $j.k = i = - k.j$

iii) $k.i = j = - i.k$

Esta regra multiplicativa é não comutativa, mas se quisermos considerar os quatérnios como números precisamos abandonar este paradigma aritmético da comutatividade multiplicativa. E voltamos novamente à estaca zero.

Os algebristas resolveram esta situação de forma muito simples: considerando uma matriz como um número. Esta é uma "mudança de fase" muito importante para a constituição do que entendemos hoje por matemática. Na definição dos objetos da álgebra, o que importa é o conjunto com sua estrutura (algébrica), isto é, as propriedades das operações definidas no conjunto. O conceito de número precede esse ponto de vista (por alguns milênios) e talvez, por isso, seja tão complicado conciliar as duas coisas. O conceito de número está tradicionalmente ligado à natureza do objeto, enquanto a álgebra moderna não se importa com tal natureza. Na álgebra moderna, tudo se resume a estruturas e relações entre estruturas; para a álgebra, duas raízes do mesmo polinômio irredutível são "a mesma coisa", são indiscerníveis, já que é possível trocar uma pela outra por meio de um automorfismo de um corpo apropriado.

Do ponto de vista teórico, uma vez que a álgebra não se preocupa com a essência de seus objetos e sim somente com as operações entre eles, dizer que uma matriz é um número não é um problema. Mas, apesar disso, em nível mais elementar, e talvez até para um algebrista em sua informalidade, uma matriz não é vista como um número, e o que vem a ser ou não um número se constitui também socialmente em forma convencional.

É interessante ressaltar que, apesar de não podermos dizer com precisão o que é um número, podemos destacar que a essência de um número está no contexto em que ele está inserido, tornando este conceito, então, não definível. Por exemplo: o número *2* é um número natural? É um número complexo?

A rigor, o número natural 2 e o número complexo 2 são entidades diferentes pois, como veremos, suas identidades dependem do contexto que estão inseridos. De fato, o número *2*, enquanto número natural é um número primo, isto é, só é divisível por *1* e por ele próprio. Já o número *2*, enquanto número complexo, pode ser escrito como $2 = (1 + i).(1 - i)$, ou seja, ele não é divisível apenas por 1 e por ele próprio. Aliás, nem faz sentido falar em número primo no contexto do corpo dos complexos, já que, em um corpo, todo número é divisível por qualquer número não nulo. Por outro lado, considerando o número 2 como membro de anel dos inteiros complexos, isto é, os números complexos com parte real e parte imaginária inteiras, aí este número admite a mesma fatoração acima ($2 = (1 + i).(1 - i)$), com o adendo de que tanto $1 + i$ quanto $1 - i$ são primos neste anel, fazendo com que 2 não seja primo. Isso mostra que, a propriedade “ser primo” não é algo exclusivo do número 2 enquanto objeto, mas é uma propriedade que se dá a partir do momento em que o número 2 está inserido em um determinado contexto específico.

Esses exemplos destacam que um número se constitui socialmente, tanto em um sentido humano quanto matemático, ou seja, sua construção se dá tanto por um caráter social externo, a partir da construção humana por meio das experiências daquilo que entendemos por número, quanto por meio de um caráter interno, ligado ao contexto matemático que este número está inserido e pelas relações matemáticas que se formam a partir de noções já conhecidas em outros contextos quando transportadas a uma nova ideia. E estes aspectos externo e interno também são dinâmicos, pois são contextuais, dependem de um contexto social e/ou matemático.

Outro exemplo interessante é o de “ângulo”. Vianna e Cury (2001) trazem uma discussão sobre definições de ‘ângulo’ contidas em livros didáticos. Os autores apresentam definições que recorrem a semirretas, regiões do plano ou outras ideias; definições que incluem ângulos nulos e rasos bem como definições que não aceitam ângulos nulos e/ou rasos; das mais simples às mais complexas.

Ao discutir sobre a “correção” da noção de definição, a respeito de ângulo, Vianna e Cury (2001) enfatizam seu uso em um determinado contexto:

> Em filosofia, (...), poderíamos dizer que uma definição é qualquer tentativa de resposta à pergunta: o que é isso? Ou, se preferirmos, poderíamos indagar ao próprio conceito: o que você é? E desse modo uma definição dependerá do uso que se pode fazer daquilo que se pretende definir.

> Assim, para encaminhar nossas discussões, vamos aceitar que “definir” é equivalente a restringir ou limitar o uso de um termo a um contexto determinado. (...)
> Assim, adotado o nosso critério para dar definições, não existiria uma “essência”, um significado “correto” e aplicável a todas as significações para a palavra ângulo. (2001, p. 8-9)

Imre Lakatos (1922 - 1974), matemático e filósofo da matemática, que também se contrapunha ao *neopositivismo* do Círculo de Viena, na sua obra *Provas e Refutações: A Lógica da Descoberta Matemática*, traz, como exemplo, uma abordagem historicista sobre a conjectura de Euler, que afirma na sua formulação inicial que, para todo poliedro no espaço tridimensional, vale a relação $V – A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro. Sua abordagem ilustra que, entre os matemáticos, a definição de poliedro foi mudando com o tempo, tendo significados diferentes para Cauchy ou para Poincaré no século XIX. Desta forma, a dificuldade em definir um poliedro gerava contraexemplos para a conjectura, o que levava não à sua total refutação, mas à necessidade de “melhorar” a definição de poliedro, englobando primeiramente a ideia de “convexo” e posteriormente de “simplesmente conexo” (MOLINA, 2001), o que permite ainda a generalização dessa noção (de poliedro) para dimensões maiores do que 3.

Nosso objetivo aqui não é comparar esses autores (Wittgenstein e Lakatos), mas sim, com estes exemplos, destacar o caráter dinâmico e social que, para eles, um conceito tem, que pode mudar tanto ao longo do tempo quanto de acordo com seu uso em contextos diferentes e, portanto, não possui barreiras nem limites claros, superando o limite do citar, informar e avançado para o “*formar”.* Do mesmo modo, vemos que esta dinamicidade também se dá por razões internas, inerentes à própria natureza da matemática.

Assim, sempre que falarmos da *formação* de um conceito, devemos dar menor ênfase à *forma* e mais à *ação* (processo de form*ação*), pois esta forma deve ser vista como dinâmica, em movimento e em constante construção e reconstrução.

“Definir”, desta forma, é “fazer um recorte”, “tirar uma foto” de um conceito, ou seja, “dar um fim”, dar limites, criar um modelo a ser perseguido, copiado. Assim, uma definição, de forma alguma, pode ser confundida com o conceito em si, mas tem seu valor em determinados contextos com certas *finalidades.*

2.1 DEFINIR UM CONCEITO

O exemplo dado por Wittgenstein sobre número é bastante significativo para nós por dois motivos. Primeiro porque é um exemplo fundamental. Mesmo tendo consciência de que a matemática moderna não se resume apenas a números, não podemos deixar de reconhecer que os números naturais são a base da matemática – tudo o que entendemos por matemática parte diretamente ou indiretamente deles. Segundo porque é um exemplo extremo. Como vimos, dar uma definição razoável de número, que englobe tudo aquilo que entendemos por número não é tarefa fácil, se não impossível – todas as tentativas se mostraram falhas.

Então, podemos dizer que ‘número’, como entendemos hoje, tanto por sua natureza, mas principalmente por conta de suas expansões, não é um “conceito definível”.

No entanto, dar definições daquilo que se fala, inclusive de conceitos, quando possível, é parte essencial da construção de teorias matemáticas. No caso dos números, nas teorias matemáticas, os autores partem do pressuposto de que já há um “entendimento geral” do que é um número e não os definem (assim como “conjunto” ou “ponto” na geometria euclidiana) e, a partir daí, formulam suas novas definições e proposições.

O que é essencial para nós, é entendermos que ‘conceito’ e ‘definição’ são coisas diferentes. Enquanto o conceito não possui uma fronteira fixa, pode estar em constante expansão e modificação, a definição, por já ter um objetivo, uma finalidade, *necessita*, muitas vezes, ter uma rigidez específica, mas deve ser suscetível a modificações.

A discussão apresentada por Vianna e Cury (2001) sobre definições de ângulos, presentes em livros didáticos de matemática é bastante rica para ilustrar o que estamos falando.

Os autores apresentam um total de 14 definições que recorrem a semirretas, onde 5 destas aceitam ângulos nulo e raso, 5 não aceitam ângulos nulo e raso, 2 aceitam ângulo nulo, mas não aceitam ângulo raso e 2 não aceitam ângulo nulo, mas aceitam ângulo raso. Também apresentam 8 definições que recorrem a regiões do plano e outras 3 definições que recorrem a outras ideias. Não traremos todas estas definições aqui, mas, a fim de ilustração, podemos destacar algumas:

> Ângulo é a figura formada por duas semi-retas que têm a origem comum (Quintella, 1950, p. 139, 3º ginasial).
> (...)
> Ângulo é a reunião de duas semi-retas não-colineares e de mesma origem (Pompeu e outros, s/d, p. 85, 7ª série).
> (...)
> Ângulo é uma figura geométrica plana, formada por duas semi-retas, não opostas e de mesma origem (Mori e Onaga, 1998, p. 229, 6ª série).
> (...)
> Duas retas r e s que se cortam em um ponto A, dividem um plano em quatro regiões. Cada uma dessas regiões recebe o nome de ângulo (Pierro Neto, s/d, p. 258, 1ª série ginasial).
> (...)
> Ângulo é a abertura formada por duas rectas que partem do mesmo ponto (Collecção FTD, 1925, p. 8). (VIANNA, CURY, 2001, p. 24 – 25)[3]

Feito isso, os autores discutem sobre uma possível “correção” das definições e, para tal, antes, trazendo outros autores, refletiram sobre o que vem a ser uma definição.

[3] Além das devidas citações, Vianna e Cury destacaram a série para a qual o material era destinado.

Não temos por objetivo listar classificações nem entrar na terminologia apresentada por Vianna e Curry (2001) com base em outras referências, mas gostaríamos de destacar a importância dada pelos autores para a distinção entre a definição e aquilo a qual ela se refere. Os autores julgam

> (...) importante sublinhar que essa distinção entre o que tentamos definir e as palavras que usamos para fazê-lo não é consensual e, se enveredássemos pela filosofia, ela nos remeteria a um emaranhado de problemas que são muito antigos e que não encontram solução no sentido de que uma única resposta satisfaça a todos os pontos de vista. (p. 29)

Desta forma, os autores, conforme já mencionamos, entendem que definir está ligado a dar uma restrição, dar uma limitação ao uso de um termo, ou conceito, em um contexto determinado. Além disso, destacam que, adotado este critério para definições “(...) não existiria uma “essência”, um significado “correto” e aplicável a todas as significações para a palavra ângulo”. (VIANNA, CURY, 2001, p. 30)

Ernest (1991, p. 250, *apud* VIANNA, CURY, 2001, p. 34) mostra que a visão do que vem a ser uma definição, dada por um professor, está ligada a própria concepção de matemática que este tem. Este autor aponta três possíveis filosofias da matemática que, desta forma, influenciam suas práticas pedagógicas: a visão instrumental, a platônica e a de resolução de problemas.

> No primeiro caso, a Matemática é vista como “uma acumulação de fatos, regras e habilidades para serem usados na busca de algum objetivo externo”.
>
> A concepção platônica considera a Matemática como um corpo estático e unificado de conhecimento absoluto. A visão de resolução de problemas é dinâmica, aceitando que a Matemática está em contínua expansão e evolução.
>
> Desta forma, se um professor vislumbra a Matemática como um conjunto de regras, tenderá a escolher as definições que dizem como fazer determinada operação, ou seja, as que apresentam passo a passo os

> itens de que ele necessita para a sua construção. Além disso, escolhida uma definição, essa será tomada como “certa”, como uma regra a ser seguida.
> Do mesmo modo, se um professor aceita que o conhecimento matemático é estático, que as coisas *são* ou *não são*, ele terá a tendência a aceitar as *verdades* enunciadas nos livros como absolutas; dessa forma, terá dificuldade em adaptar uma definição ao contexto em que atua, pois sua postura “engessa” tal conhecimento.
> Finalmente, se o professor crê que a Matemática pode ser expandida e modificada, que é uma ciência falível e corrigível como todas as outras, então ele poderá dispor de uma definição e remodelá-la de acordo com as necessidades de sua turma. (VIANNA, CURY, 2001, p. 32, grifos dos autores)

Gaston Bachelard (1884 – 1962), um filósofo da ciência da primeira metade do século XX, principalmente em sua obra *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento,* nos fornece outras interpretações dos casos platônico e instrumental da matemática do ponto de vista da filosofia, complementando o ponto de vista didático de Ernest. Para Bachelard (1996), uma concepção platônica da matemática exigiria de seus objetos ter uma substância, uma certa concretude, que aplicado a noção de ângulo exigiria dar uma definição que “delimite seus contornos” para ser susceptível de visualização. No entanto, para uma abordagem instrumental da matemática, bastaria, no caso da noção de ângulo, fornecer uma forma de medi-lo. No caso dessa noção, o conceito de radiano permite essa instrumentalização. Isso mesmo aconteceu historicamente quando, no século XIX, a matemática incorporou para si a noção de infinito através do conceito de cardinalidade, que é sua medida.

Sem querer entrar numa categorização do que vem a ser matemática, com base em algumas das filosofias listadas, precisamos, de antemão, destacar que não vimos estas filosofias como meras opções de escolha. No que segue, defenderemos que o entendimento filosófico acerca do que vem a ser matemática traz implicações pedagógicas significativas do ponto de vista formativo, e uma visão de matemática enquanto ciência falível tem muito mais a contribuir para tal. Além do mais, esta visão é coerente com o que, até então, mostramos entender por conceito e definição.

3 AFINAL, O QUE É MATEMÁTICA?

Não temos a pretensão de dizer aqui o que é matemática. Nem acreditamos que seja possível fazer isso de forma razoavelmente clara e objetiva. O que buscaremos aqui, mais do que isto, é, talvez, dizer o que *não* é matemática, se contrapondo a uma ideia rígida da mesma, restrita à lógica e a significados desprovidos de sentido. Para tal, buscaremos elencar elementos essenciais do pensamento matemático. Certamente, ao fazer isso, entramos no campo da metamatemática. Na metamatemática, os objetos de estudo não são mais os objetos matemáticos em si, como números, pontos, operações, etc. e sim a própria matemática e seus métodos. O curioso é que a metamatemática faz uso da própria matemática para estudo da matemática e é nesse aspecto que entra, e faz sentido, o teorema de Gödel. (Veremos adiante que Wittgenstein teceu fortes críticas a isto: o uso da própria matemática para defender teses metamatemáticas.)

No século XIX, com o desenvolvimento da análise matemática em decorrência dos avanços do cálculo diferencial e integral e da geometria, ganha força a busca por uma fundamentação última da matemática. Motivada principalmente por resultados da teoria de conjuntos, boa parte dos matemáticos direcionou seus esforços na busca de axiomas que fundamentassem as diversas teorias matemáticas (em especial a aritmética) e que "resolvessem" os problemas dos paradoxos existentes, como o paradoxo de Russell.

Neste contexto, ganham força três correntes matemáticas com este mesmo fim: fundamentar a matemática. Estas correntes foram o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. As doutrinas que se empenharam em fundamentar a Matemática "tinham em comum a metáfora que o conhecimento é um edifício e por isso deve ter seus fundamentos seguros, fidedignos e especificáveis." (ENCICLOPÉDIA, 2006, p. 376).

O logicismo, primeira corrente que surgiu, iniciada por volta de 1884, por matemáticos como Gottlob Frege (1848 – 1925), Bertrand Russell (1872 – 1970), Giuseppe Peano (1858 – 1932) e Alfred North Whitehead (1861 – 1947) entre outros, tinha como principal premissa “reduzir” a matemática à lógica. Assim, seus axiomas pertenceriam à lógica e a matemática seria parte da mesma. Desta forma,

> (...) perguntas do tipo *Por que a matemática clássica não contém contradições?* ter-se-iam transformado em *Por que a lógica não contém contradições?* Esta última pergunta, é uma das que os filósofos sabem manejar com perfeição, e pode-se admitir que uma conclusão satisfatória dos programas dos logicistas teria dado fundamentos firmes à matemática clássica, em termos da lógica. (SNAPPER, 1984, p. 85, grifos do autor)

O “grande momento” do logicismo se dá na obra *Principia Mathematica,* escrito por Russell e Whitehead entre 1910 e 1913. Nesta obra (1910), os autores buscam reconstruir a aritmética por meio de axiomas hierarquizados em tipos lógicos, usando regras de dedução bem definidas através de uma linguagem lógica apropriada.

Para entender melhor as pretensões dessa corrente, é preciso compreender o que os logicistas entendiam por lógica:

> Hoje, pode-se definir a lógica clássica como consistindo de todos aqueles teoremas que podem ser demonstrados em linguagem de primeira ordem (...), sem o uso de axiomas não lógicos. Estamos, portanto, nos restringindo à lógica de primeira ordem e ao uso das regras de dedução e dos axiomas daquela lógica. (SNAPPER, 1984, p. 86)

O vocabulário de uma linguagem de primeira ordem se dá por meio de cinco itens, onde os quatro primeiros são quase sempre os mesmos e apenas o quinto item muda de teoria para teoria (SNAPPER, 1984, p. 91). Os itens são:

1. Uma quantidade enumerável de variáveis;

2. Símbolos para conectivos da linguagem comum: $\neg$ para 'não', $\wedge$ para 'e', $\vee$ para 'ou', $\Rightarrow$ para 'então' ou 'implica, $\Leftrightarrow$ para 'se, e somente se', etc;
3. Sinal de igualdade: =;
4. Quantificadores lógicos: $\forall$ (para todo) e $\exists$ (existe);
5. Parâmetros da linguagem: Toda teoria axiomática possui "termos não definidos". Na geometria euclidiana temos os termos 'ponto', 'reta' e 'incidência' a quem devemos atribuir símbolos apropriados, na aritmética temos os termos 'zero', 'adição' e 'multiplicação', que naturalmente atribuímos os símbolos 0, + e x. Já na teoria de conjuntos escrita por Zermelo e Fraenkel há apenas um termo não definido, a relação de pertinência, que normalmente atribuímos o símbolo $\in$.

Dizemos que uma linguagem é de *primeira ordem* quando usamos os quantificadores (item 4) e símbolos (itens 2 e 3) para interpretarmos as variáveis da teoria (item 1) e os parâmetros da linguagem (item 5) como elementos das estruturas a que se referem. Na linguagem de *segunda ordem*, utilizamos os quantificadores e símbolos para nos referirmos também a subconjuntos das estruturas.

Um exemplo de proposição lógica é a proposição "$p \vee \neg p$" (lei do terceiro excluído). Esta proposição não depende em nada do conteúdo da proposição *p*, não importa se é uma proposição matemática, física, etc., ela se verifica pela sua generalidade. Neste caso, os logicistas afirmam que esta é uma proposição válida pela sua "forma" ou, mais especificamente, pela sua "forma sintática". (SNAPPER, 1984, p. 86)

Apesar de Russell e Whitehead (1910) terem pontuado os axiomas e regras de dedução de sua teoria, qualquer teoria formal poderia tentar o mesmo feito, reduzir a matemática à lógica. Dentre tais teorias, destaca-se a, já citada, teoria de conjuntos desenvolvida por Ernst Zermelo (1871 – 1953) e Abraham Fraenkel (1891 – 1965), que abreviamos por ZF. A teoria ZF, que possui apenas nove axiomas, é a mais famosa e aceita dentre as teorias de conjuntos que buscam fundamentar a matemática clássica nela.

O sucesso do logicismo dependeria apenas de mostrar que os nove axiomas da teoria ZF são axiomas lógicos. No entanto,

> (...) o axioma da infinidade e o axioma da escolha não podem ser considerados proposições lógicas. Por exemplo, o axioma da infinidade diz que existem conjuntos infinitos. Por que aceitamos este axioma como verdadeiro? A razão é que todos estamos muito familiarizados com inúmeros conjuntos infinitos, por exemplo o conjunto dos números naturais, ou o conjunto dos pontos no espaço euclidiano tridimensional. Portanto, aceitamos este axioma baseado em nossas experiências do dia a dia com conjuntos, e isso claramente mostra que o aceitamos em virtude de seu conteúdo, e não em virtude de sua forma sintática. Em geral, quando um axioma afirma a existência de objetos com os quais nos achamos familiarizados devido à nossa experiência do dia a dia, é quase certo que não se trata de uma proposição lógica no sentido do logicismo. (SNAPPER, 1984, p. 86-87)

Com isso,

> A redução da Matemática à Lógica, desejada pelo logicismo, era possível, mas não nos termos de Frege (1959)[4]. Para obter esse resultado, era necessário, ou fazer uso de toda a complexidade da teoria dos tipos lógicos, ou considerar a Teoria de Conjuntos como parte da Lógica, ou aceitar lógicas de ordem superior ao primeiro. Em todos os casos, o objetivo de uma redução da Matemática a algo mais simples e evidente perdia-se. Assim, por exemplo, a Lógica dotada da teoria dos tipos resulta ser uma teoria tão ou mais complexa que a teoria matemática que se tentava derivar a partir dela. (MOLINA, 2001, p. 136)

[4] FREGE, G. The Foundations of Arithmetic. Oxford: Blackwell, 1959.

Tal impossibilidade em fundamentar a matemática, restringindo-a à lógica, como proposto pelos logicistas, já é natural para nós após as discussões feitas no capítulo anterior. Lá, evidenciamos número, por sua natureza e suas expansões, é indefinível. Claro que a matemática está intimamente ligada à lógica e possui seus conteúdos que são perfeitamente definíveis, mas a proposta logicista, de reduzir a matemática à lógica, passa diretamente pela ideia de buscar uma fundamentação última a conceitos matemáticos primitivos, em especial ao conceito de número. Dizer que axiomas, como o da escolha e o da infinidade dependem de seu conteúdo intuitivo e não apenas de sua forma é o mesmo que dizer que sua aceitação se dá pela experiência obtida pela utilização dos números ou, nos termos de Wittgenstein, devido a um jogo de linguagem que produzimos sobre números.

Já o intuicionismo, segunda corrente que buscava fundamentar a matemática, que surgiu por volta de 1908, graças ao matemático Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966), tinha como ponto de partida os números naturais. Partindo da construção intuicionista dos números naturais, buscava-se, de maneira indutiva, construir toda a matemática, bem como suas provas.

O intuicionismo partia de uma ideia inicial que o ser humano possui uma “intuição construtiva” de número natural, partindo do número 1 e concebendo os números seguintes por meio de um processo de construção mental possível graças a nossa percepção de tempo (influência kantiana). Esta intuição é a que dá nome à corrente.

> É importante observar que a construção intuicionista dos números naturais nos permite construir somente segmentos iniciais finitos arbitrariamente longos 1, 2, ... n. Não nos permite construir aquele conjunto completo de todos os números naturais que nos é tão familiar na matemática clássica. É igualmente importante observar que esta construção é ao mesmo tempo “indutiva” e “efetiva”. (SNAPPER, 1984, p. 88, grifos do autor)

Diferentemente dos logicistas, que tinham uma concepção platonista, ou realista, de matemática, que via seus objetos como entidades abstratas cuja existência não depende da mente humana, cabendo a nós apenas descobrir tais objetos e suas relações, os intuicionistas concebiam a matemática como uma atividade mental, onde seus objetos, bem como as relações entre eles, se davam pelas construções mentais efetivas e indutivas uma após a outra, ou seja, efetuando constructos, um após outro. Da mesma maneira, o mesmo que vale para os números vale para as definições, teoremas e suas demonstrações.

Outra diferença entre a corrente logicista e intuicionista era que, como os intuicionistas não tinham uma visão platonista da matemática, ao contrário, tinham uma visão conceptualista, onde as entidades abstratas são construídas pela mente humana, estes viam problemas na matemática, evidenciados pelos paradoxos existentes.

> (...) Os logicistas consideraram esses paradoxos como erros banais, devidos a matemáticos falíveis e não a uma natureza falível. Os intuicionistas, por outro lado, consideravam esses paradoxos como indicações claras de que a matemática deveria ser reconstruída desde os alicerces [os números naturais]. (SNAPPER, 1984, p. 88)

Os intuicionistas, em especial, não aceitavam leis lógicas clássicas que não fossem compostas de constructos, pois as tinham como combinações de palavras sem sentido construtivo. Isto é assim pois atribuíam aos próprios símbolos lógicos um sentido construtivo, por exemplo, afirmar “$p \vee q$” significaria garantir a existência de uma construção de p ou uma construção de q. Nesses termos, o princípio do terceiro excluído “$p \vee \neg p$” não poderia ser afirmado a menos que se tenha uma construção de p ou de $\neg p$, ou seja, eles não aceitavam o princípio do terceiro excluído como um axioma lógico, o que não só é uma postura contrária à postura da matemática "clássica", mas também à lógica "clássica" (desde o tempo de Aristóteles). Na prática, os intuicionistas, por conta disto, não aceitavam, por exemplo, uma demonstração por redução ao absurdo. Desta forma, muitas das demonstrações matemáticas, consideradas em outras correntes, se tornavam impossíveis ou muito longas.

De certa forma, os intuicionistas tinham uma maneira particular de conviver com as dificuldades. Em especial, o que não conseguiam demonstrar de forma indutiva, ou construtiva, simplesmente não era considerado como parte da matemática. Talvez esta tenha sido a principal razão do fracasso de tal vertente, baseada em uma concepção particular da própria matemática, convencer os matemáticos a aceitá-la.

> Uma das razões é que os matemáticos clássicos simplesmente se recusavam a eliminar muitos dos belos teoremas que são, para os intuicionistas, combinações de palavras sem sentido. Um exemplo é o teorema do ponto fixo de *Brouwer*, em topologia, que é rejeitado pelos intuicionistas, pois o ponto fixo não pode ser construído, podendo-se somente demonstrar que tem que existir, por meio de uma demonstração de existência. A propósito, o mesmo Brouwer que criou o intuicionismo é também famoso por seu trabalho em topologia (não-intuicionista). (SNAPPER, 1984, p. 86-87)

Novamente fazendo alusão ao que vimos anteriormente, não é tão surpreendente o fracasso desta corrente. Não apenas os objetos matemáticos se constituem como conceitos, como a própria matemática também. O conjunto dos números naturais é aceito como tal pela experiência, convivência e familiaridade que temos com eles, bem como as “regras” da própria matemática. Assim, aceitamos a ideia de infinito, o conjunto dos números naturais e demais números como conjuntos infinitos, e lei do terceiro excluído, etc.

É conveniente observar que o critério racional de aceitação dos objetos matemáticos como existindo do pondo de vista clássico ou intuicionista é um critério extramatemático, ou melhor dizendo, metamatemático.

Snapper (1984, p. 89) aponta outras duas razões para o fracasso intuicionista: a segunda seria que demonstrações breves e elegantes da matemática clássica se tornavam longas demais, como por exemplo a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra que levaria em torno de dez páginas para ser demonstrado por meio dos constructos intuicionistas enquanto na matemática clássica podia-se demonstrá-lo em meia página.

A terceira razão seria que teoremas verdadeiros na matemática intuicionista eram considerados falsos na matemática clássica, como por exemplo o teorema intuicionista que afirma que “qualquer função real definida para todos os números reais é contínua”. Todos os contraexemplos que um matemático clássico pudesse citar não satisfaria os critérios construtivos e, portanto, não seria um contraexemplo da matemática intuicionista. É delicado pressupor que o matemático intuicionista tem razão e que o clássico não a tem, pois, é possível, quando falam de funções contínuas, estarem falando de coisas diferentes, até porque os símbolos lógicos utilizados por ambos tem significados diferentes.

> Essas três razões para a rejeição do intuicionismo pelos matemáticos clássicos não são nem racionais nem científicas. Também não são razões pragmáticas, baseadas na convicção de que a matemática clássica é melhor para aplicações à física ou a outras ciências do que o intuicionismo. São todas razões de natureza emotiva, baseada em um sentimento profundo do que seja realmente a matemática. (SNAPPER, 1984, p.91 – 92)

Além das três razões citadas por Snapper, acreditamos que outro fator determinante para a não consolidação do intuicionismo é que tal corrente limitava demais o que já se entendia por matemática. Apesar de resolver problemas lógicos fundamentais, ele nos restringe em muito mais pontos do que os matemáticos da época gostariam. Da mesma forma, acreditamos que os matemáticos não estavam mais dispostos a conceber a matemática apenas pela forma intuicionista.

A terceira corrente, criada por volta de 1910, o formalismo, que tinha como principal expoente David Hilbert (1862 – 1943), buscava justamente refutar a visão intuicionista e, para isto, usava métodos finitários, utilizados também pelos intuicionistas.

Assim, como os logicistas, os formalistas buscavam elaborar uma teoria axiomática por meio de uma linguagem formal (daí surge o nome da corrente). A grande diferença era que os logicistas tinham por objetivo mostrar que a matemática era reduzível à lógica (ou seja, não bastava apenas formalizar as teorias, era preciso mostrar que os axiomas de tal teoria podiam também ser reduzidos à lógica, o que vimos que não era possível na aritmética por meio da teoria de conjuntos ZF, graças aos axiomas da escolha e da infinidade, que eram aceitas não somente pela sua forma, mas pelo seu conteúdo), enquanto os formalistas precisavam utilizar a formalização para demonstrar matematicamente que determinados ramos da matemática estavam isentos de contradições, uma vez que a *verdade* destas teorias não poderia ser fundamentada no conteúdo das proposições. Este objetivo dos formalistas ficou conhecido como *programa de Hilbert*.

Assim como os logicistas tinham uma visão realista da matemática e os intuicionistas tinham uma visão conceptualista, os formalistas também partiam de uma concepção filosófica da matemática, porém um pouco mais sutil. Para Hilbert, dada uma teoria axiomática *T* e uma linguagem formal *L*, haveria, naturalmente, momentos em que precisaríamos falar da linguagem *L* e, neste caso, utilizaríamos a nossa linguagem usual. Para evitar contradições inerentes à linguagem natural que poderiam, por ventura, aparecer, deveríamos utilizar raciocínios absolutamente seguros, acima de qualquer suspeita, que Hilbert chamou de “raciocínios finitários”. (SNAPPER, 1984, p. 92) Estes raciocínios finitários eram muito semelhantes às ideias de constructos utilizados pelos intuicionistas. Nesta corrente filosófica do formalismo, que se aproxima do ‘nominalismo’, as entidades abstratas não têm existência, nem fora da mente humana, como afirma o realismo, e nem na mente humana como afirma o conceptualismo. Essas entidades pertencem apenas à linguagem.

Assim, como o logicismo e o intuicionismo, o formalismo também fracassou em seus objetivos, muito pelos resultados apresentados em 1931 por Kurt Friedrich Gödel (1906 – 1978).

3.1 OS (META)TEOREMAS DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL E SUAS CONSEQUÊNCIAS NA MATEMÁTICA

O austríaco Kurt Friedrich Gödel (1906 – 1978) foi um importante matemático e filósofo da matemática, principalmente pelas contribuições apresentadas em 1931, um ano após defender sua tese de doutorado. Tais contribuições resumem-se a dois resultados: os teoremas da incompletude de Gödel, que na realidade são metateoremas, pois são teoremas na metamatemática das teorias matemáticas, aparecem em duas versões sutilmente diferentes, inicialmente com linguagem mais técnica do que costuma ser utilizado hoje.

Nosso objetivo aqui, não é demonstrar estes teoremas e sim tentar entender o significado deles e suas implicações no contexto da matemática, da metamatemática e na educação matemática.

O *primeiro teorema* diz que qualquer teoria axiomática, *recursivamente enumerável*[5], que contemple *verdades básicas da aritmética*, como apresentada no sistema axiomático de Peano ou da teoria ZF, *não pode ser completa e consistente ao mesmo tempo*. Uma teoria axiomática, do ponto de vista metamatemático, é dita *completa* se, dada qualquer proposição expressável na teoria, isto é, que faça sentido no âmbito de sua linguagem, temos que, *ou ela é demonstrável ou sua negação é demonstrável*. Já uma teoria é dita *consistente* quando *não existe nenhuma proposição de modo que ela e sua negação sejam demonstráveis*. Aqui, neste contexto, a palavra ‘demonstrável’ refere-se a ser dedutível em uma lógica subjacente, cujas regras são explicitamente determinadas.

Já o *segundo teorema nos diz que uma teoria axiomática*, sob as mesmas condições, *não pode demonstrar sua própria consistência dentro da teoria*, mesmo sendo essa “consistência” expressável na própria teoria. Por exemplo, na teoria

[5] Uma teoria de linguagem recursivamente enumerável é uma teoria cujas palavras formam um conjunto recursivamente enumerável. A definição de conjunto recursivamente enumerável é razoavelmente técnica. Para nós, basta saber que o conjunto dos números naturais é recursivamente enumerável.

axiomática de Peano, Gödel traduz a demonstrabilidade desta teoria numa proposição aritmética e prova que esta proposição não é demonstrável nesta teoria.

Gödel, já no seu primeiro teorema apresentou uma maneira de como construir fórmulas aritméticas que, em sendo verdadeiras não são demonstráveis, o que torna a teoria incompleta. Toda a argumentação do Gödel é teórica, a existência dessas fórmulas de Gödel não é exemplificada na forma em que ele as construiu, porém existem certos resultados avançados de combinatória que podem ser tomados como exemplos[6]. Desta forma, como uma das consequências, Gödel evidenciou a diferença entre proposições verdadeiras e proposições demonstráveis na matemática.

É importante notar quanto significativa é a noção de *verdade* de Gödel para a construção do teorema e sua interpretação. Quando Gödel diz que se pode construir uma formula aritmética G, que sendo verdadeira não é demonstrável em um sistema axiomático S, há fortes indícios que nos fazem pensar que Gödel presume que existem verdades, que se constituem como tal (verdadeiras) em um contexto mais amplo, o contexto da aritmética já constituído como verdadeira, com base em uma concepção platonista de matemática.

O formalismo de Hilbert tinha por objetivo mostrar que a matemática como um todo estava isenta de contradições. Por trás deste objetivo, havia o espírito de que toda a matemática pudesse ser axiomatizada de tal forma que fosse consistente e completa ao mesmo tempo e que ela própria pudesse comprovar sua consistência. Uma consequência epistemológica por trás disto é que toda verdade matemática fosse demonstrável. Assim, os resultados de Gödel impuseram a impossibilidade de efetivação do projeto de Hilbert, evidenciando que existem verdades aritméticas que não poderiam ser provadas e mostrando que a aritmética não é capaz de provar sua própria consistência.

[6] O artigo *A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic* de Jeff Paris e Leo Harrington, publicado pela North-Holland Publishing Company em 1977, traz um exemplo de uma teoria aritmética incompleta construída a partir dos resultados de Gödel.

Além disso, o teorema da incompletude de Gödel, refutou também a ideia dos logicistas que buscavam reduzir a matemática à lógica, mostrando que a aritmética possui verdades que não poderiam ser provadas com base em alguma teoria axiomática que cumpra as exigências de Gödel.

3.2 A EPISTEMOLOGIA DE LAKATOS

Imre Lakatos, em sua obra *Matemática, ciência y epistemologia*, busca ilustrar sua compreensão da matemática. Para o autor (1987, p. 42), a matemática possui um caráter *a posteriori,* substantivo e falível, diferente do que o empirismo lógico a considerava: *a priori,* tautológica e infalível.

Lakatos (1987, p.44-47) traz uma extensa lista de considerações de matemáticos importantes, inclusive anteriores a Gödel, e do próprio Gödel, que já apontavam para uma visão da matemática como uma ciência que ele chama de *quase-empírica*.

Para o autor (1987), uma teoria que ele chama de “euclidiana” constitui-se de uma teoria em que suas verdades evidentes podem ser colocadas no cume da própria na forma de axiomas. Assim, por meio de inferências lógicas, sua verdade inundaria para baixo os resultados consequentes (daí a ideia de cume), isto é, uma teoria euclidiana parte de verdades e, por meio de inferências lógicas, transmite essa verdade para os resultados que, inevitavelmente, seriam verdadeiros. Já uma teoria empírica consiste em uma teoria cujo cume é composto de hipóteses, que buscam explicar a teoria e, se tais hipóteses são verdadeiras, essa verdade seria transmitida da mesma forma e chegariam a resultados verdadeiros. No entanto não é possível garantir tal veracidade das hipóteses. Assim, se chegarmos a resultados falsos (comprovadamente falsos empiricamente), é porque as hipóteses iniciais eram falsas, e neste caso, dizemos que a teoria é falseada e não pode ser aceita. Porém, se uma teoria não pode ser falseada, então ela pode ser aceita temporariamente, enquanto essa condição se mantém.

> (...) Lakatos afirma que o logicismo de Frege e Russell, o intuicionismo de Brouwer e o formalismo de Hilbert compartilham igualmente essa concepção euclidiana. Eles diferem na identificação da base evidente de onde podem ser deduzidos os demais enunciados verdadeiros da Matemática. Para os logicistas, essa base consistiria de verdades lógicas. No entanto, essa base lógica revelou-se insuficiente. Russell (1908) admitiu ao lado dos axiomas lógicos, dois axiomas não lógicos: o axioma do infinito e o axioma da redutibilidade. Esses axiomas não são evidentes. No entanto, Russell acabou declarando que aceitamos os axiomas de infinitude e redutibilidade pelo fato de que as suas consequências são óbvias. Para Lakatos, o fato de Russell ter admitido dois axiomas não evidentes mostraria que o programa logicista de fundamentação da Matemática ficaria aquém da realização do ideal euclidiano.
>
> (...) Na visão de Lakatos, os dois teoremas de Gödel colocam uma barreira infranqueável às tentativas de atingir os objetivos do programa de Hilbert. O segundo teorema de Gödel mostraria que os métodos necessários para obter as provas de consistência das teorias matemáticas estão longe da segurança dada pela evidência. (MOLINA, 2001, p. 138-139)

Assim, à luz do discutido, o caráter quase-empírico da matemática se daria pelos seguintes motivos:

1) A matemática não é euclidiana: Na aritmética, do ponto de vista dos logicistas, os axiomas da infinidade e da escolha não são evidentes, uma vez que não são axiomas lógicos por depender de seu conteúdo, que são aceitos pela experiência matemática, pela nossa familiaridade com os números naturais. Já do ponto de vista dos formalistas, os axiomas não precisam ser verdades evidentes, mas hipóteses ou premissas para os raciocínios, sendo estes de caráter finitário e, precisando provar a consistência deles em uma teoria axiomática, o qual pode ser nada evidente.

2) A matemática não é (obviamente) empírica: por lidar com objetos abstratos, não temos como comprovar diretamente a verdade de resultados matemáticos na realidade.

No entanto a “comprovação” dos resultados matemáticos se dá, de alguma forma, em uma “realidade” intelectual, uma realidade também abstrata. Ou seja, acreditamos que determinados resultados matemáticos são verdadeiros pelas suas consequências em explicar determinados conhecimentos que construímos ou na sua utilidade enquanto aplicação em outras áreas do conhecimento.

Por exemplo, o Cálculo Diferencial e Integral, foi desenvolvido para dar respostas a problemas físicos como da gravitação, porém não havia uma fundamentação teórica que justificasse seus resultados, pois baseava-se na noção “confusa” de infinitésimo, apesar de ser útil. Por um lado, o próprio Cálculo foi aceito como matemática pelo seu caráter instrumental e, por outro lado, a Análise Matemática, que se formulou eliminando os infinitésimos e consolidando os números reais, foi aceita pois, entre outras coisas, *justificava* os resultados do Cálculo Diferencial e Integral.

Da mesma forma temos a matemática *fuzzy,* ou difusa, baseada em uma lógica que leva mesmos nomes. A lógica *fuzzy,* ou difusa, consiste, grosso modo, em uma lógica que não possui somente o verdadeiro e o falso, mas sim, atribui valores reais entre 0 e 1 entre o verdadeiro e falso. Assim, algo pode ser 100% verdadeiro, 100% falso ou possuir valores intermediários. Os resultados desta matemática têm se mostrado extremamente úteis nas áreas de engenharia e inteligência artificial. Aliás, ela surgiu justamente para isso, para explicar e apresentar resultados nestas áreas.

Desta maneira, o carácter quase-empírico da matemática está justamente por ser a posteriori, substantiva e falível. A posteriori pois sua aceitação se dá pelas suas consequências epistemológicas e/ou em outras áreas do conhecimento, como a física, computação, etc. Substantiva, pois, ao contrário de ser uma ciência tautológica, ela não se justifica por si própria, depende de fatores externos inerentes a experiência matemática e sua utilidade em outras áreas e, por fim, falível, uma vez que está sujeita a contradições, recorreções e depende de fatores externos indiscutivelmente falíveis.

4 A CRÍTICA DE WITTGENSTEIN A GÖDEL

Wittgenstein teve acesso ao trabalho de Gödel e teceu uma série de críticas ao mesmo. Estas críticas se encontram na obra *Remarks on Foundations of Mathematics*, publicada originalmente em 1956. No entanto as anotações foram escritas entre 1937 e 1944. (O trabalho de Gödel foi publicado em 1931).

Vale a pena ressaltar também que o *Tractatus Logico-Philosophicus*, obra que simboliza a primeira filosofia de Wittgenstein foi publicada em 1921 enquanto *Investigações Filosóficas,* obra que marca sua segunda filosofia foi publicada postumamente pela primeira vez em 1953, enquanto seu falecimento ocorreu em 1951.

Dentre os aspectos da obra de Wittgenstein, não há dúvidas de que a filosofia da matemática tenha sido o mais controverso e polêmico. Prova disso é que wittgensteinianos importantes como Merril B. Hintikka e Jaakko Hintikka preferem não abordar as reflexões do filósofo austríaco na análise que fazem sobre seu legado na obra *Uma investigação sobre Wittgenstein:* "Não estamos convencidos (...) de que a filosofia da matemática de Wittgenstein tenha a mesma profundidade que a sua filosofia da linguagem ou a filosofia da psicologia" (HINTIKKA, HINTIKKA, 1994, p. 51, *apud* SILVA, 2018, p. 98). Da mesma forma, os editores do *Oxford Handbook of Wittgenstein*, Oskari Kuusela e Marie McGinn, na introdução do livro, disseram que "A maioria da filosofia analítica dominante ainda parece muito escandalizada pela filosofia da matemática de Wittgenstein para considerá-la muito seriamente"[7] (2014, p. 07, *apud* SILVA, 2018, p. 98). No entanto, nesta obra, uma das sete partes é destinada à lógica e filosofia da matemática e, dentre as oito seções desta parte, apenas a *Wittgenstein on mathematics,* escrita por Michael Potter, tenta explicar o porquê das ideias sobre matemática de Wittgenstein serem tão rejeitadas.

[7] Tradução feita por SILVA (2018)

> Potter perpassa brevemente alguns tópicos da filosofia da matemática wittgensteiniana, com destaque à sua análise da sugestão feita por Wittgenstein de que o significado de uma generalização aritmética é a sua prova. Na opinião de Potter (ibid., p. 139), essa doutrina do significado como prova dominou o pensamento matemático de Wittgenstein sobre a matemática de tal forma que, quando ele começou a duvidar de sua validade, em fins dos anos 1930, percebeu que os danos à sua concepção de matemática não poderiam ser facilmente remediados. Como consequência, observa Potter, toda a longa seção sobre a filosofia da matemática que integraria as Investigações filosóficas acabou excluída da obra. Além disso, sem ter conseguido reformular suas ideias sobre a matemática dando-lhes uma perspectiva coerente, Wittgenstein deixou apenas anotações incompletas nessa área, enfatiza Potter. (SILVA, 2018, p. 98)

Outro autor que teceu fortes críticas às interpretações filosóficas de Wittgenstein acerca da matemática foi Ray Monk, na obra *Wittgenstein: o dever do gênio,* publicada em 1995. Monk, (1995, p. 270, *apud* SILVA, 2018, p. 98 – 99) destaca que os comentários de Wittgenstein, feitos no apêndice III, § 19, da obra *Remarks on Foundations of Mathematics*, sobre os teoremas da incompletude de Gödel, bem como a tentativa de caracterizá-lo como meros “truques lógicos”, são exemplos dos absurdos defendidos por Wittgenstein no campo da filosofia da matemática. Monk (1995, p. 376, *apud* SILVA, 2018, p. 99) também destaca que as posições do filósofo levaram o famoso matemático Alan Turing a abandonar suas aulas no curso de 1939 sobre o tema e que até seus alunos como o lógico Georg Kreisel na resenha das *Observações sobre os fundamentos da matemática*, criticavam a filosofia da matemática de Wittgenstein: “Os pontos de vista de Wittgenstein sobre lógica matemática não têm muito valor, pois ele conhecia muito pouco do assunto e esse pouco restringia-se às mercadorias da linguagem Frege-Russell” (1995, p. 441, *apud* SILVA, 2018, p. 99).

Os comentários do filósofo feitos sobre os teoremas da incompletude de Gödel fizeram o própria matemático afirmar que tais críticas são “uma interpretação errônea, totalmente trivial e desinteressante (GOLDESTEINS, 2008, p.100, *apud* SILVA, 2018, p. 99). No entanto, aqui, buscaremos mostrar, mais do que ressaltar tanto as críticas feitas por Wittgenstein ao trabalho de Gödel, quanto as críticas feitas às críticas de Wittgenstein, que há uma relação entre a filosofia de Wittgenstein, no que diz respeito à sua noção de conceito, como algo sem limites e que é construído de forma dinâmica e socialmente, conforme abordamos anteriormente, com a própria matemática e seus conceitos, e que tal semelhança é reforçada pelos teoremas da incompletude de Gödel, mostrando que a matemática possui uma dinâmica própria e que possui não apenas um caráter social mas também epistemológico.

Para tal, destacamos mais uma vez que a noção utilizada neste trabalho de conceito do Wittgenstein é uma noção do segundo Wittgenstein e que as críticas feitas à filosofia da matemática pertencem muito mais ao primeiro Wittgenstein e que não foram reformuladas pelo próprio filósofo como sua filosofia em outras áreas, em especial da linguagem e psicologia.

Com relação às críticas feitas por Wittgenstein ao trabalho de Gödel, presentes principalmente no apêndice III do *Remarks on Foundations of Mathematics* (1967), é importante destacar que o filósofo não está contestando os teoremas em si, mas sim uma leitura metafísica do teorema.

> (...) aqueles que tentam defender a leitura de Wittgenstein atentam principalmente para o fato de que suas críticas aplicam-se não propriamente ao teorema, mas à interpretação filosófica deste (...). Wittgenstein não estaria criticando o teorema, mas estaria criticando uma leitura metafísica do teorema, que o utiliza como prova do platonismo matemático, a partir da conclusão atribuída à prova, segundo a qual a verdade não poderia ser equacionada com a demonstrabilidade. Gödel teria provado que existem verdades matemáticas indemonstráveis ou, mais forte ainda, que a verdade ultrapassa a demonstrabilidade, e são formulações como estas que

> Wittgenstein não aceita, pois considera expressões de uma confusão filosófica. O que Wittgenstein está criticando é, primariamente, a própria pretensão de se provar matematicamente uma verdade metafísica [ou metamatemática], como se o teorema tivesse demonstrado uma tese filosófica. Como se sabe, uma posição bastante cara a Wittgenstein é aquela segundo a qual as teses filosóficas não podem ser demonstradas(...). (JOURDAN, 2013, p. 62)

Conforme destacamos anteriormente, Gödel mostra em seu primeiro teorema que existem fórmulas aritméticas verdadeiras que não são demonstráveis e que isto é possível a partir de uma concepção de verdade por correspondência a uma certa realidade (matemática). Podemos chamar de *realista* esta concepção de verdade. Já Wittgenstein parte de uma concepção de verdade por coerência. O autor entende o âmbito da matemática como *normativo*, assim

> A determinação da verdade não seria independente da determinação da semântica e, por isso, se vamos continuar falando em ‘verdade’ no contexto da aritmética será somente em um sentido no qual não apenas ‘ser demonstrável’ é o sentido de ‘verdade’ primário, como também esta própria demonstrabilidade determina o significado das proposições ou fórmulas, não fazendo sequer sentido falar em uma proposição matemática independente de sua demonstração. (JOURDAN, 2013, p. 64)

No entanto, para construir sua argumentação, Wittgenstein interpreta, em algumas passagens, a sentença de Gödel como uma espécie de paradoxo análogo ao paradoxo do mentiroso, e é neste ponto que recaem as principais acusações de que o filósofo não entendera o teorema.

Wittgenstein (1967, I, Ap. III, §8) diz que, se a sentença que afirma de si mesma ser indemonstrável fosse falsa (por alguma razão externa ao sistema), então não seria indemonstrável, logo seria demonstrável e, portanto, verdadeira (no sistema). Este é o paradoxo citado por ele. Desta maneira, significar ser verdadeiro (por alguma razão externa) no sistema não poderia implicar em ser demonstrável no sistema, já que se esta mesma sentença que afirma de si ser indemonstrável fosse verdadeira (por razão externa), seria demonstrável e, portanto, falsa (no sistema). Desta forma, não poderia haver relação de interdependência entre a verdade (externa) e a demonstrabilidade (verdade interna).

> (...) se a sentença é verdadeira, mas não provada no sistema, é verdadeira em outro sentido que não o sentido inicial de ser verdadeira no sistema. Nessa passagem vemos que, para Wittgenstein, ou (1) a sentença verdadeira, mas não provada no sistema, é uma proposição empírica, que seria verdadeira por correspondência a algum fato, e não em virtude das regras do sistema, e, nessa suposição, se estaria tratando a sentença de Gödel como uma proposição contingente – como se esta pudesse também ser verdadeira por correspondência a algo (por algum critério externo ao sistema), e não em virtude das regras do sistema; ou (2) a sentença é verdadeira porque é provável em outro sistema, mas, nesse caso, não temos como manter que ela é verdadeira no sistema (ela seria verdadeira em outro sentido). (JOURDAN, 2013, p.71)

Assim, a verdade em um sistema só se daria pela sua demonstrabilidade. É importante destacar que esta noção de verdade por demonstrabilidade não é um princípio wittgensteiniano, é um pressuposto logicista do próprio Principia Mathematica de Russel e Whitehead, cuja lógica matemática já havia superado há algum tempo.

Além disso, o que está em jogo, certamente, passa pela concepção de verdade divergente entre Gödel e Wittgenstein. Podemos afirmar que, com base em suas concepções de verdade, ambos têm razão. Desta forma, o que caberia a nós seria tomar a escolha de qual concepção de verdade, em especial verdade matemática, aceitaríamos como adequada. De antemão, já adiantamos que não concordamos plenamente com a concepção de verdade realista de Gödel, por correspondência a uma realidade platonista da matemática nem com a verdade apresentada por Wittgenstein, de uma verdade puramente interna, estabelecida por coerência com o sistema. Acreditamos em uma concepção de verdade matemática que se dá internamente por coerência com o sistema adjacente e, portanto, de caráter sintático, mas que também possui um caráter externo, ligados a imaginação, estabelecido por construção (social), e intuição matemática, estabelecida por descoberta, a partir da experiência matemática.

5 O ENSINO DA MATEMÁTICA “LIMITADO” PELOS SEUS CONTEÚDOS

Não faz sentido discutir “ensino” sem discutir “aprendizagem”, esses termos andam juntos, pois ensinar faz referência a ensinar algo a alguém, no caso, àquele que aprende e ensinar também é um aprendizado. Remetendo novamente a pergunta de Platão: “a virtude pode ser ensinada?”, fazemos os seguintes questionamentos: “conceitos podem ser ensinados?”; “pode ser ensinado a pensar matematicamente?”, ou seja, conceitos e pensamento podem ser “traduzidos” na forma de conteúdos?

Desta maneira, iniciaremos discutindo o significado da palavra ‘aprender’. Na língua portuguesa, temos tanto a palavra ‘aprender’ quanto ‘apreender’. ‘Apreender’ faz referência à ação de pegar, capturar, enquanto que ‘aprender’ se refere à aquisição de conhecimento. Segundo Anders, *et al. (2001-2019)*, aprender vem do latim *apprehendere* composta pelos prefixos *ad* (para) e *prae* (antes) e pelo verbo *hendere* que significa ‘agarrar’, ‘prender’. Ou seja, apesar de estar ligado ao conhecimento, o termo ‘aprender’ traz a mesma ideia de ‘apreender’, como se o conhecimento fosse, de alguma forma, capturado ou preso.

Assim, podemos conjecturar que a etimologia da palavra ‘aprender’ já remete à ideia de ensino ligada a conteúdos enquanto matéria, onde “a noção original de ‘conteúdo’ aponta para algo que ocupa um “recipiente”, um “continente”, é uma ideia que traz uma conotação estática de um conhecimento pronto e delimitado.” (CIFUENTES, 2016, p.47) Desta forma, se entendemos “conceito” como algo dinâmico e não delimitado, não podemos pensar que ele ocupa um determinado “recipiente”, que está contido em algo, ou seja, não é um conteúdo e, se não é um conteúdo, não pode ser aprendido nem tão pouco ensinado (uma vez que estamos relacionando ensinar com aprender e aprender com prender).

Devemos esclarecer que, como dizemos anteriormente, para ensinar um conceito seria necessário defini-lo e, em certos casos, até podemos construir definições de conceitos com finalidades específicas, mas que estas definições não podem ser confundidas com o conceito em si, pois tratam-se de objetos filosóficos distintos, uma vez que uma definição não é capaz de capturar a dinamicidade de movimento e expansão que um conceito pode ter.

Cifuentes (2016) continua:

> (...) O ensino (técnico) de matemática baseia-se usualmente na apresentação do conhecimento na forma de conteúdos encaixotados ou encapsulados em didáticas e metodologias, base do currículo escolar. Os conteúdos, na medida em que trazem um conhecimento cristalizado, sistematizado, formalizado, são, então, colocados em disciplinas, em áreas, e se lhes atribui, quando colocados em textos "didáticos", o papel principal de informar e não necessariamente o de formar. (p.47)

Os números complexos, quando apresentados no Ensino Médio, são um bom exemplo para ilustrar essa situação, do ensino como sendo informativo e não formativo. Talvez, de todos os conhecimentos do Ensino Básico, seja o que mais desperte no educando a seguinte pergunta: "Para que isso *serve*?", e nossas respostas já tendem a dar uma *serventia* restrita a técnica, ou ao mercado de trabalho: Eles são utilizados no estudo da corrente elétrica, na análise de circuitos de corrente alternada, etc., ou seja, já restringimos o uso dos números complexos a "aplicações práticas". De fato, é importante que os educandos saibam onde determinado conhecimento é aplicado na sociedade atual, bem como no mercado de trabalho. O que rebatemos aqui é o ensino que se restringe à utilidade da matemática nas aplicações práticas, escondendo sua importância intelectual.

Do ponto de vista formativo, é conveniente uma melhor compreensão dos números complexos. Até então, tudo que o sujeito tinha por número era englobado pelos números reais, os quais permitem medir grandezas. Este era o seu mundo, o seu universo matemático. Mas, este mundo não dá conta de resolver todos os problemas, como encontrar a raiz quadrada de um número negativo. Então, o ser humano *cria* um novo universo, mais amplo, capaz de dar respostas a este problema, e o conceito de número se expande, o mundo matemático do sujeito aumenta e a *serventia* da matemática, do ponto de vista pedagógico[8], deixa de ser apenas técnica para ser um exemplo de que “limites” conceituais podem ser ultrapassados.

Modernamente, os números complexos não formam um conjunto qualquer que contém os números reais, eles mantêm suas propriedades algébricas, aritméticas e geométricas. Por exemplo, as operações adição e multiplicação entre dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ são:

i) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

ii) $z_1.z_2 = (a_1.a_2 - b_1.b_2) + (a_1.b_2 + a_2.b_1)i$

Assim, dois números reais r_1 e r_2 podem ser entendidos como os números complexos $z_1 = r_1 + 0i$ e $z_2 = r_2 + 0i$ e

$$z_1 + z_2 = (r_1 + r_2) + (0 + 0)i = r_1 + r_2$$
$$z_1.z_2 = (r_1.r_2 - 0.0) + (r_1.0 + r_2.0)i = r_1.r_2,$$

sendo, então, estas operações complexas, extensão das correspondentes reais.

Tal expansão nos permite resolver problemas reais no campo dos complexos, como, por exemplo calcular integrais reais via cálculo complexo, por meio de um resultado conhecido como Teorema dos Resíduos (CONWAY, 1978)

Outro exemplo importante é o Teorema Fundamental da Álgebra, que diz que todo polinômio *p(z),* com coeficientes complexos, de grau *n*, possui *n* raízes complexas (não necessariamente distintas). A busca pela demonstração do

[8] Do ponto de vista histórico, os complexos apareceram de forma um pouco diferente: se uma equação de grau 3 tem três soluções reais então a fórmula de Cardano precisa de raízes quadradas de números negativos, ou seja, já se fazia necessário “passar” pelos complexos, mesmo para encontrar raízes reais. O primeiro trabalho onde os complexos aparecem de forma mais clara é o livro *L’Algebra*, escrito originalmente em italiano por Rafael Bombelli (1526 - 1572) em 1572. Nesta obra, os complexos se fazem necessários justamente para formalizar melhor as contas que aparecem no caso de três raízes reais. Assim, trabalhar com os complexos foi uma *necessidade* para a evolução da matemática dos números "reais" (aqui em oposição aos "imaginários").

teorema levou a um grande desenvolvimento da matemática, uma vez que, apesar de ser um problema de cunho puramente algébrico, fez com que os matemáticos precisassem construir ferramentas avançadas de topologia, geometria e teoria de grupos para demonstrá-lo e, obviamente, tais ferramentas não possuem utilidade apenas para tal.

Da mesma forma, a busca pela demonstração do chamado Último Teorema de Fermat, que diz que a expressão $x^n + y^n = z^n$, com n natural, só possui solução $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ não trivial, para $n \leq 2$, também levou a um desenvolvimento importante da matemática. Tal teorema, que também é de cunho algébrico, precisou de ferramentas avançadas de Geometria Algébrica para sua demonstração, feita apenas em 1995.

Assim, os números complexos, mais do que uma informação, podem ser um meio para a formação criativa e emancipadora do educando, uma vez que são, então, um exemplo de resposta que o homem deu ao seu natural ímpeto de expansão epistemológica, ou seja, à sua necessidade de ampliar seu conhecimento e seu conhecimento sobre seus próprios conhecimentos, preenchendo lacunas conceituais, completando, complementando e, acima de tudo, criando seus saberes. Desta forma, os números complexos não são um mero conteúdo que apenas preenche o currículo quantitativamente, eles ampliam a noção de número mantendo suas propriedades aritméticas.

Faz-se necessário, aqui, esclarecer que não pretendemos desvalorizar o papel dos conteúdos na formação do conhecimento, nem mesmo diminuir a importância do ensino. Mas sim, trazer uma possibilidade de visão mais ampla de “educação matemática”, restringindo, mas sem desvalorizar, o ensino às técnicas, algoritmos e lógica, porém entendendo que a matemática possui um caráter que vai além disso, constituindo o “pensamento matemático” como algo que lida com conceitos matemáticos de forma dinâmica. Nesta visão, os conteúdos deixam de ser o fim, o objetivo final, e passam a ser um meio. Seria perfeitamente possível tomar outro caminho: o de expandir a ideia de ensino, englobando, de alguma forma, conceitos e pensamento matemático, mas consideramos esta opção um tanto quanto perigosa, pois, assim, poderíamos cair na armadilha de conceber o pensamento como algo técnico, sujeito a metodologias, o que pode ocasionar na perda de sua dinamicidade.

6 O PENSAMENTO MATEMÁTICO

Cifuentes (2016, p.49), em alusão à uma resposta de Albert Einstein ao físico Robert Thornton, nos dá a ideia de "floresta matemática". Thornton indagou Einstein, em 1944, sobre a importância da filosofia e história da ciência no ensino da física, Einstein respondeu que um conhecimento sem base histórica e filosófica seria como conhecer muitas árvores, porém nunca ter visto uma floresta. Cifuentes, nesse sentido, diferencia um ensino matemático baseado apenas em algoritmos, técnicas, lógica e demonstrações, colocados na forma de conteúdos, de uma educação matemática formadora do espírito e do pensamento matemático. Para tentar entender o que vem a ser o "pensamento matemático" ou o "pensar matematicamente" vamos começar pelo "pensamento numérico".

A contagem surge como invenção humana para controlar quantidades, por meio da relação biunívoca, como por exemplo, relacionando a quantidade de ovelhas de um rebanho com a quantidade de pedras em um saco. Não é muito diferente de quando utilizamos o ábaco associando quantidades para fazer operações matemáticas.

> A contagem, o ábaco e suas regras constituem o *cálculo manual*. Ele é a técnica operacional que o trabalho humano criou para controlar a quantidade da matéria incorporada ao processo produtivo como objeto de trabalho. O *cálculo manual* é a técnica que fornece a plataforma material, o real humano, para o desenvolvimento da linguagem matemática. (MOURA, *et al.,* 2016, p.280-281, grifos dos autores)

Moura, *et al.* (2016, p. 280-281) enfatizam que enquanto essa correspondência se mantiver no âmbito do concreto, ele não penetra na linguagem matemática, se mantém apenas como técnica, ou como algoritmo. Deste ponto de vista, em nosso entendimento, se mantém como conteúdo, que pode perfeitamente ser ensinado, mas ainda não constitui o pensamento numérico, que se dá pela "abstração" (p. 291). Ou seja, o pensamento numérico só se distingue da técnica de contagem quando o número se dá como um objeto matemático, isto é, abstratamente, que independe dos objetos concretos que representa. Também vale ressaltar que é importante compreender que o algarismo não é o número, apenas uma representação dele, ou o nome dele, e que, ao falarmos de “ensinar a técnica ou algoritmo” não estamos “rebaixando” o ‘ensinar’ a um nível de ‘treinar’, ou seja, puramente mecânico. Entendemos que este ensino/aprendizagem já traz aspectos cognitivos que vão além de um mero treino mecânico, mas, por si só, ainda não constitui o pensamento matemático, ainda não movimenta conceitos com a dinamicidade necessária para tal.

Os autores (MOURA, *et al.*) destacam que

> a linguagem técnica é a plataforma necessária para que se forme, com base nela, o pensamento numérico e a linguagem matemática. Mas ela, mesmo com sua cadeia operacional de simplificações sucessivas da contagem, *não constitui ainda pensamento numérico ou linguagem matemática.* (2016, p. 284, grifos dos autores)

Assim, a técnica, enquanto conteúdo, é ingrediente na formulação do pensamento matemático, mas ela, por si só, não é o suficiente para tal formulação. É importante destacar também que, apesar de ser imprescindível para a constituição do pensamento numérico, os algoritmos podem ser um empecilho para o entendimento do processo envolvido, principalmente quando o ensino de determinado algoritmo, em sua forma representacional, se antepõe ao cálculo manual e é desprovido de significado concreto no campo da contagem.

No caso das frações, em especial no ensino da adição ou subtração de frações com denominadores diferentes, quando a técnica é enfatizada (“calcula o mmc dos denominadores, divide pelo denominador, multiplica pelo numerador, ...”), pode-se esconder uma característica muito importante dos números racionais. Antes, com os números naturais, tinha-se uma unicidade representativa (fixando a base de numeração): um número é representado de uma única maneira (uma sequência de algarismos). Já nos números racionais positivos, cada número pode ser representado de maneira única[9], fixada uma base de numeração (no caso da base 10 é a representação decimal), embora haja muitas frações que têm mesma representação (decimal). Essas diversas frações são ditas equivalentes.

Por exemplo, o número *meio* pode ser representado pelas frações equivalentes *1/2, 2/4, 3/6, 4/8,* etc., mas só pode ser representado, na forma decimal, por *0,5* (ou *0,4999...*).

Pensando no significado das frações como proporção, há várias frações que respeitam a mesma proporção, representadas pela fração chamada reduzida, isto é, quando numerador e denominador não têm fator comum. E o mesmo vale para outros significados de frações (divisão, parte-todo, etc.). Assim, para somar ou subtrair frações com denominadores diferentes, podemos nos beneficiar dessa ideia para encontrar frações equivalentes às anteriores, mas que possuem denominadores iguais e, com isso, recaímos a um caso que já deve ter sentido para os educandos.

Entendemos que a noção de adição de frações com denominadores não necessariamente iguais (*a/b e c/d*), quando dada apenas pela expressão

$$a/b + c/d = (ad + bc)/bd,$$

ou na sua versão utilizando o mmc dos denominadores, é uma definição puramente algorítmica, uma vez que é apenas uma fórmula para adição de frações que, quando ensinada diretamente, desprezando sua gênese, pouco tem a contribuir para a liberação da imaginação e formação do pensamento matemático. Podemos resgatar algumas ideias relacionadas à adição de frações a fim de construir uma ou mais formas de somar frações. Para partir do “concreto”, pode-se utilizar duas frações como exemplo, digamos *1/3* e *1/4.* Assim, pode-se criar frações

[9] Na verdade, nos números racionais, mesmo com a representação decimal, fixada uma base de numeração, já é possível apresentar uma dubiedade de representação. Por exemplo, podemos representar o número 1 pela dízima periódica 0,999.... De qualquer forma, do ponto de vista pedagógico, em níveis mais elementares esta dubiedade costuma ser ignorada.

equivalentes a ambas, (a equivalência consiste em atribuir a ambas as frações um mesmo significado intuitivo, por exemplo na relação parte todo):

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{7}{21} = \frac{8}{24} = \frac{9}{27} = \frac{10}{30} = \frac{11}{33} = \frac{12}{36} = \cdots$$
$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24} = \frac{7}{28} = \frac{8}{32} = \frac{9}{36} = \frac{10}{40} = \frac{11}{44} = \frac{12}{48} = \cdots$$

e observando que podemos utilizar as frações com denominadores 12, 24, 36, ... para somarmos 1/3 e 1/4, como por exemplo

8/24 + 6/24 = 14/24 = 7/12 (= 4/12 + 3/12).

A partir daí os próprios educandos podem ser capazes, com o auxílio do educador, de *induzir o algoritmo* da soma de frações por meio das fórmulas citadas, e mesmo que não o sejam capazes, o ensino de tal definição (de adição de frações) terá sentido desde que o educador, ao ensiná-lo, enfatize essa ideia de substituir as frações por outras equivalentes. O educador, de alguma forma, seja por desenhos, *softwares* ou materiais manipuláveis, deve buscar uma maneira de contribuir para que o educando visualize tais frações e o porquê se faz necessário que os denominadores sejam iguais para poder realizar a adição (tal processo já deve ser previamente realizado com soma de frações com denominadores iguais, dando sentido à adição de frações). O educador também pode, ou deve, dar a oportunidade para que os educandos busquem criar outras técnicas.

Neste caso, o *definir* se torna uma ação, uma construção, uma forma de *experiência matemática*, uma vez que se dá por um processo, expandindo o conceito de soma de frações, que até então faria sentido apenas para frações com denominador comum, tendo o conceito de proporção como “ingrediente qualitativo” para tal construção.

Para o caso específico de definições em geometria, Cifuentes e Franco (2017, p. 10) diferenciam que as geometrias podem ser abordadas de forma “qualitativa” em contraponto a abordagens puramente “quantitativas”. Para exemplificar, partem da noção de distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Na versão “quantitativa”, a distância entre dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ é dada por

$$d(P,Q) = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}.$$

Esta é a distância euclidiana-pitagórica, que surge da definição de norma euclidiana de P, dada por

$$||P|| = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}.$$

Assim, entendemos que a distância entre P e Q se dá por

$$d(P,Q) = ||Q - P||.$$

Os autores (p. 11-12) discutem que a distância entre dois pontos pode ser apresentada “qualitativamente”, isto é, sem levar em consideração a fórmula específica de distância, mas sim, por exemplo, a partir da noção abstrata de distância. Em especial, uma definição qualitativa de norma, que dará origem a uma noção qualitativa de distância, seria a seguinte (p. 13-14):

Seja E um espaço vetorial real (que pode ser o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$). Para todo u, $v \in E$ e $t \in \mathbb{R}$, definimos uma norma em E como uma função $||\ \ ||: E \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

1. $||u|| \geq 0$;
2. $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
3. $||tu|| = |t|\ ||u||$;
4. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

Estes axiomas definem uma norma em E, a diferença neste caso é que, a partir deles, não temos apenas a fórmula euclidiana anterior que satisfaz tais propriedades em $\mathbb{R}^2$. Temos, em especial, as chamadas *p*-normas, definidas pela expressão

$$||P||_p = (|x_1|^p + |y_1|^p)^{1/p}.$$

Assim, se pensarmos na distância entre *P* e *Q* como a norma de *Q – P*, temos uma definição de distância diferente para cada *p:*

$$D_p(P,Q) = (|x_2 - x_1|^p + |y_2 - y_1|^p)^{1/p}.$$

Os autores defendem a utilização do *Software GeoGebra 3D* como recurso pedagógico para visualizar diversas figuras na geometria decorrente dessas normas, em particular, a "circunferência" planar dada a partir de cada *p*-norma, uma vez que a circunferência é definida como o conjunto de pontos de estão a uma mesma distância fixa de um ponto.

Se mudarmos nossa noção quantitativa de distância, ou seja, sua fórmula, a forma da circunferência passa a ser diferente também. Além disso, os autores (p. 22) "quebram o paradigma" de que π é um número fixo (3,14...), definindo-o qualitativamente como a razão entre o comprimento da circunferência e seu respectivo diâmetro, vendo-o assim como um resultado, dependendo apenas da norma tomada. Mais uma vez, mudando a fórmula para medir distância, muda-se o valor quantitativo de π, mas não muda sua forma qualitativa.

Desta forma, tem-se que

> o ensino da matemática na Educação Superior pode ou deve partir do concreto rumo ao abstrato visando o despertar, ou melhor, a liberação da imaginação no campo da matemática. Intuição e imaginação, então, fazem parte essencial de nossa concepção de matemática, uma concepção dinâmica, que considera a matemática como atividade, como

> forma de pensar, que incorpora também formas de argumentação que escapam ao puramente lógico-dedutivo. (CIFUENTES, FRANCO, 2017, p. 10)

George Pólya (1887 - 1985), notório matemático e educador, sem fazer diferenciação entre ensino e educação como sugerimos aqui, já destacava aspectos ligados à matemática que fogem à técnica:

> (...) o pensamento matemático não é puramente "formal", não está relacionado apenas com axiomas, definições e provas rígidas, mas também com muitas outras coisas: generalização a partir de casos observados, argumentos indutivos, argumentos a partir de analogia, reconhecimento de conceitos matemáticos, ou sua extração a partir de situações concretas. (PÓLYA, 1963, p.606)[10]

Para esse autor (1963), o conhecimento se constitui a partir de três fases: exploração, formalização e assimilação.

> A primeira fase, a exploratória, está mais próxima da ação e da percepção e desenrola-se a nível mais intuitivo, mais heurístico.
> A segunda fase, a da formalização, ascende a um nível mais conceitual, introduzindo terminologia, definições, provas.
> A fase de assimilação vem por último: ela implica a tentativa de perceber a "essência" das coisas. (...) Esta fase prepara o caminho para as

[10] Do original: (...) mathematical thinking is not purely "formal"; it is not concerned only with axioms, definitions, and strict proofs, but many other things belong to it: generalizing from observed cases, inductive arguments, arguments from analogy, recognizing a mathematical concept in, or extracting it from, a concrete situation.

> aplicações por um lado e para generalizações maiores pelo outro. (p.608-609)[11]

Percebemos, assim, que o concreto e o abstrato, dentro do pensamento matemático, se tornam relativos. O abstrato precisa ganhar certa “concretude intelectual”, penetrando no âmbito da intuição matemática para, a partir daí, dar origem à novas formulações. Pólya já entendia que, de certa forma, esta concretude se dá em um nível conceitual. Entendemos que tal formulação, em nível conceitual, se dá no âmbito da *imaginação*.

Moura, et al., (2016), diferenciando a contagem do pensamento numérico também destacam a importância da imaginação:

> A contagem gera a correspondência biunívoca, que, no cálculo manual, permanece no campo visual e no alcance do toque e, no cálculo escrito, permanece subentendida. O aspecto matemático (o pensamento numérico) não está na cadeia causal técnica que tem como pressuposto a contagem. Ele se faz no desenvolvimento algébrico que toma essa técnica e, com base nela, faz a sua abstração por meio da produção mental de vários modelos numéricos, tantos quantos forem necessários para a aplicação generalizada em todas as situações da vida. O número é o pensamento da quantidade abstraído de qualquer referência concreta. Ele resulta de um desenvolvimento da intuição até a produção de uma plasticidade imaginativa que captura instantaneamente as quantidades por meio de modelos mentais. Ao desenvolver essa imaginação, a mente

[11] Do original: A first exploratory phase is closer to action and perception and moves on a more intuitive, more heuristic level.

A second formalizing phase ascends to a more conceptual level, introducing terminology, definitions, proofs.

The phase of assimilation comes last: there should be an attempt to perceive the "inner ground" of things, (...) this phase paves the way to applications on one hand, to higher generalizations on the other.

> torna-se capaz de *pensar numericamente*, isto é, de aprofundar a técnica da contagem até a abstração *número.* (2016, p.304, grifos dos autores)

Assim, entendemos que a intuição ganha papel importante na formação do pensamento matemático, principalmente porque entendemos que, por meio dela, um conceito, que se dá abstratamente, ganha uma dinâmica especial, passando a ter certa concretude para a formação de outros objetos ou conceitos matemáticos. O número tem sua form*ação* pela abstração e, a partir daí, ganha certa substância, certa concretude, não física, mas sim intelectual. Esta é a chave para a formação do “pensamento algébrico”. Vamos exemplificar.

Moura, *et al.,* (2016, p.283) entendem o ‘cálculo’ como “a técnica de permanente simplificação do controle das quantidades”, por exemplo, a simplificação da contagem é a adição. Se contarmos os objetos em grupos iguais, ao juntarmos temos a multiplicação. A adição 4 + 4 + 4 pode ser simplificada como 3 x 4. Da mesma forma, a multiplicação também pode ser simplificada, dando origem a potenciação: 4 x 4 x 4 pode ser simplificada por 4^3.

A partir do momento em que a adição, a multiplicação e a potenciação ganham caráter abstrato, que o pensamento matemático movimenta, ou seja, são operações numéricas que independem de objetos concretos, apenas do “objeto abstrato” ‘número’, pode-se olhar para as relações entre estes objetos e as operações, surgindo, assim, propriedades como:

1) $a^m.a^n = a^{m+n}$
2) $a^m.b^m = (a.b)^m$

onde *a*, *b*, *m* e *n* são números naturais, pois ainda remetem a ideia de contagem.

Com base nessas propriedades, e na definição de raiz quadrada de um número, podemos também, tentando uma reconstrução racional, representar uma raiz por potências fracionárias e expandimos o nosso conceito de multiplicação também para números irracionais.

A saber, se quisermos representar $\sqrt{a}$ por uma potência, digamos a^m e que as propriedades anteriores ainda valessem nesta situação, teríamos pela propriedade (1), como $\sqrt{a}.\sqrt{a} = a$, que $a^m.a^m = a^{m+m} = a^{2m} = a^1$ e, portanto, *m* deve ser *1/2.*

Assim, pela propriedade (2), temos que $\sqrt{a}.\sqrt{b} = a^{1/2}.b^{1/2} = (a.b)^{1/2} = \sqrt{a.b}$.

Desta forma, podemos dizer que $\sqrt{2}.\sqrt{3}$ é igual a $\sqrt{6}$.

Generalizando, se definimos $\sqrt[n]{a}$ como o único número real positivo tal que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Por definição temos que $\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$ e, para $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ e $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$, pela propriedade (2), temos que $\left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$. Daí, $\left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{ab}\right)^n$ e $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. Veja que, para este raciocínio, não precisamos da propriedade (1). Para tal, nos apoiamos em um resultado: a função *f(x)* = x^n, com domínio nos reais não-negativos, é bijetora sobre os reais não-negativos.

Note que essa multiplicação ($\sqrt{2}.\sqrt{3}$) não faria o menor sentido no âmbito da contagem, não tem como ter “raiz de duas parcelas de raiz de três objetos”. No entanto, quando o número passa a ganhar certo caráter concreto intelectual, por meio da intuição, podemos generalizar definições, propriedades e formar novas abstrações.

O pensamento algébrico tem isso como premissa. Os objetos “concretos” da álgebra já são os números abstraídos de qualquer objeto concreto. Um anel é uma estrutura algébrica que generaliza os números inteiros, não pelo que podem representar, mas sim pelas suas propriedades. Assim, novos conhecimentos se formam e, por consequência, novos objetos matemáticos, como quocientes algébricos ($\mathbb{Z}_p$), múltiplos de um inteiro *m* qualquer ($m\mathbb{Z}$); conjuntos de matrizes quadradas de mesma dimensão ($M_n(\mathbb{R})$), etc. (enquanto anéis).

Da mesma forma, embora não seja simples distinguir ou caracterizá-los, há o pensamento geométrico, aritmético, estatístico, entre outros. No entanto, acreditamos que os exemplos citados já ilustram a dinâmica do pensamento matemático, constituído por um vai-e-vem de abstração, concretização, aprimoramento da intuição, generalização, etc., como apontado por Pólya (1962-64) e Moura, *et. al.* (2016), todos eles atos de experiência matemática.

7 A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA COMO FONTE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De acordo com Anders, *et al. (2001-2019),* a palavra ‘educar’ vem do latim *ducere,* que significa “guiar”, “conduzir”, juntamente com o prefixo *ex,* que significa “fora de”, “a partir de”. Portanto, podemos entender “educar” como “guiar para fora”. Esse é um dos aspectos que, de alguma forma, diferencia ensino, como sugerimos vê-lo anteriormente, de educação. Enquanto ensino está ligado à aprendizagem e, portanto, a prender, se dá como um movimento “de fora para dentro”, já educar está relacionado a soltar, libertar, emancipar, isto é, como um movimento “de dentro para fora”.

Assim, se vemos que o ensino compete aos conteúdos e às definições, conforme discutimos na seção anterior, a educação o complementa, referindo-se aos conceitos e ao pensamento, tendo, assim, um caráter mais dinâmico. Desta forma, a educação pressupõe o ensino, mas não se reduz a ele.

Voltando à nossa questão inicial, podemos dizer que os conceitos e o pensamento matemático não podem ser ensinados, pois não se limitam a conteúdos. Mas aí entram novos questionamentos: Conceitos podem ser assunto de educação, no sentido dado acima? Mais ainda, podemos educar a pensar matematicamente? Como?

Enquanto podemos ensinar um conteúdo a alguém, o termo ‘educar’ já é direto a alguém: podemos educar alguém, e não educar algo a alguém. Portanto, enquanto o ensino remete ao *objeto de ensino*, que é o conteúdo a ser ensinado, a educação remete ao *sujeito da educação*, o educando.

Desta maneira, ao invés de termos o conteúdo no centro da discussão sobre educação, colocamos o educando nesta posição. Enquanto antes pensávamos em como (com quais técnicas) ensinar determinado conteúdo, e esse ensino se daria normalmente por definições, exemplos e problemas práticos para atribuir significado ao conteúdo para que os sentidos se façam nele, agora, além disso, pensamos em como utilizar tal conteúdo para a formação do pensamento matemático, ou seja, quais são as características epistemológicas e sociais por trás de tal conteúdo que podem, de alguma forma, contribuir para a formação do pensamento matemático e formação intelectual e humana do educando.

É evidente que não traremos aqui receitas ou técnicas para uma educação envolvendo conceitos ou aprimorando o pensamento matemático, pois esta seria uma contradição com o nosso próprio entendimento de conceito e pensamento matemático, mas pretendemos iniciar uma discussão que possa, futuramente, apontar direções e abrir novos diálogos para o que pode se constituir como uma ideia de educação matemática que transcende o ensino de matemática, salientando a criação e descoberta matemáticas, a formação e transformação de conceitos, definições, teoremas, etc. com ênfase na imaginação, intuição e visualização, assim como processos de abstração, generalização, analogia e formalização matemática, constituídas de forma dinâmica, são manifestações de uma "experiência matemática", entendendo que não há tal experiência sem a dinamicidade subjacente ao pensamento matemático.

Cifuentes (2016, p. 49), emulando a discussão de Platão sobre a possibilidade do ensino da virtude, aponta que "os valores, parte essencial da floresta do conhecimento, não podem ser ensinados como seria o caso dos conteúdos, pois envolvem atitudes, ações, e não apenas conhecimentos prontos". O autor aponta que a noção de conteúdo matemático, vistos como algo pronto, do ponto de vista pedagógico,

> não permite incorporar diversos aspectos da floresta matemática, como os aspectos epistemológicos, estilísticos, etc., os quais envolvem atitudes de pensamento e visões de matemática, aspectos que não podem ser ensinados como os conteúdos os são, porque os atravessam em forma transversal. (CIFUENTES, 2016, p. 49)

Desta forma, vemos que alguns aspectos relacionados à matemática devem ser encarados como atos ou atitudes. Por exemplo, "provar" deve refletir uma atitude de *emancipação*, não apenas no sentido de já procurar provar a veracidade, mas no sentido de duvidar da veracidade, de questionar se aquilo que é apresentado de fato é verdadeiro; é procurar primeiramente o próprio convencimento e posteriormente o convencimento do outro. “Conjecturar” deve refletir uma atitude de *liberdade*, de criatividade, de investigação de propriedades, formulação de hipóteses, testes, etc. “Definir” deve ser consequência de uma atitude de *responsabilidade* pois está ligado a dar limites, amarrar, fechar, e essas amarras exigem a responsabilidade de representar adequadamente, um conceito que é dinâmico. Da mesma forma, “formalizar” deve decorrer de uma atitude de *socialização*, uma vez que formalizar é dar uma forma, não uma forma cristalizada, incontestável e absoluta, mas uma forma aceita por uma determinada sociedade como adequada.

Esta concepção de considerar aspectos ligados à matemática como atitudes vem ao encontro com o que defende Cifuentes (2010, p. 18), o qual destaca que, na construção do conhecimento, “mais importante que a consolidação de uma resposta é a elaboração, como movimento, de uma pergunta (...)” e continua:

> No método científico, nos padrões positivistas, a formulação de perguntas muitas vezes se traduz na elaboração ou criação de hipóteses ou conjecturas; elas são, na realidade, respostas provisórias, ocultando sua condição mais dinâmica de pergunta.
> No método científico, a palavra ‘método’ refere a regras que visam a resolução de um problema. No método científico as regras são gerais, porém, não substituem a imaginação, a intuição e a criatividade do cientista, capacidades estas de natureza individual. (CIFUENTES, 2010, p. 18)

Cifuentes (2016), destaca que além das ideias, se faz necessário observar a sua movimentação e a dinâmica do conhecimento, promovendo e desenvolvendo a imaginação, a sensibilidade, a intuição e aprimorando a criatividade no campo da matemática por meio de diversas formas de pensamento e raciocínio matemáticos, “como o pensamento avançado, o pensamento elementar, o pensamento visual” (p. 50) e formas de argumentação, como o raciocínio dedutivo, a indução, a abdução e a analogia, ligadas à intuição e imaginação.

Entendendo o caráter dinâmico de um conceito, não podemos falar em aprendê-lo, mas certamente pode haver um primeiro contato com ele, onde há uma formulação, mas já destinada a ser reformulada e movimentada constantemente. A nossa própria linguagem já nos trai quando temos que falar de *o conceito,* pois ela nos dá a impressão de que estamos falando de algo já pronto e acabado, mas não é isso que entendemos por conceito.

Tendo esse primeiro contato, podemos falar na evolução de um conceito, não em um sentido de atribuição de valor, querendo "torná-lo melhor", mas com a ideia de expandi-lo, (des)envolvendo-o (ou seja, abstraindo-o tirando o envolvimento deste conceito com outros conceitos, definições, objetos que constituem sua gênese, olhando para ele de forma isolada) e também o envolvendo com outros conceitos e outros objetos.

Acreditamos que tanto a formação de conceitos matemáticos, enquanto ações, quanto o próprio pensamento matemático são formas da *experiência matemática,* onde essa experiência pode ser entendida como uma vivência com a matemática, em um processo dinâmico de construção, desconstrução e reconstrução, descoberta e redescoberta, elaboração e reelaboração do feito, do concluído provisoriamente.

Não cabe, pelo discutido anteriormente, uma definição de "experiência matemática", pois a temos como um conceito e, portanto, em evolução, não podendo ser limitada. No entanto, já podemos considerar que uma experiência matemática deve se contrapor à "simples" aquisição de 'informação matemática'. Em uma experiência estamos em movimento, nos valendo dos nossos múltiplos sentidos, tendo por primado a percepção das coisas para com ela avançar, o que diferencia experiência de sensação.

A fim de ilustração, discutiremos o Teorema do Isomorfismo no caso da Teoria de Grupos[12]. Basicamente, o teorema consiste em dizer que, se *f* é um

[12] O Teorema do Isomorfismo aparece em diversas teorias da Álgebra, como Teoria de Anéis, Teoria de Grupos, Teoria de Álgebras e Módulos, dentre outras. A diferença em cada um dos casos é apenas a estrutura algébrica em questão e as operações envolvidas, mas a essência do teorema é a mesma.

homomorfismo entre dois grupos *G* e *H*, então o quociente de *G* pelo núcleo de *f* é isomorfo à imagem de *f*, isto é,

$$G/_{Ker(f)} \simeq Im\,(f)$$

Normalmente este teorema é apresentado através de uma afirmação (ou proposição), na sequência é provado (formalmente) e, logo em seguida, os livros apresentam exemplos de aplicações e consequências do teorema.

Esta abordagem esconde a historicidade por trás do teorema e sua gênese. Um processo de experiência matemática *poderia* se dar pelo seguinte questionamento: dado um homomorfismo *f* entre dois grupos *G* e *H*, como posso “transformá-lo” em isomorfismo?

Pode parecer banal, mas o simples fato de, ao invés de trazer uma verdade pronta (ou seja, um teorema, que já é pré-estabelecido como verdadeiro, faltando apenas “apresentar” a prova), fazer uma pergunta, já pode despertar atitudes, questionamentos e reflexões, afinal, segundo Cifuentes (2010):

> O ponto de vista crítico incorpora o qualitativo na construção do conhecimento e põe em evidência suas características dialéticas e dinâmicas. Mais ainda, desse ponto de vista constatamos que, mais importante que a consolidação de uma resposta é a elaboração, como movimento, de uma pergunta. (p. 18)

Nesse caso, para um homomorfismo ser “transformado” em isomorfismo, ele deve ser “transformado” em injetor e sobrejetor. Torná-lo sobrejetor é fácil, basta restringir o contradomínio à imagem do homomorfismo (a imagem de um homomorfismo é um grupo). Para ser injetor teríamos que ter elementos distintos do domínio sendo levados em elementos distintos do contradomínio. Poderíamos simplesmente “jogar fora” elementos do domínio cujas imagens se repetem, mas nesse caso o domínio poderia deixar de ser um grupo a menos que se redefina a operação correspondente. Daí que surge a ideia de criar uma relação de equivalência para identificar elementos que têm a mesma imagem, isto é:

$$a \equiv b \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Assim, surge um novo conjunto, o conjunto dado pelas classes de equivalência formadas, este conjunto, que tem a estrutura algébrica de grupo, é o chamado' conjunto quociente'

$$G/_{\equiv} = \{[g]_{\equiv}, g \in G\},$$

onde

$$[g]_{\equiv} = \{h \in G, f(h) = f(g)\}.$$

Desta forma, a aplicação *f*, definida agora no quociente (usando a mesma letra *f* por simplicidade), por *f(*$[g]_{\equiv}$ *)* = *f(g)* está bem definida, pois, para cada *h* ∈ *G,* elemento de $[g]_{\equiv}$, temos que *f(h)* = *f(g)*, ou, em outras palavras, a aplicação não depende do representante escolhido da classe.

Assim, elementos que possuem mesma imagem formam uma mesma classe e o homomorfismo definido no quociente é injetor. No entanto, como *f* é homomorfismo, temos que

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(a)f(b)^{-1} = e \Leftrightarrow f(ab^{-1}) = e$$

Daí decorre que

$$a \equiv b \Leftrightarrow a \equiv_{Ker(f)} b.$$

Onde, $a \equiv_{Ker(f)} b$ significa que $ab^{-1} \in Ker(f)$, que corresponde a "equivalência" módulo o subgrupo normal $Ker(f)$.

Na equivalência anterior, aparecem duas relações de equivalência, a primeira dando origem ao quociente

$$f: {}^{G}/_{\equiv} \rightarrow Im\,(f),$$

Enquanto a segunda dá origem ao quociente

$$f: {}^{G}/_{\equiv_{Ker(f)}} \rightarrow Im\,(f),$$

que abreviamos por

$$f: {}^{G}/_{Ker(f)} \rightarrow Im\,(f).$$

Daí, dado que, por construção, $f: {}^{G}/_{\equiv} \rightarrow Im\,(f)$ é injetora, teremos que $f: {}^{G}/_{Ker(f)} \rightarrow Im\,(f)$ também o é, de onde segue o teorema.

Note que o processo anterior não deve ser tomado como a demonstração lógica do teorema, se não como o processo construtivo da verdade da proposição como resposta à pergunta anterior que motiva o teorema.

Não estamos dizendo aqui que o explicitado anteriormente, se visto por um educando de teoria de grupos, o levaria à uma "conceitualização" do Teorema do Isomorfismo ou ao aprimoramento do pensamento matemático. O que estamos dizendo é que, se o educador procurar, de alguma forma, questionar seus educandos sobre o objetivo deste teorema, que é a tentativa de "transformar" um homomorfismo em isomorfismo, a investigação para responder tal pergunta *pode* se constituir para o sujeito como uma experiência matemática que também pode, inclusive, levar a outros questionamentos e talvez até a outros teoremas, enquanto que o simples enunciar e demonstrar o teorema, por si só, tem apenas caráter lógico informativo e restrito ao conteúdo específico.

Esse caráter lógico informativo esconde não apenas a gênese do teorema, se não, também, sua importância para a matemática em seu processo de abstração, processo que, a partir do século XIX, trata a essência dos objetos apenas pela sua forma e não pelo seu conteúdo. A esse respeito, Cifuentes relata que:

> (...) a nova Matemática não trata com objetos e sim com relações entre os objetos. Essa postura já foi pré-anunciada por David Hilbert quando afirmava que na geometria moderna tanto faz falar de pontos, retas e planos quanto de mesas, carteiras e canecas de cerveja, o importante são as relações entre esses objetos. Essa nova ontologia é a base da moderna visão estruturalista da Matemática, visão que permeia o século XX. (2012, p. 160)

Ter a visão de que um conceito deve ser totalmente dominado, aprendido plenamente por uma pessoa, é mais do que um equívoco acerca do próprio conceito de conceito. No caso da matemática, é a transmissão falsa de que ela é algo "celestial", inabalável, inquestionável e eterna. É jogar fora todo o processo de construção intelectual humana. Mais do que propor o conhecimento de conteúdos matemáticos, a educação matemática pode e deve ser um meio formativo e transformativo de um cidadão flexível, sensível, criativo e questionador.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De forma alguma podemos pontuar considerações finais deste trabalho. Até porque, em momento algum, tivemos por objetivo dar respostas prontas ou tirar conclusões assertivas de algo. Talvez o título mais adequado para este capítulo fosse “Considerações Iniciais”. Não buscamos de forma alguma trazer verdades ou correções aqui, mas buscamos abrir diálogos, e nesse sentido, acreditamos que fomos bem-sucedidos.

Buscamos trazer um ponto de vista no qual traçamos limites para o ensino da matemática e que, naturalmente remonta a uma ideia de educação matemática que contemple aquilo que o ensino, tal como posto, não dá conta.

Mais uma vez, não queremos ser incisivos, dizendo *o que é* ensino de matemática tal como colocamos (limitado). Mas acreditamos que, dessa forma, mesmo que o leitor não concorde com essa visão, tenha se sentido incomodado de alguma maneira e tenha se colocado a pensar sobre coisas que talvez antes não desse tanta atenção.

Além do mais, acreditamos que esse trabalho pede por novos esclarecimentos, novos exemplos, subsídios para uma conceitualização de experiência matemática. Em especial, se faz necessário aprofundar mais o que entendemos por “experiência matemática”, pois aqui apenas apontamos para uma noção de experiência matemática, porém não nos aprofundamos tanto quanto gostaríamos, mas abrimos a porta para assim fazê-lo em trabalhos futuros.

Da mesma forma, aqui apenas apontamos para a direção e damos início a discussões sobre *como* e *onde* se dão os processos de experiência matemática, mas entendemos que o *definir*, o *provar*, o *conjecturar*, o *formalizar*, tal como colocamos, como atitudes, precisam de mais esclarecimentos e principalmente exemplos. Também temos a intenção de abordar isso em trabalhos posteriores com a devida atenção.

Também surgem inevitáveis perguntas a luz do discutido: No que se difere a formação de um professor de um educador? É possível pensar na formação de um educador matemático que traga aspectos fundamentais do que discutimos? O que temos em nossas instituições de ensino é de fato educação ou “apenas” ensino?

Enfim, tantas outras perguntas surgem, mas não é isso o que mais importa nesse momento. O que importa é mostrar que esse trabalho pode abrir diálogos com diversas áreas, como formação de educadores, currículo e políticas públicas. Esperamos que esse texto possa levar pesquisadores em educação matemática de diversas áreas a reflexões e diálogos novos, mas que, principalmente, possa contribuir com a formação de educadores matemáticos de qualquer nível de ensino.

9 REFERÊNCIAS

ANDERS, Valentín e múltiplos colaboradores. **Etimología de aprender.** Etimologías de Chile. (2001 – 2019). Disponível em: < http://etimologias.dechile.net/?aprender >. Acesso em: 21 de jul. de 2019.

ANDERS, Valentín e múltiplos colaboradores. **Etimología de educar.** Etimologías de Chile. (2001 – 2019). Disponível em: < http://etimologias.dechile.net/?educar >. Acesso em: 21 de jul. de 2019.

ARISTÓTELES. **Metafísica**. Tradução: Leonel Vallandro. Porto Alegre: Globo, 1969.

BACHELARD, Gastón. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Tradução Esteia dos Santos Abreu. - Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. 316 p.

CIFUENTES, José Carlos. **Do Conhecimento Matemático à Educação Matemática: Uma "Odisséia Espiritual"**. In CLARETO; Sônia Maria, DETONI, Adlai Ralph; PAULO, Rosa Monteiro (org.) Filosofia, Matemática e Educação Matemática. Florianópolis (SC), v. 11, Ed. Filosofia da Educação Matemática, Juiz de Fora: Editora UFJF, p. 13-31, 2010.

CIFUENTES, José Carlos. **A Matemática elementar de um ponto de vista superior: uma contribuição ao "Projeto Felix Klein" para o ensino de Matemática na formação inicial de professores**. In CURY; Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto (org.) Formação do professor de matemática: Reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul: Editora IPR, p. 145-182, 2012.

CIFUENTES, José Carlos. **Dos conteúdos de ensino à dinâmica do conhecimento: uma aventura pedagógica na "Floresta Matemática"**. REVEMAT. Florianópolis (SC), v. 11, Ed. Filosofia da Educação Matemática, p. 46-65, (nov.) 2016.

CIFUENTES, José Carlos; FRANCO, Valdeni Soliani. **O Pensamento Geométrico no Ensino Superior e o Despertar da Imaginação**. Rivista UNIÓN, n. 50, 2017. (p. 09-28)

CONDE, Mauro. Ciência e Linguagem: Fleck e Wittgenstein. In: CONDE, Mauro (org.) **Ludwik Fleck**: estilos de pensamento na ciência. Belo Horizonte: Fino Traço, 2012. (p.77-108)

CONWAY, John Bligh. **Functions of One Complex Variable** (Graduate Texts in Mathematics - Vol 11) (v. 1). Springer: 2nd Edition. 330 p. 1978

ENCICLOPEDIA Britânica. São Paulo: **Encyclopaedia Britannica do Brasil**, 1995. p. 897-906. 6V.

JOURDAN, Camila. **As Observações De Wittgenstein Sobre O Teorema De Gödel**. Philósophos, Goiânia, v.18, n. 2, p. 61-104, jul./dez. 2013

LAKATOS, Imre. **Provas e Refutações:** A lógica da descoberta matemática. Rio de Janeiro. Zahar Editores, 1978.

LAKATOS, Imre. **Matemática, ciência y epistemologia**. Versão espanhola de Diego Ribas Nicolás. Alianza Editorial, 1987.

MOLINA, Jorge Alberto. **Lakatos como filósofo da matemática**. Episteme, Porto Alegre, n. 13, p.129-153, jul./dez. 2001.

MOURA, Anna Regina L. de; LIMA, Luciano Castro; MOURA, Manoel Oriosvaldo de; MOISÉS, Roberto Perides. **Educar com a Matemática:** Fundamentos.1. ed. – São Paulo: Cortez, 2016.

PLATÃO. **Mênon**. Texto estabelecido e anotado por John Burnet; tradução de Maura Iglésias. Rio de Janeiro. Ed. PUC-Rio; Loyola 2001. 117p.

PÓLYA, George. **On Learning, Teaching and Learning Teaching.** The American Mathematical Monthly, Vol. 70, No.6 (Jun.- Jul., 1963), 605-619

SILVA, Gustavo Augusto Fonseca. **Observações sobre a filosofia da matemática de Ludwig Wittgenstein**. Griot: Revista de Filosofia, Amargosa/Bahia, v.11, n.1, p.97-113, junho/2018.

SNAPPER, Ernst. **As Três Crises da Matemática: o Logicismo, o Intuicionismo, e o Formalismo.** Tradução de J. P. de Carvalho. Humanidades, v. 2, n. 8, p. 85-93, jul/set. 1984.

VIANNA, Carlos R.; CURY, Helena N. **Ângulos: uma "História" escolar**. Revista História & Educação Matemática, v. 1, n. 1, p. 23-37, 2001.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas**. Tradução Marcos G. Montagnoli. 9ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes; Bragança Paulista, SP: Editora Universitária São Francisco, 2014

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Remarks on Foundations of Mathematics**. Edited by G.H.von Wright, R. Rhees and G. E. M. Anscombe. Translated by G. E. M. Anscombe. Oxford: Blackwell, 1967.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tractatus Logico-Philosophicus**. Tradução Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1994.