UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA

ALESSANDRA HENDI DOS SANTOS

Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização

CURITIBA, 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA

ALESSANDRA HENDI DOS SANTOS

Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática, no curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes.

CURITIBA, 2014

Santos, Alessandra Hendi dos
Um estudo epistemológico da visualização matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização / Alessandra Hendi dos Santos. – Curitiba, 2014.
97 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática.
Orientador: José Carlos Cifuentes
Bibliografia: p. 90-97

3. Matemática - Estudo e ensino. 2. Visualização. 3. Geometria. I. Cifuentes, José Carlos. II. Título.

CDD 510.7

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA

P A R E C E R

Defesa de Dissertação de **ALESSANDRA HENDI DOS SANTOS**, intitulada **"UM ESTUDO EPISTEMOLÓGICO DA VISUALIZAÇÃO MATEMÁTICA: O ACESSO AO CONHECIMENTO MATEMÁTICO NO ENSINO POR INTERMÉDIO DOS PROCESSOS DE VISUALIZAÇÃO"** para obtenção do Título de Mestra em Educação em Ciências e em Matemática.

De acordo com o Protocolo aprovado pelo Colegiado do Programa, a Banca Examinadora composta pelos professores abaixo-assinados arguiu, nesta data, a candidata acima citada. Procedida a arguição, a Banca Examinadora é de Parecer que a candidata está **apta ao Título** de **MESTRA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA**, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIAÇÃO
Prof. Dr. José Carlos Cifuentes (orientador)		APROVADA
Profª. Drª. Cláudia Regina Flores	Cláudia Flores	APROVADA
Profª. Drª. Elen Andrea Janzen Lor	Elen Andrea Janzen Lor	APROVADA
Profª. Drª. Ettiène Cordeiro Guérios	Ettiène Guérios	Aprovada

Curitiba, 25 de Agosto de 2014.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
1912
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
Coordenação de Pós-Graduação

Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Educação em Ciências e em Matemática

Por todo amor, carinho, compreensão, companhia e paciência, Anderson Luiz Carvalho e Eider Cristina.

AGRADECIMENTOS

Meu companheiro Anderson e minha família pelo apoio, carinho, incentivo e por compreender minha constante ausência.

Meu querido orientador Dr. José Carlos Cifuentes, pelos inesquecíveis momentos de reflexões, pelos desafios propostos, pela paciência e confiança.

As professoras Dra. Claudia Regina Flores, Dra. Ettiene Cordeiro Guerios e Dra Elen Andrea Janzen pela aceitação em comporem a banca examinadora desse trabalho e pelas contribuições desde o exame de qualificação.

À Professora Dra. Luciane Mocrosky, por sua atenção e contribuição.

Aos meus colegas da Escola Municipal Papa João XXIII e Cel. Durival Britto e Silva.

Aos meus colegas de mestrado, Lucila, Luciane, Diego, Brunna, Nelem, Marcio, Suellen, Rosane, Henrique, Sheila pelas inúmeras trocas de experiências.

A minha companheira de caminhada Luciane Chyczy, por compartilhar os melhores momentos dessa empreitada.

A minha querida amiga Nelem Orlovski, pelo apoio, incentivo e pelas inúmeras revisões dedicadas a esse trabalho.

Aos professores Dr. Emerson Rolkouski e Dr. Carlos Roberto Vianna pelas contribuições e ensinamentos.

"A visualização é uma forma de experiência, sendo uma de suas funções a construção de significados e, principalmente, de sentidos, é um ato de interpretação".

José Carlos Cifuentes

RESUMO

Essa pesquisa tem como proposta compor um solo investigação e reflexão sobre o papel da visualização, no intuito de tornar visíveis aspectos do conhecimento matemático. A metodologia adotada é de natureza teórica, para isto, buscamos na literatura pesquisas que contribuam para a reflexão sobre as relações entre visualização, pensamento matemático e conhecimento matemático. Com o objetivo de investigar o modo como a visualização colabora para a compreensão e possível construção dos conceitos matemáticos, adotamos como questão norteadora desse trabalho: Como a visualização exerce um papel de atribuição da concretude na elaboração e aquisição do conhecimento matemático? Portanto, abordaremos temas que direta ou indiretamente se relacionam com o que pretendemos desvelar sobre a visualização, como por exemplo: geometria, raciocínio visual, pensamento visual, intuição, abstração, percepção entre outros.

Palavras-chave: Educação Matemática, Visualização, Geometria, Pensamento Matemático, Pensamento Visual, Intuição, Analogia.

ABSTRACT

This research has as its proposal to compose an investigation and reflex over the visualization matter, to the object of making the mathematics knowledge aspect visible. The adopted methodology is of theoretic nature, to such, we surveyed the research literature that contributed to this reflection over the relations of visualization, math thinking and math knowledge. Under the purpose of investigate the way the visualization contributes to the comprehension and the possible construction of the mathematics concepts, we adopted as a north: How can visualization play an attribution purpose to the concrete elaboration and acquisition of mathematic knowledge? Therefore, we offer subjects that directly and indirectly relate with what we intend to reveal over the visualization, as an example: geometry, visual thinking, visual thought, intuition, abstraction, perception among others.

Key words: Mathematic Education, Visualization, Geometry, Mathematic Thinking, Visual Thinking, Intuition, Analoly.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, muitos trabalhos como os de Cifuentes (2003, 2005, 2010, 2011, 2013), com sua abordagem estética e qualitativa da matemática, Flores (2007, 2010, 2012), apresentando o conceito de visualidade no lugar da visualização, Buratto (2012) colocando em prática o termo visualidade ao estudar a obra de Dürer. Janzen (2011), apresentando a tecnologia computacional como forma de movimentar as imagens, remetem o ensino de matemática à construção de significados, à concretude do pensamento, à realidade. Por sua vez, a visualização, como um dos modos de dar suporte a uma compreensão ampla da matemática, tem sido discutida em pesquisas neste âmbito e se mostrado um estudo importante para se repensar esta compreensão do ponto de vista de um ensino mais comprometido com a construção conceitual em desfavor a uma instrumentalização algorítmica. No capítulo 1, trataremos de mencionar algumas concepções sobre a visualização, sendo uma delas a de concretização, ou seja, concretizar um conceito, seja abstrato ou não, dando-lhe forma, movimento, trazendo-o para o mundo da nossa intuição

O ensino de matemática vem sofrendo modismos apoiados num modo de pensar engessado, estagnado, no qual os estudantes apenas seguem o modelo, não questionando ou constituindo sua autonomia de pensamento.

As causas desta forma engessada podem estar relacionadas com a formação dos professores, a utilização exclusiva e ingênua dos livros didáticos e, principalmente, uma concepção da matemática como uma ciência rígida, totalmente lógica e algorítmica. Constata-se então, segundo Lorenzato (1995), que o ensino de matemática tem imprimido aos alunos o papel de aritmetização do raciocínio[1], negligenciando-se o lado sensível da matemática, mais perto da intuição e da imaginação que da lógica.

Com essas questões nos lançamos neste estudo, que objetiva investigar o modo como a visualização colabora para a compreensão e possível construção dos conceitos matemáticos, a refletir sobre o pensamento matemático do ponto de vista

[1] Consideramos, nesse contexto, por aritmetização do raciocínio a forma engessada de se ensinar e aprender matemática, embasada apenas na utilização de números, da lógica, do método (em que se utiliza de uma sequência de passos para resolver determinado problema). (LORENZATO, 1995)

epistemológico, enfatizando o processo de visualização como modo de se alcançar o conhecimento matemático.

Para isto adotamos a pesquisa de natureza teórica, em que pretendemos desconstruir para reconstruir. A base para a desconstrução se fundamenta na leitura de pesquisas, a procura por textos que nos instiguem a criar novos questionamentos, formular novos problemas e novas concepções, ou seja, o objetivo não é buscar respostas, mas sim perguntas. Os textos estudados tendem a nos auxiliar para o esclarecimento de termos utilizados, tais como: intuição, analogia, imaginação, estética, etc., não somente com o intuito de reflexão e discussão, mas também como forma de construir novas significações, como as que veremos na seção 1.3: visualização algorítmica, geométrica e contextualizada.

A construção de nossa linha de pensamento se inicia no entendimento do conceito de visualização, para algo que vai além do que os olhos podem ver. Após isso, apresentamos novas significações à visualização, como a visualização geométrica relacionada com a argumentação pela geometria. Embasados na leitura de Bachelard (2011, original 1938), discutiremos na sequência sobre o obstáculo da experiência primeira, em que faz-se importante salientar o risco do uso ingênuo da imagem.

Com a estrutura formada, no que se refere à concepção de visualização, as novas significações por nós construídas e o entendimento sobre os obstáculos epistemológicos, chegaremos na discussão, senão à mais ousada à mais “aventurada” sobre a cientificidade da visualização. Como ela é ou não considerada científica, tanto na sua forma de argumentação como na sua forma de pensamento. Para isso, percorremos, através de exemplos, os primórdios de Euclides, em que a visualização era considerada como forma de raciocínio legítimo, até chegarmos na abstração da geometria analítica.

Entendemos que a geometria tem papel primordial para o processo de visualização, por isso estudaremos alguns episódios de seu desenvolvimento desde os gregos até a geometria considerada não euclidiana.

A intuição como forma de acessar o pensamento matemático, o pensamento visual e o raciocínio visual, são conceitos que pesquisaremos a fim de entender como a visualização se concretiza e alimenta a intuição. Analisaremos o conceito de ‘analogia’, caracterizada por nós como uma forma de visualizar, no intuito de compreender a evolução de determinados conceitos matemáticos por meio da analogia e metáfora, por exemplo, o espaço tetradimensional. O estudo sobre a movimentação de imagens através da tecnologia computacional também será classificada como forma de visualização, fechando assim um ciclo, que se inicia com os conceitos mais fundamentais de visualização e vai ganhando, no decorrer da pesquisa, características estéticas, qualitativas de concretização do pensamento matemático.

Portanto, a opção pela pesquisa teórica investigativa se justifica pela possibilidade da realização de um estudo do ponto de vista interpretativo, ou seja, dar movimento ao processo significativo de construção do conhecimento, integrando objetividade e subjetividade na captura da essência de uma sensibilidade matemática.

Por mais que este trabalho seja de natureza teórica, focando os aspectos epistemológicos da visualização, faz-se importante salientar que esta pesquisa se direciona ao professor, seja na formação inicial ou continuada, até mesmo nas práticas em sala de aula, com o intuito de trazer reflexões e possíveis contribuições para que se consiga construir novas práticas, incorporando novas metodologias.

Tratarmos da epistemologia da visualização é conflitivo, pois no sentido moderno se referiria à ciência e ciência remete a método, mas a visualização não tem um método científico, logo não seria uma epistemologia nos padrões atuais. Mas se pensarmos na epistemologia nos padrões mais largos, é possível falar da epistemologia da visualização, esta sendo considerada como uma forma de atingir o conhecimento.

Tendo como solo de interpretação a sensibilidade e a visualização na construção de conceitos matemáticos, a questão que nos guia é: Como a visualização exerce um papel de atribuição da concretude na elaboração e aquisição do conhecimento matemático? – vislumbramos, desta maneira, um horizonte de entendimento a partir de uma abordagem qualitativa, deslocando o foco axiomático para uma forma de pensamento direcionada à conceitualização visual.

Ensinar os alunos a observar a matemática pelo contexto da apreciação estética, de caráter qualitativo, é um recurso que os professores poderiam valorizar em suas aulas. Um elemento que influenciaria de forma bastante positiva nessa apreciação da matemática é a visualização, trazendo para o estudante uma concretude ao pensamento e seus objetos, tornando possível, por meio de técnicas de visualização, diagnosticar conceitos, formas, simetrias, semelhanças, e também argumentar, usando o raciocínio visual. Como verifica Cifuentes parafraseando o artista Paul Klee (2010, p. 23), “visualizar não é apenas ver o visível, é principalmente tornar visível”.

O pensamento visual pode apresentar uma desmitificação em considerar as técnicas de visualização como puramente auxiliares. Como exemplo, temos a utilização do desenho geométrico pelos gregos, que era indispensável em várias construções, pois se tratava de um método de raciocínio visual “legítimo”, ou seja, não era apenas uma ferramenta de ilustração. Tais técnicas podem desenvolver um sentido para aquilo que é ensinado e construído.

Não obstante, os alunos, desenvolvendo o pensamento visual e o raciocínio visual em sala de aula, poderão ter uma percepção figurativa do que está sendo ensinado, atribuindo significados aos conceitos tidos como puramente abstratos. Focalizando o papel das imagens visuais para o desenvolvimento do pensamento, identifica-se na imagem o elo entre a percepção e a imaginação, pois possibilita sua integração em forma concreta, passível de sucessivas modificações (READ, 1977).

A utilização da visualização e consequentemente do pensamento geométrico nesse processo do desenrolar do pensamento matemático, pode auxiliar de forma a dar substância, concretude ao ensino da matemática, possibilitando uma compreensão melhor direcionada e estruturada de diferentes conceitos matemáticos. Além disso, a visualização e o pensamento geométrico são processos que se complementam, pois a geometria auxilia no desenvolvimento da capacidade de abstração, generalização e visualização.

Nessa perspectiva é que geometria se apresenta de forma interessante, pois é possível verificar que o pensamento matemático pode se concretizar através de sua geometrização, como afirma Cifuentes (2010, p. 26) “Uma das formas de se matematizar uma ciência sem se referir a grandezas é a geometrização como um recurso não lógico de racionalidade visual ou visualização intelectual”. Dessa maneira, a geometria mostra-se como uma forma de visualização para muitos conceitos matemáticos, articulada tanto aos aspectos formais quanto intuitivos, abrangendo características estéticas e sensíveis.

Ao discutirmos geometrização, pensamento matemático e intuição, nos deparamos com uma matemática de característica sensível, estética. Neste sentido, conforme afirma Cifuentes (2003), o conhecimento estético se revela pela sensibilidade, enquanto o conhecimento científico tem fortes ligações com racionalidade. E diante destas considerações levantamos um desafio: como proceder de maneira a articular estas duas características do conhecimento matemático a favor de seu desenvolvimento?

Essas considerações direcionam para a compreensão de que a geometria pode ser um veículo de comunicação com conceitos analíticos e algébricos, conduzindo ao pensar matematicamente, situando este estudo no âmbito da educação matemática, que na atualidade, busca meios para desenvolver um ensino pautado em significados, rico em argumentação, que produza uma conexão com o saber matemático, geométrico e a visualização. Conforme Flores et al. (2011):

> A relação com os conhecimentos geométricos e com as práticas visuais, no ensino e aprendizagem da matemática, poderia, portanto, ser construída sobre um patamar que fosse desejável para uma educação matemática significativa e crítica. (p. 2).

Portanto, o objetivo dessa pesquisa não é somente abordar a visualização apenas com a sua série de significados, mas pesquisar os elementos que estão intrínsecos a este processo, como a já mencionada intuição, o pensamento visual, o raciocínio visual e a imagem mental.

Diante disso, buscamos organizar essa dissertação de tal forma que possamos fazer conexões entre esses conceitos.

No primeiro capítulo, apresentaremos as concepções sobre a visualização no entendimento de alguns pesquisadores, como Cifuentes (2003 e 2005), Flores (2012), Costa (2002), entre outros, e abordaremos o tema intuição, buscando compreender como os apelos visuais se relacionam ao pensamento intuitivo. A visualização como obstáculo epistemológico será outro tema de estudo para este capítulo, na qual ela é tratada como uma forma de pensamento que nos leva a determinadas generalizações, que nem sempre condizem com o real, levando assim aos obstáculos na formação do conhecimento. Analisaremos também três tipos de visualização, que denominaremos por ‘visualização geométrica’, ‘visualização algorítmica’ e ‘visualização contextualizada’. Outro tópico de grande importância neste capítulo é o que trata da cientificidade da visualização, em que analisaremos quais estruturas, características podem declinar para uma possível natureza científica da visualização.

O desenvolvimento histórico da geometria, dando ênfase aos aspectos que direcionem ao pensamento visual, será abordado no segundo capítulo, assim como as implicações didáticas da geometria no processo de visualização, caracterizando o pensamento geométrico. A história da matemática vai ser um fundamento para esse estudo, com base nas diferenças entre o pensamento grego e o atual.

No terceiro capítulo, estudaremos o desenvolvimento do pensamento visual e raciocínio visual, abordando a imagem mental como elemento estruturante do pensar e raciocinar por intermédio da visualização.

Também analisaremos, no quarto capítulo, o modo como se desenvolve o pensamento matemático quando é intermediado pelo movimento das imagens visuais e mentais, refletindo como a geometria está subjacente a este processo.

E, no quinto capítulo, o objetivo será utilizar os fundamentos teóricos dessa dissertação para finalmente analisar modos de compreender a visualização.

1. VISUALIZAÇÃO: TEORIAS, CONCEPÇÕES E ESTRUTURAS.

1.1 O que é visualizar no âmbito do ensino da matemática?

O debate sobre o papel da visualização no processo do ensino de matemática tem sido discutido, principalmente na vertente do pensamento visual e raciocínio visual. Portanto, para darmos início à abordagem sobre a visualização no contexto escolar, vamos antes analisar o que é proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais PCN's (1998):

> Em Matemática existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, *imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade*. Um exemplo bastante conhecido é a representação do teorema de Pitágoras, mediante figuras que permitem "ver" a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos. (BRASIL, 1998, p. 45, grifo nosso).

Ao atentarmos para a asserção "imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação", nos questionamos se a proposta de compreender uma demonstração por meio de imagens é aceita nas salas de aula. Isto nos leva a observar que alguns professores procuram anunciar, por exemplo, o Teorema de Pitágoras, utilizando apenas símbolos, a notação algébrica, sem trazer se quer uma das várias visualizações possíveis para apresentá-lo. E geralmente fazem o uso das imagens como um recurso didático deixando de refletir sobre o que este modo de tratar o conteúdo em questão pode apresentar para além de uma estratégia apresentacional.

De acordo com Dreyfus (1991, apud COSTA, 2000), os educadores matemáticos reconhecem o potencial poder da visualização, porém, a sua implementação na sala de aula não é efetiva, talvez porque lhes falta atribuir seu completo valor ou estatuto, ou porque a visualização, assim como o pensamento e o raciocínio visual são habilidades difíceis de serem desenvolvidas, e suas leis difíceis de serem explicitadas, necessitando de um trabalho refletido e árduo para seu aperfeiçoamento e para seu ensino.

> A visualização e a leitura de informações gráficas em Matemática são aspectos importantes, pois auxiliam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades de expressão gráficas. A disponibilidade

> de modernos recursos para produzir imagens impõe a necessidade de atualização das imagens matemáticas, de acordo com as tendências tecnológicas e artísticas, incorporando a cor, os gráficos, a fotografia, assim como a importância de ensinar os alunos a fazer uso desses recursos. (BRASIL, 1998, p. 46).

Na citação acima, observamos que “fazer uso desses recursos” não significa compreendê-los, também destacamos a frase “desenvolvimento de capacidades”, pois tudo o que nos referimos até o momento sobre visualização, pensamento visual, raciocínio visual, intuição, imagens mentais, necessitam de competências, habilidades, que podem ser facilmente desenvolvidas por alguns estudantes, porém, nem tanto por outros. Segundo Goldenberg (1998),

> Os tipos de visualização que os alunos precisam, tanto em contextos matemáticos como noutros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e “ler” imagens mentais de aspectos comuns a realidade; visualizar informação espacial e quantitativa, e interpretar visualmente a informação que lhe seja apresentada; rever e analisar passos anteriormente dados como objetos que podiam tocar e desenhar; e interpretar ou fazer aparecer, como por magia imagens de objetos ou ideias que nunca foram vistos. (GOLDENBERG, 1998, p. 37).

Nessa perspectiva, Dreyfus apresenta um resumo relacionado às dificuldades com a visualização sentidas, pelos estudantes:

> - incapacidade de ver diagramas de diferentes maneiras;
> - dificuldades em reconhecer as transformações implicadas nos diagramas;
> - interpretações incorretas ou não convencionais de variação e covariação em gráficos;
> - falha na distinção entre uma figura geométrica e o desenho que representa essa figura;
> - falha em unir as suas visualizações ao pensamento analítico;
>
> (DREYFUS, 1991, apud COSTA, 2000 p. 177).

Em referência às dificuldades em unir a visualização ao pensamento analítico, um recurso utilizado e que requer como estratégia somente o uso da mente é a intuição, que abordaremos com maior propriedade no capítulo 3. Porém, faremos uma breve discussão sobre a intuição como forma de desenvolver as capacidades visuais e o raciocínio visual.

À vista disso, o trabalho de Cifuentes (2003) estabelece a relação entre a visualização e a intuição, ou seja, a visualização como uma forma de experiência que constrói significados e atribui sentidos aos apelos intuitivos. Pesquisadores como Brunet et al. (2009) descrevem que possuímos intuição pelo fato de concebermos representações mentais de objetos aos quais estamos associando um determinado conceito, ou seja, podemos dizer que a visualização e a intuição estão intimamente ligadas.

Flores (2012) e Costa (2000) apresentam a visualização e a intuição como processos do desenvolvimento do pensamento visual, no qual uma depende, ou se relaciona com a outra. “A visualização é geralmente considerada útil, para apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da matemática” (COSTA, 2000, p.176).

> Adicionar visualização no contexto da educação matemática, além de promover a intuição e o entendimento, possibilita uma maior abrangência da cobertura em assuntos matemáticos, permitindo que os estudantes não somente aprendam matemática, mas também se tornem capazes de construir sua própria matemática. (FLORES et al, 2012, p. 35).

Imaginar, tocar, manipular são fatores que influenciam no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, dando estrutura para o entendimento de determinados conceitos. E quando o manipular não está ao alcance, a visualização pode conduzir a uma tentativa de dar concretude ao pensamento, construindo uma imagem mental, um significado ao significante[2]. “A visualização é um processo através do qual as representações mentais podem ganhar vida” (DREYFUS, 1991 apud COUY e FROTA, 2007).

> O pensamento matemático envolve diferentes processos de pensamento: os processos envolvidos na representação de conceitos e de propriedades (o processo de representar-visualizar ...), processos envolvidos na abstração (generalização e síntese), processos que estabelecem relações entre o representar e o abstrair [...]. (DREYFUS, 1991, apud COSTA, 2000, p. 261).

Portanto, uma das razões para se investir na implementação da visualização nas salas de aula está associada às habilidades mentais e visuais que os alunos vão desenvolver e adquirir. Costa (2000) acrescenta que a visualização é parte essencial da inteligência humana;

[2] Entendemos por significado o teor pertinente a um signo, ou seja, a mensagem que ele transmite. E por significante o veículo que contém a mensagem, ou seja, o gesto, o desenho, a palavra ou som que usamos para transmiti-la.

> Assim, sabendo que o pensamento visual é difícil de ser desenvolvido, parece que é imprescindível que os processos cognitivos que o acompanham devam ser clarificados e tornados explícitos, para que se possa não só diminuir os problemas de aprendizagem que normalmente o acompanham como também identificar os modos de pensamento visual com que os alunos lidam. (COSTA, 2000, p. 179).

Na próxima seção faremos um estudo mais detalhado sobre as concepções inerentes à visualização, baseando nossos estudos em Cifuentes, Flores, Buratto, Costa, entre outros.

1.2 Concepções sobre a visualização

> *Não só devemos compreender a matemática, como devemos saber como comunicar visualmente essa matemática. (CUNNINGHAM, 1991 apud COSTA, 2000, p. 179).*

O sentido da palavra 'visualização' é discutido em diversas áreas do saber, como psicologia, matemática, educação matemática, etc. Sendo assim, analisaremos os diferentes conceitos de visualização, adotados por alguns pesquisadores, em estudos direcionados à educação.

Para isso, nos fundamentamos nos trabalhos e pesquisas de Cifuentes, Flores, Buratto, Costa, Leivas entre outros, que em geral trazem uma discussão sobre a visualização no ensino da matemática.

De acordo com Costa (2000):

> O termo visualização tem diferentes conotações, e umas vezes está restrito à mente do aluno, outras está restrito a algum meio e ainda outras a visualização é definida como um processo para viajar entre esses dois domínios. (COSTA, 2000, p. 169).

Flores (2012, p. 34), em referência ao ensino de matemática, denota que "a visualização não é como um fim em si mesma, mas um meio para o entendimento de conceitos matemáticos". Porém é importante ressaltar que a visualização, mesmo sendo fundamentalmente considerada como uma predisposição relacionada ao ato de ver, corresponde também às propriedades mentais, a percepção espacial, não somente ao que está posto diante aos olhos. "O próprio termo 'visual' pode não ter a ver com a visão, um dos cinco sentidos, mas pode referir-se também as propriedades espaciais e às suas relações" (COSTA, 2000 p. 170).

Flores et al. (2012), a partir do estudo e dos autores que elas investigaram, foram percebidas duas formas de se pensar a visualização, uma voltada para a psicologia, na qual o foco de investigação é a capacidade do indivíduo em formar e manipular imagens mentais, e a outra voltada para a educação matemática, centrada em lidar com os aspectos visuais para alcançar o entendimento matemático. Portanto, com base nas leituras por elas realizadas, concluem que a visualização é um processo intrínseco ao desenvolvimento das imagens mentais, no qual têm papel fundamental para a compreensão de conceitos matemáticos.

Há pesquisadores, que consideram os termos 'visualização' e 'pensamento visual' como sinônimos, porém Mariotti (1995) evidencia a distinção entre ambos os termos:

> Visualização significa trazer à mente imagens de coisas visíveis e o pensamento visual é o pensar sobre coisas abstratas que originalmente podem não ser espaciais, mas que podem ser representadas pela mente de alguma forma espacial. (MARIOTTI, 1995 apud COSTA, 2000, p. 170).

À visualização concerne também o sentido de realidade, de verdade, uma vez que estamos observando, experimentando algo. Nessas circunstâncias, Cifuentes (2005) destaca a visualização como mecanismo de expressão de uma linguagem visual, no qual considera que um dos grandes desafios da matemática do século XXI será tornar a visualização em argumento de demonstração lógica:

> A visualização será o principal mecanismo para "ver" a verdade de um resultado matemático sem recurso à demonstração lógica. As demonstrações visuais farão uso possivelmente de uma linguagem visual apropriada, envolvendo também meios computacionais, os quais podem pôr em evidencia a expressividade artística da matemática; Todo conceito de visualização remete a uma certa "realidade", pois "a realidade é a experiência visual básica". (CIFUENTES, 2005, p. 71).

Para Cifuentes, a visualização precisa de um "espaço" de representação, mesmo que este espaço não seja aquele da percepção visual (CIFUENTES, 2010).

Já em relação ao raciocínio geométrico, a visualização mostra-se com mais nitidez, neste sentido Loureiro (2009) defende o uso do pensamento visual como parte do raciocínio geométrico e matemático em geral, "para muitos alunos, a visualização e o raciocínio visual são uma âncora para o pensamento matemático e também a primeira oportunidade para participarem da atividade matemática". (LOUREIRO, 2009, p. 62)

É possível notar, de certa forma, que não há uma linearidade no modo como os diversos autores tratam a questão da visualização, neste sentido Flores, Wagner e Buratto, publicaram, em 2012, uma pesquisa em que realizam um mapeamento dos anais do ENEM[3], no qual o objetivo consistia em classificar as tendências na pesquisa brasileira sobre visualização na educação matemática. Com base nesse estudo, as autoras identificaram que o conceito de visualização empregado nas pesquisas é percebido como:

> Processos de construção e transformação de imagens visuais[4] mentais; uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica; processo de formação de imagens (mentais, com lápis e papel, ou com o auxílio de tecnologias) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática; forma de pensamento que torna visível aquilo que se vê, extraindo padrões da representação. (FLORES et al, 2012 p. 40).

Na mesma direção, Buratto (2012) apresenta em sua tese um quadro, no qual podemos perceber as diferentes abordagens sobre o conceito de visualização. A autora realiza uma seleção em que se articula a matemática, educação matemática, psicologia, ou com a pesquisa cientifica, abrindo um leque de informações que mesclam a percepção, imagens visuais, imagens mentais e imaginação.

TABELA 1 - ALGUMAS DEFINIÇÕES SOBRE VISUALIZAÇÃO

Como os pesquisadores definem o conceito de visualização		
Autor	**Ano/Página**	**Definição**
Presmeg	1986, p. 297	Visualização: "uma imagem visual é definida como um esquema mental representando informações reais ou espaciais."
Bishop	1989, p. 8	"Visualização aparece na literatura com as ideias de imaginação, habilidade espacial, diagramas e intuição, com ideias úteis para a Educação Matemática e que, embora seja considerada um conceito complexo, é necessário ser compreendida". (tradução livre)
Dreyfus9 *apud* Costa	2000, p. 169	"Visualização do ponto de vista da educação matemática inclui duas direções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica".

[3] Encontro Nacional de Educação Matemática.
[4] Imagens visuais: São esquemas mentais que descrevem a informação visual ou espacial (PRESMEG, 1986, apud BURATTO, 2012).

Cunningham	1991, p. 67	“Visualização científica é comumente corrente para o uso da tecnologia gráfica do computador de apoio à investigação nas ciências”.
Zimmermann e Cunningham	1991, p. 3	“Visualização matemática é o processo de formação de imagens (mentais, ou com lápis e papel, ou com o auxílio de tecnologias) usando essas imagens de forma eficaz para a descoberta e compreensão da matemática”.
Senechal[10] *apud* Costa	2000, p. 170	“Visualização significa em linguagem usual ‘percepção espacial’ e assim é a reconstrução mental da representação de objetos a 3 dimensões.”
Mariotti apud Costa	2000, p. 170	“Visualização consiste em trazer à mente imagens de coisas visíveis”.
Solano e Presmeg	1995, p. 67	“Visualização é a relação entre imagens”.
Guzman	1996, p. 13	“Visualização em matemática constitui um aspecto importante da atividade matemática onde se atua sobre possíveis representações concretas enquanto se descobrem as relações abstratas que interessam ao matemático”.
Gutiérrez	1996, p. 19	Visualização na matemática é “um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico, realizado para resolver problemas, ou provar propriedades”.
Nemirowsky e Noble	1997, p. 101	“Visualização é um ato que não se restringe somente aos aspectos mentais ou aos aspectos externos, mas um meio de estabelecer conexões entre esses dois meios.” (tradução nossa)
Arcavi	1999, p. 26	“Visualização é a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre fotos, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de descrever a comunicação de informações, de pensar e de desenvolver ideias anteriormente desconhecidas e entendimentos avançados”. (tradução nossa)
Duval	1999, p. 9	“Visualização refere-se a uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica e o uso da visualização na matemática requer um treino específico, para ver em cada registro de representação.” (tradução nossa)
Passos	2000, p. 80	“Visualização é a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da

		ação do sujeito sobre o objeto”.
Cifuentes	2005, p. 71	“Visualizar é ser capaz de formular imagens e está no início de todo o processo de abstração”.
Van Garderen	2006, p. 496	“Visualização é a capacidade de manipular mentalmente, girar ou torcer, ou inverter um objeto pictoricamente estímulo apresentado”. (tradução nossa)
Leivas	2009, p. 111	“Visualização é um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos.”
Flores	2010, p. 274	“Visualização matemática é entendida como uma expressão do pensamento, uma forma de olhar e de pensar”.

Fonte: Buratto, 2012 p. 58.

Diante dos diferentes modos de compreender a ideia de visualização, tomamos inicialmente a vertente que aponta para um entendimento da visualização como elemento estruturante na formação das imagens mentais para o desenvolvimento do pensamento visual. Quando pensamos nas dificuldades que os estudantes apresentam na resolução de questões matemáticas é possível perceber uma relação entre esta dificuldade e a inabilidade em articular os conceitos abstratos com a visualização, que neste caso pode se dar pela intuição, imaginação e também pelas imagens mentais.

Ou seja, é possível na abstração, implicitamente presente em grande parte das proposições matemáticas, criar uma imagem mental, um modelo, mesmo não sendo nítido aos olhos, mas à mente, sendo assim possível dar movimento e concretude ao pensamento.

Adiante, discutiremos sobre três tipos de visualização, que denominaremos por ‘visualização geométrica’, ‘visualização algorítmica’ e ‘visualização contextualizada’.

1.3 Visualização Geométrica, Visualização Algorítmica e Visualização Contextualizada

> *As fórmulas são explicações, e não fontes de inspiração. A obra viva sai da imaginação e não do cálculo. (Francastel, 1967, apud Cifuentes et al, 2005a)*

Na perspectiva da Educação Matemática, o tipo de visualização mais encontrado na literatura acadêmica é a geométrica, porém também analisaremos nesta seção os tipos de visualizações que denominaremos por algorítmica e contextualizada.

Iniciaremos nossa discussão pela visualização geométrica, tal qual o próprio nome ressalta, traz uma incumbência geométrica para o visual. Trata-se de ver o que está ante os olhos, ou também ver com os olhos da mente, utilizando-se de conceitos e construções próprios da geometria, a fim de fazer relações matemáticas tanto geométricas quanto algébricas.

> Desde os inícios da geometria, como ciência experimental, até os fins do séculos XIX, inclusive passando pelo desenvolvimento axiomático-material da geometria de Euclides, o aspecto visual, dado por meio de figuras e construções geométricas, tem sido tão importante quanto a demonstração. (CIFUENTES, 2003, p.70).

Foi, sobretudo, na geometria de Euclides que a visualização e a geometria tornaram-se "cúmplices", ou seja, uma foi se tornando indispensável para a outra. Segundo Cifuentes (2003 p. 64), "os axiomas da geometria euclidiana são apresentados sugerindo construções, sendo fundamental a palavra traçar, sugerindo um recurso ao visual". Na geometria analítica os conceitos geométricos não são mais tão "evidentes"[5], porém a visualização está presente através dos processos mentais, da intuição, da imaginação. "Os aspectos formais foram separados dos visuais, esse último é conservado até hoje, chamado usualmente de modelo[6] ou interpretação" (CIFUENTES, 2003, p. 70). Desta forma, a utilização de diversos modelos que conduzam para uma ideia geométrica pode auxiliar o aluno a reconhecer que algumas propriedades do objeto transcendem suas propriedades

[5] "A palavra 'evidência' alude ao visual. Para os gregos, "demonstrar" significava desvelar, pôr em evidência (a verdade)". (Cifuentes, 2003, p. 64).

[6] "Modelo é uma forma de ver, isto é, um ponto de vista, um enfoque, terminologia própria do visual". (Cifuentes, 2003, p. 70).

materiais como tamanho, cor, textura e, portanto, pertencem ao mundo ideal da Geometria (KALEFF, 2003).

É sobre a visualização resultante do raciocínio visual associado aos conceitos geométricos[7], como forma de alcançar o conhecimento algébrico, que daremos ênfase nesse momento. Como primeiro exemplo, temos a visualização geométrica auxiliando os estudantes na compreensão, interpretação e formulação de hipóteses matemáticas, no qual sua importância no processo de solução é um passo preparatório para o entendimento da formalização de alguns conceitos matemáticos.

Mas quais são as características que os conceitos têm para serem considerados geométricos? Primeiramente, entendemos por conceitos geométricos as propriedades, as relações, as definições referentes aos elementos da geometria, como por exemplo, o quadrado, que possuí quatro ângulos adjacentes de mesma medida e quatro lados congruentes. Mas na própria geometria, segundo Cifuentes (2003, p. 60), encontramos palavras de origem visual, tais quais: congruência, semelhança, diferença, forma, clareza, evidência. Portanto, os conceitos, para serem considerados geométricos, devem apresentar além de suas propriedades, suas transformações e correspondências.

> Apesar de, para os matemáticos, não haver dúvidas de que os elementos geométricos (ponto, reta, plano, sólidos etc) pertencem ao mundo das ideias matemáticas, estes elementos tiveram sua origem no mundo físico e representam abstrações de objetos materiais. Esta ambiguidade é um fator perturbador para o ensino da Geometria, pois ela se apresenta como uma grande dificuldade para os alunos, que não percebem que os objetos geométricos são abstratos e que mesmo ao observarem o desenho de uma figura geométrica no livro-texto ou no quadro-negro, ou mesmo sua imagem na tela do computador, estão, na realidade, vendo apenas uma representação do objeto geométrico. (KALEFF, 2003, p. 16).

Em consonância com a discussão sobre os conceitos geométricos, faz-se importante destacarmos a relevância que o ensino de geometria apresenta nesse contexto, pois é necessário que o estudante tenha, ao longo de seu processo acadêmico, formalizado e construído determinados conceitos geométricos, caso contrário, a visualização geométrica empregada por ele poderá ser distorcida e errônea. Um exemplo disso é a visualização de um tetraedro através de seu desenho no plano, em que os alunos associam ao desenho de um triângulo. Um dos

[7] Consideramos por conceitos geométricos, figuras geométricas as quais são atribuídas definições de certo sistema axiomático, porém, como aponta Fischbein (1985, apud D'AMORE, 2007), uma figura geométrica pode então ser descrita como tendo, intrinsecamente, propriedades conceituais. Todavia, uma figura geométrica não é um puro conceito, é uma imagem, uma imagem visual.

motivos deve-se ao fato de suas faces serem triangulares, em que os estudantes não conseguem visualizar a profundidade da imagem, focando apenas nas faces.

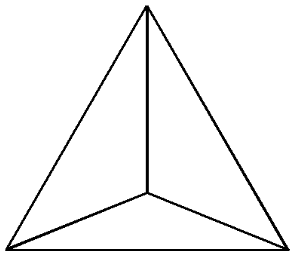

Figura 1: Imagem de um tetraedro regular

Outro exemplo é apontado por Dreyfus e Hadas (1994), em que enfatizam as padronizações feitas pelos alunos em relação às formas, ou seja, os triângulos isósceles existem, para alguns alunos, somente quando suas bases são horizontais, ou dois triângulos são congruentes somente quando seus lados correspondentes são paralelos.

Cifuentes (2005, 2010) tem outro entendimento sobre esse tipo de fenômenos: é inerente aos processos de visualização a contextualização espaço-temporal (não necessariamente num sentido físico) da imagem, de modo que, desse ponto de vista, faz sentido identificar, num primeiro momento, um triângulo isósceles como "apoiado" na sua base. Aliás, a própria expressão "base de um triângulo" remete a essa contextualização. Num segundo momento, que não é mais de visualização-concretização e sim de abstração, separa-se a imagem de sua "posição contextual".

Uma das justificativas para esse tipo de equívoco é dada por Kaleff (2003), que aponta a existência de indivíduos visualizadores, em que a habilidade de visualização é inata, e também a existência de indivíduos não visualizadores, em que a habilidade pode ser desenvolvida ao longo do processo acadêmico. Mas quando não desenvolvida tal habilidade, ocorre a existência de um conflito, quando alunos visualizadores se deparam com professores não visualizadores e vice-versa.

Não obstante, Kaleff (1994) argumenta sobre os obstáculos cognitivos que impedem ou dificultam a construção de uma ideia ou conceito matemático, tais obstáculos são ocasionados pelo não desenvolvimento da habilidade da visualização.

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre desenhos, imagens, diagramas, em nossas mentes, sobre papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de representar e comunicar informações, de pensar e desenvolver ideias previamente desconhecidas e de divulgar entendimentos. (ARCAVI 2003, apud KALEFF, 2012 p. 8).

A autora apresenta algumas operações mentais importantes envolvidas na habilidade da visualização, em que destacamos duas: a) produzir imagens mentais de um objeto e visualizar suas transformações e movimentos, mesmo na sua ausência visual; b) relacionar vários objetos, representações gráficas ou imagens mentais entre si.

Diante da preocupação com o ensino de geometria, encontramos o artigo da pesquisadora Regina Pavanello, *Por que ensinar / aprender geometria?*, no qual a autora aponta as dificuldades que os alunos apresentam em utilizar a representação geométrica para a visualização de conceitos matemáticos. “A geometria apresenta-se como um profícuo para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível” (PAVANELLO 2004, p. 4).

Sobre a influência do ensino de geometria nesse processo da visualização, a pesquisadora Ana Maria Kaleff tem apresentado uma série de reflexões. No artigo *Tomando o Ensino da Geometria em Nossas Mãos,* Kaleff salienta que nos anos setenta iniciou-se um movimento de resgate do ensino de geometria, tendo como objetivos iniciais:

> a) Induzir no aluno o entendimento de aspectos espaciais do mundo físico e desenvolver sua intuição espacial e seu raciocínio espacial;
> b) Desenvolver no aluno a capacidade de ler e de interpretar os argumentos matemáticos utilizando a Geometria como o meio para representar conceitos e as relações Matemáticas. (Tomando o ensino da geometria em nossas mãos..”)
> c) Proporcionar aos alunos meios de estabelecer o conhecimento necessário para auxiliá-lo no estudo de outros ramos da Matemática e de outras disciplinas, visando uma interdisciplinaridade dinâmica e efetiva.
> d) Desenvolver no aluno habilidades que favoreçam a construção do seu pensamento lógico, preparando-o para os estudos mais avançados em outros níveis de escolaridade. (KALEFF, p. 20, 1994).

O primeiro objetivo apontado por Kaleff, “Induzir no aluno o entendimento de aspectos espaciais do mundo físico e desenvolver sua intuição espacial e seu raciocínio espacial”, vislumbra uma visualização como intuição do espaço, uma das características da visualização geométrica, para podermos “ver” o entendimento, a compreensão que se faz do espaço. Salientando que o “espaço” aqui considerado, é o lugar onde as coisas acontecem e/ou existem.

O segundo objetivo, “Desenvolver no aluno a capacidade de ler e de interpretar os argumentos matemáticos utilizando a Geometria como o meio para representar conceitos e as relações Matemáticas”, estabelece o aprimoramento dos argumentos, além de promover uma construção real/visual de determinados conceitos matemáticos. Seria assim uma argumentação sobre as propriedades do espaço, isto é, uma argumentação visual de tipo geométrico.

Desta forma, estabelecemos duas vertentes para a visualização geométrica:

- a visualização por meio da intuição espacial
- a visualização por meio da argumentação geométrica

Antes de adentrarmos na análise sobre as duas vertentes por nós estipuladas, faz-se importante definirmos nosso entendimento de espaço. Quando mencionamos o espaço pelo lugar onde as coisas acontecem, nos referimos a representação do espaço tal como o homem o observa, é o momento do descobrimento do espaço pelo homem, no qual ao representá-lo, ele tende a capturar a estrutura, os traços essenciais, o que implica numa abstração (CIFUENTES, 2005a). E quando fazemos menção sobre a argumentação das propriedades do espaço, estabelecemos referência ao homem se percebendo como parte constituinte deste espaço, podendo então refutar, questionar, enfim, argumentar sobre o mesmo.

> O conceito de “espaço” faz parte do desenvolvimento das civilizações e de suas atividades culturais, manifestando-se na criação de sistemas para melhor representá-lo. (CIFUENTES et al, 2005a p. 3).

Ou seja, a representação do espaço nas civilizações da antiguidade e até mesmo no Renascimento, não se equipara à representação do espaço hoje, talvez pelas necessidades diferenciadas ou pelo próprio “movimento” do espaço.

> Francastel considera que a ideia de que o Renascimento representa uma abordagem no sentido de representação “verdadeira” em relação ao mundo exterior é falsa. Admitir essa ideia seria admitir que o espaço, para toda a

> humanidade, é permanente e que apenas os modos de representar é que mudam. (CIFUENTES et al, 2005a, p. 6).

Seria então possível representar o espaço de quatro dimensões? Para esse efeito, como seria visualizá-lo? Para isso utilizamos os processos mentais, como a intuição e a imaginação, para tentar entender como os objetos geométricos de comportam nesse espaço, e além, entender como ocorrem as transformações. O espaço quadridimensional foi de difícil aceitação justamente por não ser evidente, no qual vários filósofos, cientistas, físicos e matemáticos tentaram defini-lo, entre eles, René Descartes, Bernard Riemann, Albert Einstein, Felix Hausdorff. Segundo Descartes, as dimensões de um objeto refere-se à quantidade de coordenadas necessária para descrevê-lo. Portanto:

> Se a teoria de Descartes da geometria analítica tivesse visto a luz do dia num tempo menos agarrado à experiência sensorial e ao pensamento euclidiano, os matemáticos teriam naturalmente, sem constrangimento, reconhecido a lógica dum objeto em quatro dimensões, pois só se lhes exigiria o reconhecimento de que um tal objeto não mais é do que a entidade matemática que necessita de quatro coordenadas para ser adequadamente descrito. (GUILLEN, 1987, p. 94).

Ou de quatro graus de liberdade, na linguagem dos físicos, para um tal objeto poder ser “visto” como sendo quadridimensional.

Riemann foi quem estendeu a noção de espaço finito-dimensional para infinitas dimensões “a dimensão matemática não deve caracterizar-se apenas por espaços sensíveis, pois pode referir-se a espaços puramente conceituais” (Guillen, 1987 p.95), ou seja, a dimensão desse espaço é determinada pelo número de fatores que o governam.

Portanto, com base em nossas refutações sobre os conceitos de espaço, a visualização por meio da intuição espacial seria “ver”, compreender, conjecturar sobre o entendimento que se faz do espaço. Podemos usar como exemplo o espaço utilizado na geometria analítica plana, constituído pelo plano cartesiano, que contém os pontos (coordenadas) e as retas (equações da reta, dependentes das coordenadas). O espaço deixa de ser o real-físico, da geometria euclidiana, se tornando um espaço “artificial” numérico, criado para a geometria analítica. Transforma-se assim a intuição geométrica do espaço físico numa intuição numérica de um espaço matemático “artificial”: o plano cartesiano.

O espaço real[8] podemos entendê-lo como o espaço físico, natural. O espaço matemático é uma certa idealização desse espaço físico e essa idealização é construída também usando a própria geometria. A geometria não é o estudo apenas do espaço, a geometria também permite construir os espaços para a concretização (mesmo que ideal) dos objetos geométricos (é o caso das geometrias não-euclidianas). No espaço físico enxergamos uma noção intuitiva de reta e de ponto, mas idealizando isso como um ponto, como Euclides pretendia dizer, “um ponto é aquilo que não tem partes”, isso já é uma “concretização”, esse ponto que não tem partes pertence ao espaço geométrico, não pertence ao espaço físico. O espaço geométrico é necessário tanto na antiguidade como na modernidade, justamente para dar concretude aos objetos matemáticos, aí que se concretizam, uma reta se concretiza no espaço geométrico.

A visualização por meio da argumentação desencadeia uma série de possibilidades atreladas à geometria, como forma de representar os conceitos matemáticos. Seria o homem como ser constituinte do espaço, argumentando e questionando as propriedades do mesmo. Como exemplo podemos mencionar o estudo das propriedades dos produtos notáveis, em que utiliza-se aplicações da geometria e o raciocínio visual como forma de argumentação para a existência e até mesmo verificação de tais propriedades. Não seria uma demonstração, mas sim uma forma de “ver” as transformações e as relações escondidas por meio dos algoritmos.

Da mesma forma acontece com o conceito de raiz quadrada, quando mencionamos problemas do seguinte tipo: em uma sala com o formato de um quadrado cabem 25 carteiras, quantas fileiras de carteiras ficarão dispostas? Neste caso, sabemos que basta calcular a raiz quadrada de 25 para concluir que serão 5 fileiras de carteiras, desta forma estamos utilizando a ideia geométrica espacial para fazer menção ao conceito de raiz quadrada. Assim como o número quadrado perfeito, além de apenas falar que o número quadrado perfeito é o que possuí raiz exata, podemos também fazer a construção desse quadrado. Por exemplo, o número 16 é quadrado perfeito, pois conseguimos com 16 ‘quadradinnhos’ construir

---

[8] Há uma diferença importante entre espaço físico e espaço geométrico na medida em que as propriedades dos objetos que encontram uma concretização nesses espaços são diferenciadas. Por exemplo, a propriedade de equilíbrio de um objeto é física, enquanto sua propriedade de simetria, embora intimamente relacionada com aquela, é geométrica.

um quadrado maior. Porém, o 5 não é um quadrado perfeito, pois não é possível construir um quadrado com 5 quadradinho.

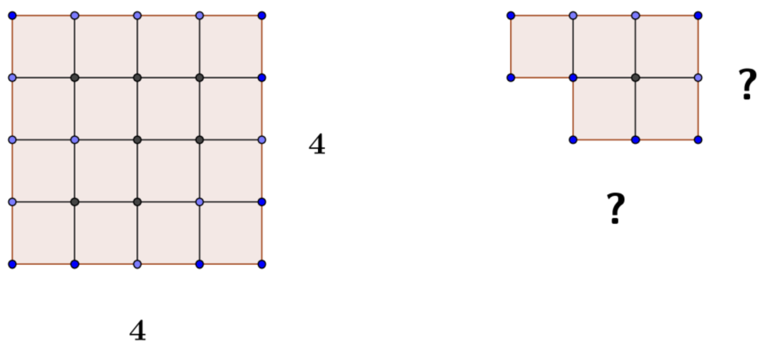

Figura 2: Representação geométrica do número quadrado perfeito

Portanto, nas linhas acima procuramos tentar entender melhor como a visualização geométrica se desenrola no processo de concretização do conhecimento matemático, a fim de deixar de lado as concepções primárias, partindo para um entendimento mais profícuo e fundamentado.

Porém, nem todo tipo de visualização se resume a visualização geométrica, como salientamos no início deste capítulo, analisaremos a visualização, que tomamos por liberdade, chama-la de 'algorítmica'.

Mas por que esse nome? E qual o significado, quais os conceitos que fundamentam esta visualização?

A visualização algorítmica é tão difundida quanto a geométrica, talvez não tenha sido amplamente discutida, pelo fato de não ser tão evidente, ou pelo fato de utilizar-se mais do raciocínio algébrico ou combinatório como forma de pensamento. Mas o fato é que ela é tão importante para o processo de formação do pensamento matemático assim como a geométrica.

A visualização algorítmica é uma espécie de visualização de formas de argumentação, basicamente ver algebricamente algo geométrico. Isso acontece quando, por exemplo, não conseguimos "ver" uma demonstração geométrica, tendo que partir assim para o uso exclusivo dos algoritmos. Um exemplo disso é o fato de não conseguirmos visualizar que em um espaço tetradimensional existem dois planos não paralelos que se interceptam, e tal intersecção é um único ponto. Se usássemos da geometria analítica para tentar adaptar uma espécie de modelo para essa representação, teríamos o seguinte:

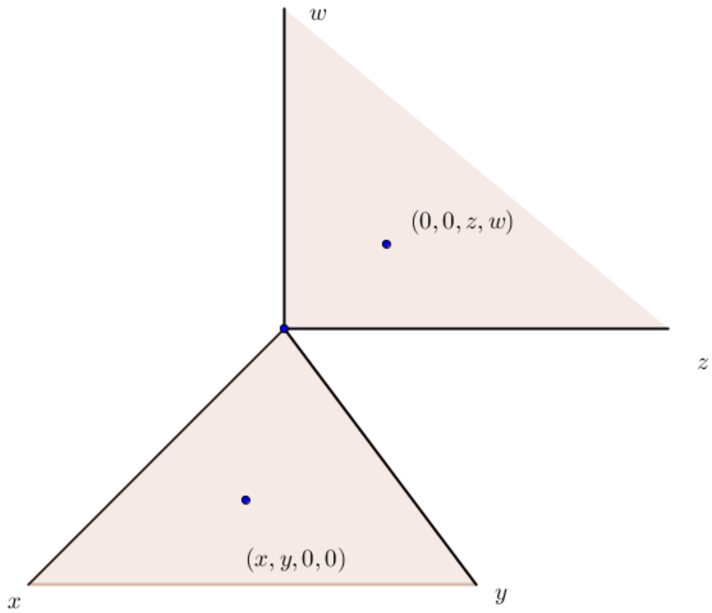

Figura 3: Ilustração de planos não paralelos

A visualização algorítmica, requer um processo de construção para sua concretização, como por exemplo a discussão em torno do quinto postulado de Euclides: “Se duas retas são cortadas por outra formando ângulos de um mesmo lado com “soma” menor que dois ângulos retos, então, as duas retas quando prolongadas suficientemente se encontram num ponto”. A dificuldade epistemológica por trás do postulado V é que precisa da “existência” da reta euclidiana infinita em ato. Ou seja, a reta infinita em ato, envolvida no Postulado V, não é aceita por ser, a sua concepção, problemática do ponto de vista construtivo, pois sua “concretização” poderia envolver um número infinito de passos de prolongamento. A existência do limite do processo de prolongamento só existiria se o infinito de um tal processo for um infinito em ato, desta forma o postulado das paralelas pode ser qualificado como não evidente por ser não construtivo (CIFUENTES, 2005). Portanto, se inicia um processo de discussão teórica que durou séculos, até se concluir no século XIX, com o advento das geometrias não-euclidianas.

E por último apresentamos a visualização que denominaremos por ‘contextualizada’. Esse tipo de visualização é caracterizada por dar diferentes significados a um dado conceito matemático. A palavra ‘contextualizar’ no sentido da matemática significa colocar um objeto em relação com outros objetos, não apenas no caminho da matemática para o real, mas da matemática para a própria matemática e para contextualizar um determinado conceito, faz-se necessário descontextualizar o saber produzido, para assim analisarmos um conhecimento que nele possa ser reproduzido.

> Um conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem. Para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem contextualizados novamente em outras situações (BRASIL, 1998, P. 36).

Como exemplo, temos o uso das integrais, em que podemos utilizá-las para determinar a área sob uma curva do plano cartesiano, ou então para analisar a relação entre aceleração, velocidade e a posição de uma partícula, também as integrais duplas e triplas nos auxiliam para o cálculo do volume, além de poder ser aplicada em outras situações. Ou seja, com o uso das integrais exemplificamos três sentidos diferentes dados ao mesmo significado.

Outro exemplo, já utilizado nesse capítulo é o do triângulo, em que foi feita a menção de que os alunos só concretizam os triângulos isósceles quando suas bases são horizontais. Quando argumentamos que um lado do triângulo é uma base, estamos fazendo referência ao mundo real. Da mesma forma, se dissermos que um triângulo que está apoiado no vértice vai cair, estamos novamente fazendo referência ao mundo real-físico, ele pode cair pela ação da gravidade, pela posição em que está, etc. Tender a cair não é uma propriedade do triângulo, é uma propriedade do triângulo por estar ‘neste local’ e ‘nesta posição’.

Diferentemente da visualização algorítmica e da geométrica, o ‘mundo’ onde a integral se concretiza pode ser físico (na questão da velocidade, ou até mesmo do o trabalho necessário para distender ou comprimir uma mola), o biológico (permite calcular o fluxo de sangue numa artéria), da engenharia (calcula o centro de massa ou o momento de inércia de um sólido).Sendo assim, contextualizar também é uma forma de visualizar.

Dessa forma fechamos nossa discussão sobre três tipos de visualização, a geométrica, algorítmica e a contextualizada, salientando que uma não se sobrepõe sobre a outra, e nem se equivalem, apenas se complementam.

No capítulo seguinte, pesquisaremos, apoiados na leitura da obra de Bachelard, o obstáculo epistemológico da experiência primeira, analisando questões pertinentes à visualização que estão por trás de um primeiro olhar, de uma primeira impressão, podendo chegar a conclusões precipitadas.

1.4 A visualização como obstáculo epistemológico ao conhecimento matemático.

> *Acender a ciência é rejuvenescer espiritualmente, é aceitar uma brusca mutação que contradiz o passado. (BACHELARD, 2011, p. 18).*

Um determinado assunto matemático, uma questão proposta, para que seja julgada como “verdadeira” basta que seja vista, posta diante aos olhos? Ou basta que passe pelo processo de experimentação e observação? Ou ainda, precisa necessariamente ser demonstrada pelo rigor da lógica matemática? Podemos nós julgar o que é ou não verdadeiro, uma vez que essa verdade pode estar vinculada ao que se quer que seja verdade, ou até mesmo a pontos de vista?

> O problema tem a ver com o fato de que as "verdades" da moderna visão científica do mundo, embora possam ser demonstradas em fórmulas matemáticas e comprovadas pela tecnologia, já não se prestam à expressão normal da fala e do raciocínio. Quem quer que procure falar conceitual e coerentemente dessas "verdades" emitirá frases que serão "talvez não desprovidas de significado como um 'círculo triangular', mas muito mais absurdas que 'um leão alado'" (Erwin Schrödinger). Ainda não sabemos se esta situação é definitiva; mas pode vir a suceder que nós, criaturas humanas que nos pusemos a agir como criaturas do universo, jamais cheguemos a compreender, isto é, a pensar e a falar, sobre aquilo que, no entanto, somos capazes de fazer. (ARENDT, 1958, apud BERTOCHE, 2006, p. 4).

Os conflitos gerados por esses questionamentos podem estar ofuscados por obstáculos epistemológicos, pois para Bachelard é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado, debatendo sobre as causas de estagnação e inércia do pensamento.

Como exercício de reflexão por que não descontruir para reconstruir? Como afirma Bachelard, (2011, p.21) “diante do real, aquilo que cremos saber com clareza ofusca o que deveríamos saber”, a restrição em uma forma de pensar linear, fechada, pode romper novos conhecimentos. O propósito é questionar, buscar, duvidar, sair da contemplação do mesmo para buscar o outro, desviar do senso comum, enfim, “se não há pergunta, não pode haver conhecimento científico” (p. 18). O ato de conhecer passa a ser um ato de negação.

Portanto, buscamos apresentar um estudo analítico reflexivo sobre um dos obstáculos epistemológicos discutido por Bachelard em sua obra *A formação do Espirito Científico*. Muitas vezes, a experiência primeira e as generalizações são consequência do uso de metáforas, imagens e analogias para explicar fenômenos naturais. A isso Bachelard denomina “obstáculos verbais”, assunto que discutiremos aclarando a “visualização primeira” como obstáculo epistemológico do conhecimento matemático.

1.4.1 O conflito da generalização e a experiência primeira

> *O espírito científico deve formar-se contra a Natureza, contra o que é, em nós e fora de nós, o impulso e a informação da Natureza, contra o arrebatamento natural, contra o fato colorido e corriqueiro. (BACHELARD, 2011, p. 29).*

A visualização possibilita, através da ação empreendida, “dar forma” a determinados conceitos. Quando tratamos, por exemplo, da geometria de Euclides, os postulados são construídos, são vistos, podendo ser desvelados. Mas quando tratamos da geometria esférica, como essas capacidades podem se manifestar? Podemos generalizar as propriedades do circulo para a esfera? Ou melhor, para o plano projetivo que é a esfera onde são identificados pontos antípodas?

A discussão nesse momento se desencadeia pela generalização, e mais, a chamada “imagem generalizada”. Até que ponto podemos usar uma imagem para explicar conceitos matemáticos? Por exemplo, considerar uma região plana em $\mathbb{R}^2$ como a imagem de um paralelogramo pode criar certas generalidades que dificultarão o desenvolvimento de novas capacidades e conhecimentos.

A apreciação pelo simples faz com que consideremos especificidades válidas para uma determinada situação particular, serem generalizadas. É o que pode acontecer com a imagem, por que procurar outras formas de visualizar determinados conceitos, se já colocamos uma forma que vale para tudo? Como aponta Bachelard, “Por que ir procurar mais longe? Porque não pensar seguindo esse tema geral? Por que não generalizar o que é claro e simples?” (1996, p.98). Somos facilmente tomados pela beleza do simples, do que já está subentendido, explicado.

Possivelmente esse pensamento é o que leva a inércia e estagnação, a um ser não pensante, que não questiona, que não pesquisa, movido pelo senso comum.

O exemplo apontado por Bachelard pode ser dado pelo conceito de “círculo” na geometria dos chamados ‘espaços métricos’ (podemos nos restringir ao plano). Nesses espaços a geometria é desenvolvida tomando como “distância entre dois pontos” uma fórmula distinta da pitagórica, que é dada por

$$d((x , y), (z , w)) = [(x – z)^2 + (y – w)^2]^{1/2}.$$

Por exemplo, a distância chamada ‘soma’ é dada por:

$$d((x , y), (z , w)) = |x – z| + |y – w|.$$

Para essa noção de distância, a imagem gráfica do círculo correspondente, como sendo o lugar geométrico dos pontos que estão a uma “distância” do centro igual a um raio dado, tem o formato “real” de um quadrado, no entanto suas qualidades teóricas são as de um círculo, por exemplo, o ser “redondo”, o que exige uma forma abstrata de visualiza-lo, uma visualização de segunda ordem.

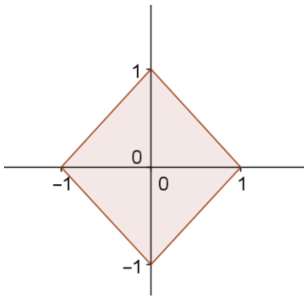

Figura 4: "Círculo” de centro a origem na geometria da “distância da soma”

O obstáculo aqui discutido é o da generalização, o da imagem primeira tomada como geral. Somos seres carregados de pré concepções, de conhecimentos acumulados durante a vida, por isso é importante que um conceito inicial seja refletido, investigado, para que assim possa devidamente ser construído e/ou reconstruído e interiorizado por quem o pensa. Porém, para essa cultura de pensamento seja estimulada, alguns obstáculos terão de ser destituídos. “... não se trata, portanto, de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental, de derrubar obstáculos sedimentados pela vida cotidiana” (BACHELARD, 2011, p. 23).

A visualização, o uso de imagens pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem, desde que não substituam o pensamento abstrato. Ou seja, o uso ingênuo de imagens pode ocasionar distorções conceituais, substituindo o sentido abstrato por analogias que não condizem em sua totalidade. Conforme apresenta Bachelard: "uma ciência que aceita as imagens é, mais do que qualquer outra, vítima de metáforas. Por isso, o espírito científico deve lutar sempre contra as imagens, contra as analogias, contra as metáforas" (BACHELARD, 2011, p. 48).

Bachelard não se opõe ao uso das imagens, analogias no sentido geral, mas se opõe ao uso ingênuo dessas capacidades, que pode desencadear uma desmotivação à busca por um conhecimento mais aprofundado, no momento em que as metáforas facilitam momentaneamente a compreensão do real.

Do ponto de vista epistemológico, as imagens particulares serão úteis ao conhecimento matemático se elas possuírem "características de generalidade" como teriam os chamados exemplos genéricos.

1.4.2 O abstrato

> *Somente a abstração desobstrui o espírito, tornando-o mais leve e mais dinâmico. (BACHELARD, 2011, p. 8)*

Mas, por que dar tanta relevância ao abstrato, uma vez que ele pode apresentar uma complexidade na interpretação e entendimento de alguns conceitos matemáticos? Para tentar responder a essa interrogação faz-se necessário pensar a visualização como algo que não somente é posto ao olhos, mas que envolva, além dos sentidos, capacidades como imaginação, intuição, como o exemplo anterior mostra. A ação de olhar pode não abranger a estrutura íntima, negligenciando-se a interpretação, o pensar, o perceber e o aprofundar.

A visão pode trazer um mundo de descobertas, conflitos e interrogações, seria mais do que o "olhar instantâneo", pois esse olhar é estático, não abarca tudo que levou a constituição da imagem, visualizar implicaria talvez em buscar por compreensões e sínteses. Quando a visualização é entendida somente como algo que é "visto", pode acontecer uma extensão abusiva das imagens, caminhando assim para a generalização errônea.

A abstração pode estimular a ir além da aparência, buscar na essência. O pensamento abstrato não engloba o mundo real e sim o mundo construído pela mente. Palavras chave desse processo são: raciocínio, imaginar, pensar, demonstrar, deduzir. Um exemplo é o conceito de infinito, nós não o vemos, mas podemos criar um modelo mental para ele, assim como fazemos com a quarta dimensão, com as "retas" esféricas e outros conhecimentos da matemática abstrata. Por isso, essa atividade mental pode desenvolver habilidades de abstrair as propriedades dos objetos mesmo sem tê-los diante os olhos. Sobre a abstração, Bachelard afirma:

> (...) nos propomos a mostrar este destino grandioso do pensamento científico abstrato. Para isso devemos provar que pensamento abstrato não é sinônimo de má consciência científica, como a acusação trivial parece dizer. Deveremos provar que a abstração desembaraça o espírito, que ela o alivia e que ela o dinamiza. Proporcionaremos essas provas estudando mais particularmente as dificuldades das abstrações corretas, assinalando as insuficiências dos primeiros intentos, o peso dos primeiros esquemas, ao mesmo tempo que destacamos o caráter discursivo da coerência abstrata e essencial que nunca logra seu objetivo da primeira vez. E para mostrar melhor que o processo de abstração não é uniforme, não titubearemos em empregar às vezes um tom polêmico, insistindo sobre o caráter de obstáculo que apresenta a experiência, estimada concreta e real, estimada natural e imediata. (BACHELARD, 2011, p. 8-9).

Tentando responder a pergunta colocada no início dessa seção, podemos pensar na abstração como o meio, e não o fim, ou seja, nossa base de pensamento se inicia por uma concretude bruta (sem muitas relações, teorias), então a abstração vem como mediação para que cheguemos numa "concretude pensada", elaborada.

Na abordagem de abstração tratada por Bachelard, o pensamento desperta do concreto que por sua vez está atrelado à informação geométrica, e depois parte para o concreto passível de um grau de abstração. Para isso, o autor elabora o conceito de "geometrização", que está "a meio caminho entre o concreto e o abstrato" (2011, p.7). "Como representação figurativa da realidade, a geometria expõe os graus de abstração, partindo do visível (figuras) para o invisível e apreensível apenas pelo raciocínio formal" (COSTA, 2012, p. 2).

Para problematizar a insuficiência do concreto para a formulação de teorias, Bachelard usa o conceito de 'espaço' no contexto da física. "Sente-se pouco a pouco a necessidade de trabalhar sob o espaço, no nível das relações essenciais que sustenta tanto o espaço quanto os fenômenos" (2011, p. 7), e mais, "para aprender o real, é preciso ter coragem de coloca-lo no seu ponto de oscilação, no qual mesclam o espírito de refinamento e o espírito geométrico” (2004, p.14).

Portanto, a abstração não trata de um processo linear, em que vai do concreto ao abstrato, mas trata de uma capacidade que permite dar movimento ao pensamento, renunciando ao conhecimento estático, primitivo[9] e ingênuo.

Analisamos assim a questão da “verdade” na ciência, o uso ingênuo das imagens, a questão da generalização assim como o conceito de abstrato. No próximo item, faremos um estudo sobre a “cientificidade da visualização”.

1.5 Qual a cientificidade da visualização?

> *Duvidar de tudo, ou acreditar em tudo são duas soluções igualmente cômodas: uma e outra nos dispensam de refletir. (Poincaré, 1988, p. 15).*

Ao iniciarmos a busca por textos, referências que abordassem de algum modo a ideia da cientificidade da visualização, encontramos inicialmente o termo ‘visualização científica’. Pesquisas como a dissertação de Buriol (2006) apresentam o conceito de visualização científica como uma espécie de visualização voltada para a área computacional, que consiste na transformação de dados, estáticos ou dinâmicos, em representações que refletem a informação contida nos mesmos de forma eficiente e precisa. Essa visualização é muito utilizada na medicina, com os exames de ressonância magnética e na biologia com a visualização de proteínas entre outros campos. Segundo Buriol:

> Visualização Científica (VC) é a área da computação dedicada à visualização de dados físicos, ou científicos, geralmente provenientes de medições ou simulações numéricas, fazendo uso de Processamento de Imagens (PI) e Computação Gráfica (CG). Algumas técnicas de VC, cujos primeiros registros datam do século XII, são utilizadas até os dias de hoje, para visualização de grandes conjuntos de dados complexos, e são implementadas em muitas ferramentas computacionais para VC disponíveis atualmente. (BURIOL 2006, p. 9).

---

[9] Primitivo aqui entende-se por primeiro, por um modo de conceber desprovido de argumentação sólida, rudimentar.

Por mais interessantes que sejam as características e a utilização da visualização científica, ela não se relaciona com o nosso tópico de discussão, pois essa visualização se encarrega de traduzir dados numéricos em figuras, em imagens e o que pretendemos vai além disso: entender a visualização como um forma de interpretar, como o que foi discutido no capítulo 2, sobre a visualização algorítmica, geométrica e contextualizada.

Podemos pensar na visualização científica como visualização da informação, entendida como aquilo que pode ser codificado ou quantificado, enquanto que a visualização que nos interessa envolve um conhecimento mais qualitativo que quantitativo.

Quando pensamos na palavra 'cientificidade' e na palavra 'visualização', parece que ambas não se afinam, posto que a visualização não apresenta determinadas prerrogativas para ser declarada como método científico. Mas quais são os critérios exigidos para que uma teoria, um método seja de fato, considerado cientifico?

Para os realistas científicos, as teorias aceitas como cientificas deveriam estar relacionadas com a verdade e principalmente com o que pode ser visto, com o real.

> .....uma teoria é empiricamente adequada porque ela é verdadeira. E se não acreditamos que em determinado campo de investigação nosso conhecimento tenha avançado o suficiente para que tenhamos atingido a verdade, então dizemos que a teoria é empiricamente adequada porque ela é pelo menos *aproximadamente verdadeira. (*DUTRA, 1998 p. 16).

Mas o próprio conceito do real é problemático, pois depende de pressupostos cognitivos e epistemológicos de quem o interpreta, ou seja, o que é real para um, pode não o ser para outro. Como a afirmação que Meneguetti (2010) faz em relação ao que Platão considerava por real:

> Platão (427-347 a.C) acreditava que a diversidade e mutabilidade das coisas não permitiam alcançar uma verdade fixa, necessária e permanente, como exige o conhecimento científico (episteme). As coisas fluem, são e não são, por isso possuem características definidas estáveis, devido à diversidade de opiniões entre os homens. Esse mundo mutável é um mundo de meras aparências, de sombra, que esconde o homem no relativismo (se as coisas são e não são, nada é verdade ou falso em si mesmo). (MENEGUETTI, 2010 p.23).

Filósofos como Descartes, Bacon, Popper, Kuhn, se ocuparam dos problemas epistemológicos da ciência, identificando contradições, novos problemas, novas teorias. Como por exemplo o realismo de Descartes, em que não existe divergência entre o pensamento de quem pensa e a realidade. A cientificidade discutida por esse filósofo contestava o empirismo, essencialmente a experiência como forma de chegar a comprovação de uma verdade, caracterizando a experiência como uma qualidade secundária, ou seja irreal, assim como a imaginação e o sentido.

> Para passar da minha existência, dos meus pensamentos, para outras existências, isto é, para se chegar à realidade, Descartes objetiva fazê-lo reduzindo os pensamentos confusos e obscuros a pensamentos claros e distintos. O mundo sensível, por exemplo, compõe-se de pensamentos obscuros e confusos que dão vulto e margem à dúvida. Mas eu posso analisar a obscuridade e a confusão desses pensamentos e decompô-los nos seus elementos. As vivências da psicologia, que chamamos de sentimentos, paixões, emoções, ou seja, toda a vida sentimental, tudo o que existe em nossa alma, que não seja puro pensar, é para Descartes, também pensar, porém um pensar confuso, um pensar obscuro. Sua ideia consiste em eliminar do universo a qualidade e não deixar mais do que a quantidade. (MENEGUETTI, 2010 p. 43).

Já os antirrealistas defendem a adequação empírica[10] como aceitação de uma teoria, e não sua verdade (aproximada). Não obstante a aceitação da teoria, devemos pensar também na confirmação da teoria. Segundo os empiristas lógicos, uma teoria pode ser verificada pela experiência. Porém a experiência confirmada hoje, pode não ser confirmada no futuro. E mais, uma lei pode carecer de novas hipóteses, ou ser substituída por uma outra lei superior.

Nesse sentido as discussões de Thomas Khun e de Paul Feyerabend, mostram-nos que a aceitação de uma teoria vai muito além de verificar se ela se aproxima da verdade ou se faz um retrato fidedigno do mundo.

> Se queremos alcançar um conhecimento científico para além do experimentalismo restrito, e obter um conhecimento mais alargado, compreensivo e explicativo, teremos que entrar em consideração dos contextos sociais e psicológicos, e com descrições, análises e formas de interpretação que vão muito para além de metodologia científica que tem sido usada nas ciências da natureza. (BOAVIDA et al, 2006, p. 56).

[10] A crença de que a teoria salva os fenômenos ou descreve corretamente o que é observável. (DUTRA, 1998, p. 94)

Muitos problemas dessa magnitude foram discutidos e ainda são discutidos até os dias de hoje, em busca de um conhecimento seguro, constante e universal. O conhecimento cientifico ocupa-se de significados, universalidade, objetividade, racionalidade, enfim, em busca da verdade. Mas como podemos então, falar sobre a cientificidade da visualização no campo da matemática, sendo que ela escapa de uma racionalidade científica?

Primeiramente é importante distinguimos alguns conceitos, como o da experiência na ciência para a experiência na matemática. Ou seja, a experiência na ciência é diferente da experiência matemática, esta última se dá pela imaginação, pela intuição, pela visualização, como forma de dar realidade à matemática. Segundo Cifuentes e Negrelli (2007), "A experiência matemática visa desvelar a estrutura íntima do objeto matemático e seu modo de geração, através da manipulação de suas representações, e necessita da intuição matemática para sua realização" (p. 76).

> Os matemáticos não estudam os objetos, mas as relações entre os objetos; portanto, lhes é diferente substituir esses objetos por outros, desde que as relações não mudem. A matéria não lhes importa, mas, unicamente, a forma. (POINCARÉ 1988, p. 34).

Mesmo diferenciando conceitualmente a experiência matemática para a científica, é importante analisarmos que a ciência faz o uso do rigor matemático para algumas de suas comprovações. Como salienta Mocrosky e Bicudo (2013)

> Ainda no século XVII, Descartes solidificou um pensar científico e filosófico, ancorado na tese de que o conhecimento produzido anteriormente à era moderna não se prestava à ciência. Entendeu ser preciso mais rigor nos métodos para legitimar as descobertas, utilizando-se de processo analítico que tornasse preciso o que está na mente (res-cogitans) e na matéria (res-extensa) (MOCROSKY e BICUDO, 2013 p. 409).

Podemos iniciar nossa reflexão sobre a cientificidade da visualização analisando o ato, a ação de ver, visualizar, constituinte da geometria de Euclides como protótipo de visualização em matemática. Na geometria de Euclides, utilizavam-se os processos de construção em que a visualização era tida como comprovação, no qual a enunciação dos postulados já apresentava a ideia de construção, traçado. Aí nos deparamos com o surgimento das geometrias não-euclidianas, que colocava em crise o próprio conceito de 'evidência'. Na geometria euclidiana o espaço em que os objetos existem é o real, o espaço observável, onde os entes geométricos e as relações se concretizam. Porém, nas geometrias não-euclidianas, os objetos geométricos, assim como suas relações e estruturas, se concretizam nos chamados espaços artificiais, criados para que possamos ver os objetos e seus fenômenos. Desta maneira surge o questionamento: qual das geometrias é a verdadeira?

Segundo Poincaré essa pergunta não tem nenhum sentido, como o próprio autor menciona, nenhuma geometria pode ser mais verdadeira que a outra, o que pode acontecer é uma ser mais "cômoda" que a outra. A geometria euclidiana será a mais cômoda pela sua simplicidade, pela sua possibilidade de experimentação e mais:

> Porque está bem de acordo com as propriedades dos sólidos naturais, que têm características semelhantes às de nosso olho e de nossos membros e com os quais construímos nossos instrumentos de medida. (POINCARÉ, 1988, p. 54).

Nas geometrias não-euclidianas, dá-se início a um processo de discussão teórica com enfoques axiomático e analítico. Porém, mesmo que incorporada na teoria, a visualização se faz presente, não mais evidente, mas imaginável, como forma de pensar a matemática. Surgem assim os espaços artificiais, os modelos matemáticos, como realizações da teoria sendo "reais" o quanto possível. "Um modelo não é uma cópia do real, é uma realidade diferente que se comporta como o real" (CIFUENTES, 2003 p. 70). Boavida aponta, então, esse desligamento entre o enfoque lógico das geometrias não-euclidianas e seu enfoque realista:

> O que implicava saber que critério adotar: o da evidência assente nas intuições sensíveis, como era tradição, ou o critério de verdade e do rigor das deduções uma vez que as fontes sensíveis se revelavam problemáticas? (...) A geometria deixa para segundo plano o problema da origem empírica dos seus axiomas, para valorizar o rigor lógico da sua construção a partir dos axiomas adotados. (BOAVIDA, et al, 200, p. 52).

Notemos então que no enredo de toda essa discussão, fizemos uma abordagem sobre a problemática do conceito do real e da verdade na ciência, a distinção da experiência científica para a experiência matemática, a passagem dos processos de construção da geometria euclidiana para as geometrias não-euclidianas. Portanto, quando tratamos da cientificidade da visualização abrimos um solo de muitas interpretações e questionamentos. Primeiramente porque a palavra cientificidade nos remete a método para abordar a forma e a experiência. Pensamos na possibilidade de existir, ou não, um método para visualizarmos relações matemáticas, ou até mesmo, questionamos se o modo de ver pode passar por um sistema de reprodução.

Vamos então dar mais ênfase a essa nossa reflexão: a visualização é uma espécie de concretização, no que se refere a concretizar o abstrato, aquilo que pode ser terminado, concluído, enfim, visualizado. Como por exemplo, concretizar os números complexos na sua forma geométrica, ou mesmo aceitar o infinito em ato dando-lhe concretude, visualizando-o através do conceito de 'cardinalidade'. Podemos então, refletir sobre a cientificidade da concretização.

Pode existir uma forma, um método pelo qual concretizemos algum conceito matemático, e mais, que essa concretização possa ser reproduzida. Como por exemplo, os números reais é um sistema algébrico de números, mas quando os colocamos na reta real, viram pontos, sendo assim uma interpretação geométrica, ou seja, podemos descobrir as propriedades dos números reais através de suas propriedades geométricas.

Na matemática não existe uma única forma de concretizar algum conceito matemático, como por exemplo, ao ensinar potências utilizando-se do conceito de área, ou até mesmo recorrendo-se ao uso dos fractais. Mas o que vale destacar é a possibilidade de reproduzir essa concretização, que se dá a partir do momento em que ensinamos aos alunos formas de se atingir o conhecimento não apenas pelas vias algorítmicas, mas também geométricas, intuitivas. Uma base e um expoente, um conjunto de propriedades de potências podem não fomentar o conhecimento sobre esse conceito, mas sim a sua concretização, ou seja, sua passagem do abstrato para o concreto.

Quando pretendemos tratar da cientificidade da visualização, ou da concretização como chamamos acima, devemos pensar até que ponto a visualização admite um método científico para seu processo, até que ponto pode ser objetiva. É possível tornar certos processos de visualização objetivos? Por objetivo, podemos considerar aquilo que é ou se tornará idêntico, comum a todos. Um exemplo é a construção dos espaços artificiais para as geometrias não-euclidianas. Quando criamos um espaço para a geometria abstrata, criamos a possibilidade de concretizar os objetos da geometria, ou seja, estamos concretizando coisas abstratas, tornando-as objetos geométricos. Porém, tal processo de concretização pode não ser totalmente objetivo, pois uma vez que criamos o instrumento de visualização podemos usá-lo de tal maneira que encontraremos alguma propriedade do objeto que outra pessoa ainda não viu, mas se mostrarmos a essa pessoa como chegar lá ela também vai ver, ou pode até mesmo encontrar outras propriedades através da mesma ferramenta. Isso significa que a visualização não é um mecanismo único.

Quando temos um objeto e damos diferentes intepretações a ele, estamos tratando-o de forma subjetiva. Na questão da subjetividade, nos referimos a um objeto passivo de interpretação pessoal, interpretação essa que criamos a fim de dar sentido a algo, no caso da matemática podemos mencionar a predição de sequências. Por exemplo, $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\right\}$, os quatro termos dessa sequência são "suficientes" para predizermos que ela segue a seguinte lei de formação: $\frac{1}{2^n}$. Mas agora analisemos outra sequência: $\{3, 5, 7 \ldots\}$, neste caso, com esses três termos é possível predizer que a sequência segue a lei de formação: $2n + 1$, porém podemos também dizer que segue a lei de formação de números primos. Desta forma, podemos ter dois objetos diferentes, que dependem da interpretação que damos as sequências citadas.

Existem também os casos em que damos diversos sentidos a um mesmo objeto, e quando fazemos isso estamos buscando formas de visualizar esse objeto, então dar sentido é outra forma de visualizar. Como o exemplo mencionado por Cifuentes (2010):

> Na matemática pensada como ciência abstrata, o conceito de derivada, por exemplo, tem um significado dado, dentre outros, através de sua definição como um limite. Mas **interpretar** ela como o coeficiente angular da reta tangente, ou como uma velocidade ou ainda como uma taxa de crescimento, é dar sentidos diferentes ao mesmo conceito: um sentido geométrico no primeiro caso, um sentido físico no segundo, e um sentido talvez econômico ou biológico no terceiro. (p. 18, grifo nosso).

Ou seja, quando tratamos da derivada em relação à velocidade, estamos dando um sentido dentro de um ambiente físico, a derivada "cobra a vida" em um ambiente físico manifestando-se como velocidade, da mesma forma que "cobra a vida" em um ambiente geométrico manifestando-se como a inclinação de uma tangente.

Se na matemática é possível concretizar, assim como também é possível dar diferentes sentidos para um mesmo objeto, de que forma podemos sustentar sua exatidão? Pois ao atribuirmos diferentes sentidos, significa que nem sempre ao estudarmos a matemática chegamos a um consenso, ela está "aberta" para interpretações e esse fato pode nos levar a pensar na sua incompletude.

> Como o ideal do conhecimento científico é a objetividade, o problema de confiabilidade do conhecimento resultante de uma abordagem qualitativa é colocado. Mas a objetividade da ciência não significa sua verdade, mas sim sua possibilidade de crítica e teste, deve ser possível repetir as condições de um fenômeno para re-estudá-lo. (CIFUENTES 2010, p. 21).

A exatidão matemática torna-a objetiva, já a sua "liberdade" de compreensões a torna subjetiva, mas a matemática só avança quando ela é criada e recriada, "rompendo barreiras com as aparências, projetando o olhar para além do perceptível" (Mocrosky e Bicudo, 2013, p. 406).

Nesse sentido, ao realçarmos as características objetiva e subjetiva da matemática, um cuidado deve ser tomado, o de querer estabelecer o certo e o errado, quando no real nenhuma se sobressai em relação a outra, essas características se completam, é necessário a objetividade assim como é inevitável a subjetividade. Como aponta Cifuentes (2010), "a objetivação do infinito em ato é que fez possível o desenvolvimento da matemática posterior a Cantor, constituindo-se num dos grandes princípios epistemológicos em que se baseia a matemática atual" (CIFUENTES, 2010, p. 16).

Uma característica que pode elucidar nossa discussão sobre o tornar objeto e o sentido é a concepção do conhecimento qualitativo, baseada na ideia da atividade interrogante do conhecimento. No sentido quantitativo, que se declina ao objeto, existem as perguntas e uma resposta tomada como "verdadeira" e única, porém, na análise qualitativa, que se aproxima ao subjetivo, existem para além das perguntas, hipóteses, novas ideias, imaginações, interpretações e uma abordagem crítica, buscando sentido aos discursos. Ou seja, o foco não é a explicação, e sim a interpretação, levando em consideração os juízos ou argumentos estéticos.[11] De acordo com Cifuentes (2010) "os estudos qualitativo-interpretativos na matemática

[11] Os juízos estéticos fazem parte do conhecimento que provém da nossa sensibilidade abstrata para sua compreensão. (CIFUENTES 2010, p. 20).

poderão contribuir a produzir teorias confirmáveis e confiáveis, mudando o paradigma da cientificidade da matemática".

Retomando nosso questionamento inicial desse capítulo: Qual a cientificidade da visualização? Concluímos que não existe uma resposta única e verdadeira para essa pergunta, pois a visualização, como discutida nesse capítulo, está atrelada à configuração de um espaço para a experiência matemática cujo acesso depende das capacidades de intuição e imaginação de cada pessoa. Um modo de ver pode ser reproduzido, mas isso não garante que mesmo existindo um método "universal" para se visualizar um fenômeno, a liberdade de interpretação (esta conduzida pela intuição e imaginação) não contribua para chegarmos a diferentes concepções desse fenômeno.

No próximo capítulo, no intuito de compreender as implicações da geometria no processo de visualização, faremos um estudo do desenvolvimento histórico da geometria, no sentido de evolução, de como os apelos construtivos foram dando sentido a esse processo de visualização.

2. GEOMETRIA

2.1 A Visualização na Evolução da Geometria

O tema 'evolução da geometria' nos permite percorrer vários caminhos, o da história desde as civilizações antigas, analisando como se fez o uso da geometria até os dias de hoje. Podemos estudar a evolução de um determinado conceito geométrico, como por exemplo o conceito de paralelismo. Enfim, o estudo da geometria, ainda mais em seu enfoque histórico, perfaz um cenário de muitas possibilidades.

O sentido dado para o desenvolvimento histórico da geometria a ser discutido nesse capítulo, nos remete a evolução, ou seja, como possíveis modificações conceituais e construtivas envolvendo a visualização e as concretizações foram se desenvolvendo ao longo dos anos. O caminho que vamos percorrer para compor esse capítulo se inicia nos fundamentos da geometria como feita por Euclides, em que os apelos construtivos eram considerados legítimos nas argumentações. Sequencialmente analisaremos de que forma se deu o nascimento da Geometria Analítica, em que as intuições geométricas euclidianas são traduzidas em intuições aritméticas.

O primeiro entendimento da geometria como concretização veio da noção de espaço, o que o próprio nome 'geometria' etimologicamente traduz: medida da terra. O espaço que tratamos aqui é o lugar onde as coisas acontecem e mais, onde os objetos matemáticos se movimentam, se transformam. De acordo com Cifuentes (2012)

> Os objetos matemáticos existem como "objetos-coisas", eles têm uma "substância" (Ex: as figuras geométricas são objetos num certo "espaço", o espaço pré-existe aos objetos, os números são objetos que referem a alguma "medida", que expressam alguma extensão). (CIFUENTES, 2012, p. 5).

O contexto histórico que traduz o início da utilização da geometria é apreciado por Leonard Mlodinow, no Livro *A Janela de Euclides*.

> A cobrança de imposto foi, talvez, o primeiro imperativo para o desenvolvimento da geometria, pois embora teoricamente o faraó possuísse todas as terras e bens, na realidade os templos e até indivíduos em particular possuíam imóveis. O governo determinava os impostos da terra baseado na altura da enchente do ano e na área de superfície das propriedades. Os que se recusavam a pagar podiam ser espancados no

> local pelos guardas, até se submeterem. Pedir empréstimo era possível, mas a taxa de juros era baseada numa filosofia do “sejamos práticos”: 100% ao ano. Como muita coisa estava em jogo, os egípcios desenvolveram métodos bastante confiáveis, embora tortuosos, para calcular a área de um quadrado, de um retângulo e de um trapezoide. Para achar a área de um círculo, eles consideravam semelhante a um quadrado com lados iguais a 8/9 de diâmetro. Isto é equivalente a usar para pi um valor de 256/81, ou 3,16, uma estimativa alta, mas com o erro de apenas 0,6%.. (MLODINOW, 2010, p.19).

Com isso, percebe-se que o símbolo, o número até então não tinha sido adotado, o que se utilizava eram as medidas, proporções de tamanho, a geometria. Os poucos registros datados desse período, mostram que a preocupação das civilizações egípcia e babilônica era resolver o problema inerente ao cotidiano, seja o imposto, o cálculo da área de um terreno, etc. Mesmo desvendando teoremas importantes, como a proporção dos lados do triângulo retângulo, culminando no Teorema de Pitágoras, não questionavam o ‘porque’ da relação, ou como poderiam aplicá-la em outra área do conhecimento, assim como estudá-la com o objetivo de expandi-la. De acordo com a analogia feita por Mlodinow:

> Eles eram mais parecidos com os biólogos de campo clássicos, catalogando pacientemente as espécies, do que com geneticistas modernos que procuravam ganhar uma compreensão de como o organismo se desenvolve e funciona. (MLODINOW, 2010, p. 22).

Um dos grandes responsáveis pela sistematização da geometria foi Tales de Mileto[12], que foi em busca de explicações para os fenômenos que aconteciam, não aceitava justificativas pautadas em puras observações, mas sim pautadas no raciocínio, em regras. “Ele foi o primeiro a demonstrar os teoremas geométricos do tipo que, séculos mais tarde, Euclides juntaria nos seus *Elementos”* (MLODINOW, 2010, p. 25).

O primeiro exemplo de fenômeno físico descrito em termos matemáticos foi apresentado por Pitágoras, precursor de Euclides, ao verificar a relação entre o comprimento de uma corda vibrante e a altura da nota musical que ela produz.

> Para Pitágoras, muito daquilo que a matemática tinha de intrigante veio dos muitos padrões numéricos que ele e seus seguidores descobriram. Os pitagóricos imaginaram os números inteiros como pedrinhas ou pontos, dispondo-as em certos padrões geométricos. Descobriram que alguns

[12] Tales de Mileto comerciante grego que virou filósofo há pouco mais de 2500 anos. Foi ele quem preparou o cenário para as grandes descobertas dos pitagóricos e, por fim, para os *Elementos* de Euclides. (MLODINOW, p. 23, 2010).

> números podem ser formados arrumando as pedrinhas igualmente espaçadas em duas colunas de dois, três colunas de três, e assim por diante, de modo que a disposição formasse um quadrado (...) Eles descobriram que outros números podiam ser formados dispondo as pedrinhas em colunas de um, dois, três, e assim por diante, formando triângulos: 3, 6, 10 etc. (MLODINOW, p. 30, 2010).

Desse momento em diante, as propriedades geométricas até então conhecidas, começam a ser representadas por números tanto que o lema da escola pitagórica era: tudo é número. “Se não fosse pelo número e pela sua natureza, nada do que existe seria claro para ninguém” (MLODINOW, p.34, 2010). Ou seja, a ideia a linguagem, de se comunicar[13] a geometria consequentemente a matemática, começava a nascer. Segundo Cifuentes (2003), para os pitagóricos, a essência do universo é o número, e o método para o estudo do número é geométrico.

Em questão a discussão em torno ao que se utilizou primeiro o número, como contagem, ou a geometria, como medida, não é possível chegarmos a uma conclusão, o que sabemos é que antes dos gregos existiam os conceitos geométricos e aritméticos e em todos os casos a teoria e a prática. Na prática os números serviam para contagem e na teoria havia a preocupação para fundamentar o conceito de número (Pitágoras). Não se sabe ao certo o que veio primeiro, mas os números eram geometricamente entendidos, por exemplo, alguns números inteiros eram conhecidos por sua forma pentagonal. Os números reais não eram vistos como números, mas como segmentos. A álgebra geométrica surgiu para lidar com segmentos e não inicialmente com números.

Em entendimento da necessidade de se comunicar a matemática, Euclides organizou todo o conhecimento matemático de sua época na obra *Os Elementos*[14]. Essa obra é constituída por treze livros (capítulos), que sistematizaram conhecimentos de geometria, aritmética e álgebra adquiridos ao longo do tempo, desenvolvendo uma lógica da demonstração e da construção como parte estruturante do método chamado, a partir dele, de ‘axiomático’, que por sua relação peculiar com a verdade matemática é denominado também de ‘material’ ou

[13] Comunicar é pôr um modelo ou imagem mental no espírito do interlocutor. (CIFUENTES, 2003, p.61).

[14] Não se trata exatamente de um livro, mas de 13 rolos de pergaminhos. A obra foi escrita por volta de 300 a.C ao ser convidado a ser (o primeiro) professor de Matemática do Museu de Alexandria. O museu criado por Ptolomeu I, um dos generais de Alexandre, tornou-se o maior centro acadêmico da época, superando a rival Academia de Platão, em Atenas. (ANDRADE, p.2, 2007)

‘concreto’. Para os gregos, fazer matemática não produzia conhecimentos, significava caminhar na direção de verdades eternas, e somente por ela, a matemática, era possível tal façanha (ANDRADE, 2007).

A ideia de demonstração que nasce com os gregos, em que a uma propriedade pode ser consequência de outra, não é a mesma que entendemos hoje. A ideia de demonstração está ligada intimamente a dedução e o processo dedutivo têm a ver com o uso de uma lógica rigorosa (no sentido de regras). Mas na época de Euclides, os procedimentos demonstrativos não se "limitavam" aos dedutivos, eles permitiam outros tipos de argumentações que não eram dedutivos, por exemplo, as argumentações visuais. Não ser de caráter dedutivo, significa que sua verdade não está estritamente estabelecida com rigor, sua verdade é sujeita a alguma interpretação. O caráter da demonstração em Euclides, além de ser lógico era também epistemológico, porque ambos conduzem ao conhecimento da matemática.

A geometria de Euclides é o estudo do espaço real, pré-determinado ou *a priori,* em que a verdade dos fatos geométricos é estabelecida, segundo Cifuentes (2013), mediante o confronto com essa realidade espacial, no caso dos postulados do sistema, o que os torna verdades “evidentes”, e no caso dos teoremas, por demonstração lógica e/ou construção geométrica, esta última permitindo uma “visualização/concretização”, nesse espaço, dos fatos que os teoremas expressam. A geometria de Euclides é de caráter construtivo e os diversos teoremas construtivos são essencialmente teoremas de existência.

> Desde os inícios da geometria, como ciência experimental, até fins do século XIX, inclusive passando pelo desenvolvimento axiomático-material da geometria de Euclides, o aspecto visual, dado por meio de figuras e construções geométricas, tem sido tão importante quanto a demonstração. (CIFUENTES, 2003, p.70).

Podemos observar na própria enunciação dos postulados o aspecto construtivo dessa geometria:

Postulado I: “Pode-se “traçar” uma reta de um ponto a outro”.

Postulado II: “Uma reta pode ser “prolongada” em ambos os sentidos quanto se quiser”.

Postulado III: “Pode-se “traçar” um círculo com centro e raio (segmento) dados”.

Postulado IV: “Todos os ângulos retos são iguais entre si” (isto é, podem se ajustar um ao outro de modo que coincidam).

Palavras como ‘traçar’, “prolongar”, dão a conotação de que a geometria de Euclides era de origem empírica, criada e formulada a partir da experiência que se tinha em relação à plantação, medição, agricultura. O espírito de materialidade e concretude ia ao encontro da verdade evidente, o que pode ser visualizado. Conforme aponta Andrade (2007):

> Sem esforço algum, percebe-se a origem empírica dos quatro primeiros postulados, eles são descrições simples e claras das técnicas utilizadas na agrimensura antiga. Tais processos técnicos foram adotados como os princípios mínimos para o desenvolvimento de uma teoria apropriadamente denominada Geometria (...). (ANDRADE, p. 4, 2007).

Outra característica que nos mostra a maneira de criar e desenvolver a geometria grega é o procedimento de “superposição”, que tem o caráter experimental de estabelecer a igualdade entre as figuras, possibilitando a movimentação delas no espaço real. O processo de superposição não é puramente lógico-geométrico, é mais um processo extra geométrico de tipo experimental e intuitivo (visualização). (CIFUENTES, 2003)

Por exemplo, o postulado IV citado acima: “Todos os ângulos retos são iguais entre si” significa que, na geometria de Euclides, eles podem se ajustar um ao outro de modo que coincidam, ou seja, até se tornarem iguais.

Assim como o processo de superposição, as técnicas de desenho geométrico[15] eram consideradas como método de raciocínio legitimo na geometria grega e foram indispensáveis para dar visualidade para as construções, constituindo-se num método de raciocínio visual “legítimo”, não sendo, então, apenas ferramentas de ilustração ou auxiliares na constituição da verdade.

Porém, o que era considerado legítimo era o processo de construção e não o resultado da construção, isto é, a figura final. Nesse processo a figura vira um representante ideal do resultado pretendido.

Desta forma, compreendemos que a visualização, a construção e a materialidade eram qualidades essenciais na geometria de Euclides. Porém, faz-se importante distinguirmos o que denominamos por geometria euclidiana, da

---

[15] A régua e o compasso são concretizações físicas da reta finita e da circunferência , consideradas pelos gregos como figuras básicas. (CIFUENTES, 2003, p. 65)

geometria de Euclides. Esta última é a que nos referimos até o momento, que utiliza da materialidade e do construtivo, porém, a 'euclidiana' na denominação de Cifuentes (2013) é uma versão mais moderna, em que o espaço real começa a anunciar a possibilidade de existência do espaço artificial.

> A geometria que chamaremos de 'euclidiana' e, portanto, diferenciando-a da de Euclides, é a versão que começa a ser desenvolvida na modernidade a partir do advento da geometria analítica no século XVII, criando um espaço artificial, o plano cartesiano, onde os objetos geométricos adquirirão novos significados. Esse enfoque analítico da geometria se consolidará no século XIX com o desenvolvimento da teoria de grupos, especialmente dos grupos de transformações que, através do conceito moderno de 'isometria' permitirá um tratamento "mais rigoroso" e formal do processo de superposição euclidiano ... Esse tratamento analítico será tomado como modelo para as novas geometrias "planas" não-euclidianas, fornecendo para elas espaços de concretização, *a posteriori*, de seus objetos e procedimentos. (CIFUENTES, p. 2, 2013).

Em vista disso, destacamos a seguir a passagem da geometria de Euclides para a geometria analítica. A associação de números a segmentos de reta foi o que permitiu Descartes definir o que chamamos de reta numérica, a base do sistema de coordenadas da geometria analítica. Essa reta numérica passará a ser a reta real no séc. XIX, no processo de aritmetização da análise.

> Na modernidade, a partir do século XVII, a geometria segue dois caminhos paralelos, ainda o axiomático, incorporando novos conceitos, por exemplo, os de perspectiva que já os artistas vinham utilizando, e o analítico, desenvolvido primeiro por Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) que incorporam o uso de coordenadas, transformando assim a intuição geométrica do espaço físico numa intuição numérica de um espaço matemático "artificial": o plano cartesiano. (CIFUENTES, 2013, p.5).

Enquanto que na geometria euclidiana estuda-se o espaço (plano) —real ou físico, o espaço da experiência e da intuição (pré existente = *a priori*), na geometria analítica estuda-se o espaço matemático, cartesiano, baseado nos números reais (pós existente = *a posterior*). Porém, não é pelo fato de a geometria deixar de se concretizar no espaço real que ela perde seu lado visual, na verdade, esse aspecto visual ganha forma com os novos espaços, criados justamente para tornar visível essa geometria. Tais espaços são espaços de realização ou concretização da geometria euclidiana, nesses espaços se concretizam, de outra maneira, os objetos geométricos, como ponto, reta, plano, ângulo.

Algumas diferenciações da geometria de Euclides para a geometria analítica aparecem nas definições de ponto, reta, etc:

TABELA 2: COMPARATIVO ENTRE A GEOMETRIA DE EUCLIDES COM A GEOMETRIA ANALÍTICA

GEOMETRIA DE EUCLIDES	GEOMETRIA ANALÍTICA
Plano euclidiano	Plano cartesiano
Ponto geométrico	Par ordenado
Reta geométrica	Equação da reta
Outros objetos geométricos	Novos significados

Outra questão marcante dessa passagem para a geometria analítica é a aceitação do infinito em ato[16]. Na geometria de Euclides a reta era aceita como infinita em potência[17] como consta no postulado II sobre o prolongamento de segmentos. Contudo, conforme aponta CIfuentes (2013), analisando o processo de prolongamento no postulado V, “se duas retas são cortadas por outra formando ângulos de um mesmo lado com a soma menor que dois ângulos retos, então, as duas retas quando prolongadas suficientemente se encontram num ponto”, devemos reparar que se exige a conclusão ou término desse processo de prolongamento ao anunciar a existência do ponto de interseção de certos pares de retas quando “prolongadas suficientemente”. A grande discussão se dirige ao fato do infinito em ato ser classificado como não evidente e de difícil visualização.

E não obstante, o processo de superposição também é questionado na geometria analítica, posto que na geometria de Euclides o espaço bidimensional não independe do tridimensional, como por exemplo a superposição de triângulos por reflexão, em que para verificar a igualdade precisamos tirar um dos triângulos fora do plano, girá-lo e voltar a colocá-lo (CIFUENTES, 2003). Porém já na geometria analítica, o espaço bidimensional existe independente do tridimensional. Hilbert toma o conceito de “congruência de segmentos” como primitivo e define “superposição” (ou congruência de figuras) através de transformações rígidas. (CIFUENTES, 2003, p.70)

[16] Infinito em ato é o infinito acabado, terminado, apreendido em sua totalidade. Por exemplo, o infinito do conjunto dos números naturais pensados todos eles simultaneamente: {1, 2, 3, ...}.

[17] Infinito em potência é o infinito que pode ser continuado, estendido, aumentado, como por exemplo o infinito dos números naturais em sua gênese indutiva.

Portanto, o período de passagem da geometria de Euclides para a analítica foi considerado como o de “crise da evidência”, em que o real deixa de ser o primordial. De acordo com Cifuentes, esse período é marcado pela desvizualização, em que atinge seu ápice com os processos de “rigorização” da análise matemática e a formalização da geometria. Porém, como dito anteriormente, toda a desvinculação dos aspectos reais e materiais não faz com que a visualização seja esquecida, até porque com processo de desvizualização desconstruímos para reconstruir, tudo o que era evidente no espaço real, agora será visível nos espaços artificiais.

2.2 Implicações didáticas do processo de visualização na geometria

No capítulo 1 verificamos que a visualização está atrelada a vários aspectos, entre eles: intuitivo, cognitivo, experimental, porém, a atividade de dar forma ao pensamento está também muito presente na geometria, e é essa conexão entre visualização e geometria que discutiremos nessa seção.

Segundo Dreyfus (1991, apud COUY e FROTA, 2007) “A visualização é um processo através do qual as representações mentais podem ganhar vida”. O pensamento visual contribui para o desenvolvimento dos argumentos algébricos e analíticos em sala de aula, aperfeiçoando no aluno a capacidade de leitura e interpretação das ideias matemáticas, utilizando a geometria como meio para representar conceitos e as relações matemáticas. Como Cifuentes relata: “A visualização é uma forma de pensamento e, portanto, é possível também argumentar através dela” (2010, p. 25).

Quando procuramos entender determinados conceitos matemáticos, muitas vezes tentamos “enxergar o que acontece”, mesmo que de forma intuitiva. Esse processo de “geometrização”, consiste em estabelecer o elo entre a algebrização e a visualização geométrica. Com base nisso, Lorenzato (1995) menciona em seu artigo, que a geometria pode esclarecer situações abstratas, facilitando a comunicação da ideia matemática, realizando uma verdadeira tradução dos conceitos para o estudante. Este mesmo autor menciona:

> Einstein tinha o hábito de geometrizar suas ideias: dizia que facilitava a comunicação delas e a evolução de seu pensamento; em 1921, ele escreveu "Atribuo especial importância à visão que tenho da Geometria, porque sem ela eu não teria sido capaz de formular a teoria da relatividade”. (LORENZATO, 1995, p. 6).

Em conformidade, Alsina (1999, apud COSTA, 2000) esclarece a importância de trabalhar conceitos geométricos sob a perspectiva da intuição e da visualização em sala de aula:

> Não servem nem os elementos de Euclides, nem os tratados de Bourbaki, nem os livros sábios de geometria métrica, nem os mais sofisticados livros de álgebra linear. O silêncio e o esquecimento menos servem. Fazer geometria na sala de aula não é repetir a história. A geometria no ensino da matemática deve ser a geometria útil para todos: o conhecimento matemático do espaço. Uma geometria baseada na intuição e na experimentação aconselhada pelo sentido comum; rica em temas de representação e interpretação; capaz de ordenar, classificar e mover figuras planas e espaciais; audaz na combinação de linguagens diversas (gráficas, analíticas e simbólicas...); apoiada no rigor das definições e das deduções sobre factos relevantes; com técnicas diversas para medir, construir e transformar, induzindo à compreensão do diálogo plano-espaço; aberta à interdisciplinaridade com as ciências e as artes, paradigma da modelização matemática; predicadora de aplicações assombrosas e relações interessantes (...) esta é a geometria com a qual nós gostaríamos de educar todos. (ALSINA, 1999 apud COSTA, 2000, p. 158).

É importante salientar que a geometrização não surge com o intuito de eliminar a algebrização dos conceitos matemáticos, pelo contrário, a geometrização serve como alicerce para o desenvolvimento do pensamento matemático. Atiyah (1982, apud PAVANELLO, 2004) afirma que há a necessidade de cultivar e de desenvolver tanto o pensamento visual, evidente na geometria, como o sequencial, dominante na álgebra, pois ambos são essenciais à educação matemática. “Ressaltar o papel da geometria não significa minimizar o da álgebra” (PAVANELLO, 2004, p. 3).

Com a utilização da geometria para a construção das habilidades visuais, os estudantes podem desenvolver a autonomia de pensamento e raciocínio, desvinculando-se daquele método pronto, típico de reprodução. De acordo com Lorenzato (1995):

> Sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (LORENZATO, 1995, p. 5).

Antes de abordarmos o papel da visualização na aquisição dos conceitos geométricos, faz-se importante observar, como salienta Flores (2007), que a imagem é a representação de um modo de olhar, existindo várias formas de representar um mesmo objeto. Podemos analisar essa situação quando os professores trabalham com seus alunos as propriedades do triangulo retângulo, desenhando-o sempre numa mesma posição, porém em uma determinada aula mudam a posição do desenho do triângulo, e neste caso os alunos parecem desconhecer quaisquer propriedades desse “novo” triângulo, quando na verdade é o mesmo, porém numa posição diferente. “Ao se trabalhar com régua e compasso os desenhos são estáticos e, geralmente, feitos em uma mesma posição, por exemplo, triângulos com base na horizontal. Deste modo o aluno cria um protótipo da figura geométrica” (PALLES e SILVA, 2012, p. 7). Por isso, essas autoras defendem que devemos desconstruir dimensionalmente as formas que reconhecemos à primeira vista em outras formas não vistas de imediato, isto é, tirar a propriedade “posição”, que é de caráter contextual, como já vimos, do elenco de propriedades geométricas da figura.

Flores, baseada nos estudos de Raymond Duval (1988, 1994, 1995 e 1999) constata que:

> Para aprender a ver, é preciso primeiro saber que para um mesmo objeto matemático existem muitas formas de representa-lo; depois, é necessária uma aprendizagem específica dos tratamentos inerentes a cada tipo de representação, bem como das passagens de um registro de representação a outro. Para o caso particular das figuras tridimensionais significa, então, reduzir a problemática do ver estas figuras representadas no plano às questões puramente de conversão de registros – a passagem da figura em 3D para a representação em 2D, por exemplo, a seus tratamentos e às operações suscetíveis, bem como o funcionamento cognitivo do aluno. (FLORES, 2007, p. 26).

O estudante pode desenvolver suas representações de acordo com suas experiências, ou de acordo com suas expectativas, e talvez por isso que a geometria moderna seja essencial no processo de visualização, por permitir essa “abertura” para que cada indivíduo crie seus modelos, suas imagens e por fim, faça suas analogias. E se o modelo não satisfizer, basta reposicioná-lo ou reconstruir de acordo com as novas exigências. “Raciocinar geometricamente, é por assim dizer raciocinar sobre objetos abstratos como se eles fossem concretos” (ALMEIDA, 2007, p. 8).

> É importante salientar que a formação de conceitos em Geometria se fundamenta não apenas no processo cognitivo da aprendizagem, mas está relacionada com o conhecimento prévio adquirido pelos estudantes em sala de aula e contribui de forma significativa para a realização de trabalhos que envolvam a Geometria. (MORACO e PIROLA, 2007, p. 12).

Em se tratando de construção e reconstrução de modelos e imagens, explorações visuais, algumas pesquisas trazem a visualização com o foco na geometria dinâmica, ou seja, inserida nos meios computacionais, softwares matemáticos etc. De acordo com Senechal (1991, apud COSTA, 2000, p. 178), “o pensamento visual pode revolucionar a forma com que se ensina a geometria, fundamentalmente deve-se repensar o papel que os modelos ou os programas de geometria dinâmica podem ter na educação geométrica a todos os níveis”.

É perceptível que conexões entre conceitos geométricos e apelos visuais acontecem quase que de forma instantânea, porém essa ligação está associada a fatores como percepção, raciocínio visual, imagem mental, que discutiremos no próximo capítulo.

3. INTUÍÇÃO E VISUALIZAÇÃO

3.1 Raciocínio visual e pensamento visual

> *Para ver, tivemos que pensar, e poderíamos não ter nada sobre pensar se não estivéssemos vendo. (ARNHEIM, 1989, p. 145).*

Em se tratando de pensamento visual, algumas pesquisas articulam a esta ideia concepções de desenho e suas técnicas. Como, por exemplo, a ideia apresentada por Silva (2007), em que aponta o desenho[18] como estruturante ao pensamento visual, como parte de uma interpretação, no qual expressa novas percepções, compreensões. Porém, mais adiante, veremos que o conceito de pensamento visual vai além das noções de desenho.

Para Arnheim o pensamento verdadeiramente produtivo é o perceptivo[19], que tende a ser o visual, e de fato, para esse autor "a visão é a única modalidade dos sentidos em que as relações espaciais podem ser representadas com precisão e complexidades suficientes" (1989, p. 149).

Não é possível darmos um único significado ao conceito de pensamento visual. Porém, usando as ideias de Arnheim (1989), podemos compreender que o pensamento se realiza por meio de propriedades estruturais inerentes à imagem, e esta deve, portanto, ser formada e organizada inteligentemente, de tal forma que torne visíveis as propriedades que sobressaem.

O conceito de imagem que abordamos não condiz a uma pura ilustração, ou mesmo um "auxílio" à construção de um conceito, mas refere-se sim à imagem como parte integral do pensamento. Conforme considera Read (2001, p. 56) "uma imagem visual é a forma mais perfeita da representação mental onde quer que se faça referencia à forma, posição e relações dos objetos no espaço".

Quando pesquisamos sobre as concepções relativas ao pensamento visual, encontramos referencias no campo das artes, pois o ato de pensar por intermédio da visualização pode constituir ou delinear o processo do trabalho do artista, sendo

---

[18] O desenho que fazemos referencia aqui é no sentido do próprio ato de desenhar para fazer-se entender um determinado conceito.

[19] Entendemos aqui por perceptivo, aquele que contém componentes visuais e por vez sensações cinestésicas.

movido por imagens, ideias, referencias, percepções, intenções (SILVA, 2007). E nesse contexto, o mesmo autor salienta a distinção entre a percepção e a linguagem, uma vez que para ele a elaboração de um pensamento visual parece independer dos fundamentos linguísticos. Entretanto, Freitas (2005) destaca que a construção de imagens visuais inclui discussões semânticas e descritivas, sendo que novas combinações de imagens podem ser feitas a partir de descrições verbais. Ou seja, é mais provável a existência de uma complementação entre linguagem e imagem do que uma oposição.

Iniciando uma reflexão sobre o pensamento visual como processo cognitivo, Mariotti (1995 apud COSTA, 2002) menciona que usar a visualização para a compreensão de conceitos é uma forma de pensar sobre coisas abstratas que originalmente podem não ser espaciais, mas podem ser representadas na mente de alguma forma espacial. Costa (2002) vem a denominar pensamento visual espacial:

> [...] o conjunto de processos cognitivos para os quais as representações mentais para objetos espaciais ou visuais, relações e transformações podem ser construídas, manipuladas e codificadas em termos verbais ou mistas. Considero também o pensamento visual espacial como um modo de pensamento que, segundo Clements[20] (1981), é essencialmente não verbal, envolvendo representações internas que podem ser descritas como imagens de uma natureza muitas vezes visual e principalmente espacial. (COSTA, 2002, p. 263).

A autora distingue três diferentes modelos do pensamento visual espacial: o resultante da percepção (PVP), o resultante da manipulação de imagens (PVM) e o procedente da transmissão e comunicação - exteriorização (PVE). O PVP envolve experiências de concentração mental, ou seja, se refere a processos mentais associados a intuições primárias, reconhecimentos visuais, construções de imagens entre outros.

O PVM refere-se às transformações das imagens visuais, executando manipulações mentais espaciais e construindo relações. Os processos mentais associados ao PVM são: abstração reflexiva; descoberta de relações entre imagens, propriedades, factos; transformações mentais; criação de modelos; generalizações; entre outros. O PVE tem relação ao processo em que as imagens mentais se exteriorizam, pelo transcurso da representação. “Para comunicar as suas imagens,

---

[20] Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics. In Proceedings of 5th Annual Conference of MERGA (pp. 21-24). Adelaide, Austrália.

os alunos podem construir modelos, desenhos, figuras e gráficos (usando computador ou não) e usar descrições verbais" (COSTA, 2002, p. 265). E os processos mentais associados ao PVE são: ações, representações, ligações entre representações, modelos (desenhos, esboços, construções); descrição da dinâmica mental; construção da argumentação; construção de conjecturas; discussão de argumentação visual.

Referenciamos esses três tipos de pensamento na intenção de entender como o processo de pensar por meio da visualização é abrangente, como vai além do desenho, da interpretação de uma imagem primeira, e mais, como é surpreendentemente relativa a forma com que cada individuo usa da sensibilidade visual, mesmo que de maneira inconsciente, para interpretar e resolver determinados conflitos cognitivos.

Alguns autores, como Kaleff e Leivas, se referem ao pensamento visual como algo intrínseco à imaginação, usando-a para extrair soluções para fora do problema, como se fosse dar certa materialidade ou concretude ao pensamento. Seria a representação mental de algo que não está presente fisicamente. Segundo Queiroz:

> Imaginação, etimologicamente, vem de imago, termo latino que significa representação, imitação, e vem também do verbo imitor, que se traduz por imitar, reproduzir. Neste sentido etimológico, imaginação vem a ser a capacidade de imitar modelos exemplares, as imagens, reproduzindo-as. (QUEIROZ, 2010, p. 1).

Um exemplo que lança luz a essa associação da imaginação e pensamento visual é o citado por Freudenthal (1973, apud LEIVAS, 2009 p. 170): "as propriedades de espaço vetorial podem ser [percebidas] em espaços de dimensão 2 e 3 e imaginadas em dimensões maiores de forma geométrica, incluindo aí o conceito de determinante".

Quando somos colocados em situações que exigem pensarmos num determinado assunto, ou resolvermos uma determinada questão, como por exemplo um problema de trigonometria, quase que instintivamente fechamos os olhos, para que desta maneira possamos criar mentalmente uma imagem. Como assinala Hadamard (1945, apud SARAIVA, 1992, p. 4), "...um matemático quando está a pensar evita, geralmente, utilizar palavras ou mesmo símbolos algébricos (ou outros)

– ele utiliza imagens”. Saraiva faz referencia a uma carta, escrita por Einstein e dirigida a Hadamard:

> As palavras e a linguagem escrita ou oral parecem não desempenhar nenhum papel no meu pensamento. Os construtores psicológicos, que são os elementos do pensamento, são certos sinais ou figuras, mais ou menos claros, que podem ser produzidos e combinados em liberdade. (SARAIVA, 1992, p. 4).

Portanto, após fazermos referencia ao pensamento visual, a imagem e a imaginação, faremos agora uma breve reflexão sobre imagem mental. Montoya identifica a imagem mental como:

> Essencial enquanto função simbólica que reporta as particularidades dos objetos ausentes, nos seus estados e configurações. Sem ela, nem o nascimento nem o acabamento da representação conceitual ou da inteligência representativa seriam possíveis. (MONTOYA, 2005, p. 59).

Uma ideia semelhante é apresentada por Duval (1995, p. 28), ao considerar as imagens mentais como: “evocação de objetos ausentes que podem ser identificados de modo consciente no imaginário do sujeito; entidades psicológicas possuindo uma relação com a percepção”.

Assim, a imagem mental pode ser entendida como uma maneira de trazer aos olhos da mente um modelo, uma estrutura para a representação de um conhecimento, ampliando o pensamento para além do espaço e tempo presente. Porém, esse conhecimento associa-se as experiências de mundo do individuo, a cultura individual e as competências gerais. E mais, tal processo envolve habilidades, que segundo os estudos de Katz (1983-1987, apud D’AMORE, 2005, p. 150), se traduzem em: habilidades em gerar imagens mentais, habilidade em formar imagens mentais integradas, habilidade no acesso às imagens mentais, habilidade em manter na memória as imagens mentais. Diante disso, pode-se constatar que as diferenças individuais cognitivas estão diretamente ligadas ao processo de construção das imagens mentais, sendo facilmente geradas por alguns indivíduos, porém, com a maior dificuldade por outros.

Antes de darmos continuidade a essa discussão, compreendemos ser importante destacar a diferença conceitual entre imagem mental e modelo mental. Como já assinalamos**,** a imagem mental é típica do indivíduo, interna, involuntária.

Já o modelo mental é "o conjunto das imagens mentais elaboradas conscientemente" (D'AMORE, 2007, p. 153).

> Com relação a um determinado conceito, o indivíduo parece fazer-se imagens sempre mais gerais e circunstanciadas, percebendo, cada vez, detalhes, informações, propriedades mais abrangentes; por isso, temos um verdadeiro e próprio *processo dinâmico* (grifo do autor) que consta de uma sucessão de imagens mentais; o modelo mental (cognitivo) seria então o "limite" dessas sucessões de imagens, no momento em que elas, ainda que com as solicitações relativas a propriedades sempre mais gerais, não requerem mais a formação de imagens *novas* (grifo do autor); portanto, o modelo mental seria o resultado final do processo das imagens mentais, quando dessas se torna estável. (D'AMORE, 2007, p. 153).

Diante desses esclarecimentos, permanece um questionamento: como as imagens mentais exercem papel de auxílio na concretização do conhecimento matemático?

A primeira contribuição pode estar relacionada com a capacidade de argumentação, uma vez que a linguagem matemática contém um sistema de símbolos, que mediante articulações lógicas, tem a rigorosidade como elemento estruturante, o que caracteriza-se como um obstáculo no momento de externalizar e registrar o que se pensa, podendo as imagens mentais tornar esse processo menos difícil, posto que os argumentos estarão mais nítidos, enriquecidos e suficientemente válidos na mente.

As imagens mentais também contribuem na obtenção dos significados, possibilitando o movimento de imagens e favorecendo a visualização de novos conceitos. Usando as palavras de Valente (2007, p. 143), pode-se dizer que essa proposta de recorrer aos aspectos figurativos do pensamento, se direciona para uma "assimilação revestida de possibilidades das operações representativas, sustentando-se nas imagens mentais...". Não obstante, Fogaça menciona: "Assim como a ciência cria modelos para compreender fenômenos, os alunos também precisam de imagens para compreender conceitos". (FOGAÇA, 2003, p.03)

Um dos benefícios pertinentes à construção das imagens mentais é a flexibilidade do pensamento, na qual existe a possibilidade de construção e reconstrução do modelo mental.

> Para construir conceitos e entender ou formular teorias, é preciso um ir e vir incessante do pensamento, que classifica, ordena, compara, transpõe conceitos hipotéticos, seguindo a lógica na qual o sujeito que pensa determina um conceito como ponto de referencia e experimenta tantos

> quantos possa explicar até concluir por aquele que façam sentido diante do sistema teórico. (VALENTE, 2007, p. 140).

Em decorrência ao que foi analisado sobre o pensamento visual, imaginação, imagem mental e os aspectos figurativos do pensamento, trataremos, nesse momento, de refletir sobre a interferência de todos esses construtos da mente para com o desenvolvimento do raciocínio visual. De acordo com Andrade e Saraiva:

> O raciocínio visual não significa ser apenas o suporte para a descoberta de novos resultados e de novas vias para os fornecer, mas deverá ser desenvolvido de forma total – ser aceitável e aceite como raciocínio. São muitos os matemáticos que defendem que o raciocínio visual não está por baixo, nem por cima do algébrico ou do verbal. É necessário promover a sua integração. (2008, p. 6).

De acordo com Saraiva (1992), o raciocínio visual é uma forma de raciocinar usando essencialmente a informação visual. Faculdade de ver, refletir, analisar, conjecturar e argumentar sobre as imagens, relações e transformações. Uma prova disso são as várias demonstrações visuais do conhecido Teorema de Pitágoras, demonstrações essas que não usam palavras, mas procuram, em sua totalidade, realçar a importância da configuração espacial no raciocínio visual, na atividade matemática.

Para ilustramos essa situação, apresentaremos a seguir a prova deste teorema realizada por Henry Perigal:

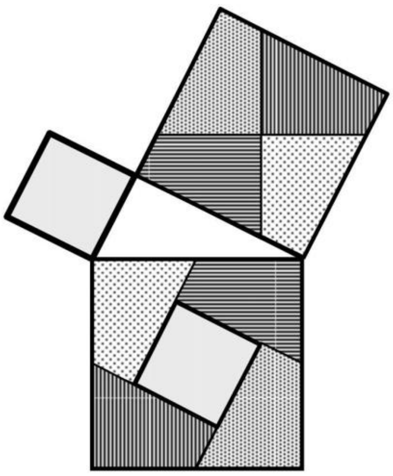

Figura 5: Ilustração da demonstração do Teorema de Pitágoras – por Henry Perigal.

Henry Perigal, um livreiro em Londres, publicou em 1873 a demonstração que se pode apreciar na figura a seguir. Trata-se da forma mais evidente de mostrar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchem o quadrado construído sobre a hipotenusa. Perigal corta o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes e mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.
(WAGNER, 2009, p. 8)

Entretanto, comumente é possível constatar que este modo de estruturar o pensamento parece pouco praticado por alguns educadores (reflexo natural do paradigma dominante da comunidade de matemáticos), sendo classificada como um simples instrumento de ensino e/ou auxiliar a aprendizagem. Dreyfus (1991, apud SARAIVA, 1992, p. 4) aponta um, de muitos fatores, pelo qual os matemáticos escondem suas visualizações e os argumentos baseados nelas: “As imagens podem não ter surgido aos matemáticos de forma suficientemente penetrante para serem descritas por palavras ou figuras” (caso das figuras mais ou menos claras que Einstein falou).

A mudança dessa situação pode se dar pela apresentação de uma educação matemática mais visual, partindo da imagem, da representação, para assim se aproximar ao conceito. Como exemplo, citamos a experiência realizada por Artigue (1989 apud SARAIVA, 1992 p. 5), em que o estudo baseia-se na solução de equações diferenciais, porém as informações não são apresentadas por uma fórmula, e sim pela informação sobre as suas derivadas. O objetivo era fazer com que os alunos reconstruíssem as curvas trabalhando com a descrição de suas derivadas, tendo o auxilio de *softwares* para as construções, porém, sem o suporte das fórmulas, sendo que para isso eles teriam que raciocinar visualmente. Uma das conclusões da experiência foi que os alunos entraram no trabalho geométrico com relativa facilidade, uma vez minimizada as dificuldades devido à possibilidade de utilização de *software* computacional apropriado.

De modo geral, nessa seção fizemos uma breve reflexão acerca de alguns dos elementos articulados à visualização, assim como analisar a forma como a imagem visual pode desencadear o pensamento visual e por conseguinte o raciocínio visual. Ressaltamos também a importância da visualização na formação do pensamento matemático, assim como propôs Goldenberg et al (1995):

> Ao ignorar a visualização, um currículo falha não só no envolvimento de uma parte substancial do pensamento dos alunos ao serviço da raciocínio matemático, como no desenvolvimento de capacidade de visualização para explorar e argumentar visualmente. (apud LOUREIRO, 2009 p. 62).

O desenvolvimento do pensamento e o raciocínio visual dependem das especificidades cognitivas de cada individuo, por isso os educadores podem e devem, continuadamente, levar para suas aulas elementos, metodologias que estimulem o construção desses aspectos figurativos do pensamento. Na sequência, estudaremos como o movimento das imagens se inter-relaciona com a questão do pensamento matemático.

3.2 A visualização na construção dos apelos intuitivos.

Antes de refletirmos sobre a relação entre intuição e visualização, buscamos as concepções, significados e interpretações do que vem a ser pensamento intuitivo. Etimologicamente, D'Amore (2007) assegura que os substantivos intuição, intuito e intuitivo originam-se "...do latim douto tardio, provavelmente do particípio passado *intueri,* e, portanto, literalmente significa imagem refletida". Para Malcolm (2007 apud Saraiva 2008 p. 31): "a intuição é a apreensão imediata da mente, sem o raciocínio, é imediata, holística, estética, reveladora, inspiradora; é sentir, é conhecer tudo de uma vez; ela pode ir aonde a razão não pode".

Segundo Davis e Hersh (1995), a intuição tem os seguintes significados:

> 1.) Intuitivo é o oposto de rigoroso;
> 2.) Intuitivo significa visual;
> 3.) Intuitivo significa plausível ou convincente na ausência de demonstração;
> 4.) Intuitivo significa incompleto;
> 5.) Intuitivo significa confiarmos num modelo físico ou em alguns exemplos importantes;
> 6.) Intuitivo significa holístico ou integrativo, em oposição a pormenorizado ou analítico;
> (DAVIS e HERSH 1995, apud LEIVAS, 2009 p. 201).

Refletindo sobre algumas destas definições apontadas por Davis e Hersh, especificamente a primeira: "Intuitivo é o oposto de rigoroso", percebemos que o pensamento intuitivo pode ser flexível, quando constituído pela sua espontaneidade, ou seja, é concebido naturalmente, não sendo conduzido e/ou dirigido. A segunda, "Intuitivo significa visual", discutiremos posteriormente. O terceiro argumento, "significa plausível ou convincente na ausência de demonstração", nos conduz a interpretação de que a intuição é um complemento à rigorosidade da lógica. Já a afirmação de que o intuitivo significa incompleto gera uma inquietação, pois por que a intuição não pode ser uma forma de raciocínio, de se chegar a um conceito, a uma definição, enfim, por que não ser completa? Seria, talvez, porque carece de rigor, de poder argumentativo?

Castro (2002), usa dos pressupostos de Poincaré[21] para explicar que existe um nível do raciocínio matemático que é irredutível à lógica e que se atinge pela intuição. Desta forma, compreende-se que a intuição, por Poincaré, teria a função de complemento para a lógica, quando a ciência da demonstração não mostrar-se suficiente. Portanto,

> A lógica e a intuição têm, cada uma delas, o seu papel. Ambas são indispensáveis. A lógica, que é a única que nos pode fornecer a certeza, é o instrumento da demonstração, a intuição é o instrumento da invenção. (POINCARÉ 1995, p. 22).

Tratando da correspondência entre razão e intuição, Cifuentes (2011), menciona:

> A razão e a intuição permeiam o pensamento matemático. A racionalidade matemática envolve tanto lógica e linguagem, quanto intuição, imaginação e sensibilidade, estas últimas intimamente ligadas à experiência estética. (CIFUENTES, 2011, p. 655).

As ideias apresentadas por Bicudo e Meneguetti (2003) também estão em concordância de que não é possível separar esses dois níveis de pensamento matemático, não há como atribuir maior valor ao aspecto intuitivo ou ao lógico, ou mesmo concebê-los como excludentes, portanto, para esses autores:

> O intuitivo apoia-se no lógico e vice-versa, em níveis cada vez mais elaborados, num processo gradual e dinâmico, tomando a forma de uma espiral, sendo que, o equilíbrio entre esses aspectos deve estar presente em cada um dos níveis dessa espiral. (MENEGUETTI e BICUDO, 2003, p. 162).

Já Fischbein (1987, apud ALVES e NETO, 2011, p. 40), contempla a intuição pelo seu aspecto cognitivo, abordando-a como uma estrutura cognitiva complexa, no qual organiza a informação utilizável (e mesmo incompleta) de modo aparentemente coerente, internamente consistente, autoevidente. Para esse autor existem três tipos de intuição: afirmativa, conjectural e antecipatória. A afirmativa se refere a fatos aceitos como corretos, autoevidentes e autoconsistentes, no qual o elemento solução está implícito. A intuição conjectural se associa a presunção sobre eventos

---

[21] Henri Poincaré: filósofo e cientista francês que defende a intuição como uma entidade fundamental do raciocínio matemático.

futuros, tal qual é identificado um problema que exige uma argumentação mais detalhada, porém o objetivo nessa fase não é efetivamente chegar a uma resposta ou solução. E a intuição antecipatória aparece como uma descoberta, como uma solução de um problema e subitamente como resultado de um esforço da busca pela solução, também chamada de ‘momento de iluminação’ (ALVES, 2011).

Ainda que estabelecendo essas divisões, faz-se importante ressaltar que cada uma das intuições citadas acima depende da outra, “devemos considerar um *continuum* a partir de uma intuição afirmativa para uma intuição antecipatória que passa através de uma intuição conjectural” (FISCHBEIN, 1987, apud ALVES e NETO, 2011, p. 45).

A intuição também pode ser interpretada pelo ato de se “intuir” um conceito, uma ideia antes mesmo de se recorrer à lógica. E mais, há quem diga que a matemática avançou mais pelos métodos intuitivos do que pelos critérios rigorosos de demonstração. Como aponta Poincaré (1995, p. 25), “sem a intuição nunca viriam a ser capazes de aplicar a Matemática”.

D’Amore (2007) aborda as duas formas de intuição indicadas por Immanuel Kant, a sensível (empírica) e a intelectual. A primeira “é típica do ser humano: as coisas nos são dadas como fenômenos” (D’AMORE, 2007, p. 331), vêm da experiência sensorial, “refere-se aos estados do sujeito do conhecimento enquanto um ser corporal e psíquico individual” (CHAUÍ, 2000, p. 78). Já a intuição intelectual é uma forma de conhecimento das coisas em si mesmas, é de base racional, “é o conhecimento direto e imediato dos princípios da razão (identidade, terceiro excluído, contradição, razão suficiente)” (CHAUÍ, 2000, p. 78). Porém, Kant não ratifica a intuição sensível, posto que exista uma contradição no momento em que essa intuição não se concebe espontaneamente, ela é criada, condicionada, ou seja, para este filósofo nenhuma intuição responde em nós às ideias da razão, quando o que conduz a um conhecimento novo são as verdades sintéticas[22], por via da intuição sensível.

---

[22] Entendemos aqui por verdades sintéticas aquelas que não se pode chegar por pura análise de suas proposições. E Kant a classifica em verdades sintéticas *a priori* (independe da experiência) e as verdades sintéticas *a posteriori.*

Em alguns estudos, como os de Wilder (1967), Alves e Neto (2011), é possível diagnosticar que sem experiência e/ou base cultural a intuição parece inexistir. No campo educacional, os estudantes trazem consigo uma base intuitiva, que pode intermediar na compreensão de novos conceitos. Segundo Leivas (2009, p.186) "Intuição é uma ressonância global no cérebro e depende da estrutura cognitiva do indivíduo, o que por sua vez, depende da experiência anterior do indivíduo".

Não obstante, é conveniente ressaltar a influência dos professores nesse processo de estímulo do pensamento intuitivo, uma vez que antes de propor qualquer axioma, por exemplo, o educador deve respeitar o apelo resultante da imaginação e da intuição, a fim de descobrir o objetivo de tal enunciação.

> Quando o estudante chega aos professores do segundo grau, seu enxoval matemático deve conter dois componentes principais – o componente intuitivo e o componente instrutivo. É difícil separá-los, particularmente porque o componente intuitivo depende, para crescer, do componente instrutivo. (WILDER, 1967, p. 5).

Uma questão provocada por D'Amore (2007, p.337), que faz referencia às implicações da intuição no ensino, é: "*A intuição é educável?".* Para o autor é sim educável, e como resposta usa uma frase de Fischbein: "*as intuições são um fenômeno evolutivo"*, ou seja, quanto mais carga de experiência de vida, melhores serão as competências e as capacidades críticas do estudante.

Mas como designar a intuição no âmbito da matemática quando esta é carregada de conceitos abstratos? Pode-se recorrer ao modelo intuitivo, que trata de uma representação mais clara e acessível ao pensamento. Segundo D'Amore (2007), o sentido do modelo intuitivo é o de criar significados que coincidam com comportamentos ou com imagens figurais.

Passamos agora a analisar a relação entre a visualização e a intuição, e para isso voltamos à citação de Davis e Hersh (1995, apud LEIVAS, 2009), terceiro item: *"Intuitivo significa visual".* Seria correto pensarmos que essa afirmação se desenvolve no sentido de que a visualização pode dar concretude ao pensamento intuitivo? Mas se sustentarmos essa hipótese, não estaríamos entrando em contradição, posto que a intuição se concebe involuntariamente e espontaneamente? Bem, antes de tentarmos responder a esses questionamentos, propomos uma análise com base em alguns pesquisadores.

Segundo Chauí (2000 p. 77), “A intuição é uma ‘visão’ direta e imediata do objeto do conhecimento, um contato direto e imediato com ele, sem necessidade de provas ou demonstrações para saber o que conhece”. Nessa interpretação parece haver um apelo a imagem, que permeia a necessidade do real, do que pode ser visto, mesmo que não seja visto com os olhos, mas com a mente.

Para Fischbein (1985, apud D’AMORE, 2007), a intuição acontece à medida que para se compreender um determinado conceito, surge uma relação de necessidade intrinsicamente evidente. Vamos destacar aqui a palavra “evidente”, segundo o dicionário Aurélio de Língua Portuguesa, evidente é o que pode ser ‘visto’ por todos, indubitável, óbvio. Nesse sentido voltamos nossa reflexão à visualização, pois aqui a intuição apontada por Fischbein trata da busca por tal evidência, tal significado, que conduza e oriente a passagem do pensamento intuitivo ao conhecimento.

De acordo com Fischbein (1985), D’Amore (2007) aponta que a falta de intuição provoca dificuldades em fazer ‘imagens intuitivas’ de certos conceitos. Ou seja, mais uma vez observamos a interposição das imagens, e a forma como a intepretação delas se faz presente na significação do pensamento intuitivo.

Segundo Tall (1991, apud JANZEN, 2011), a intuição é o produto da imagem de conceito do indivíduo, ou ainda “a intuição é uma forma de conhecimento superior e privilegiado; pois que a ela, como visão sensível a qual se molda, o objeto é imediatamente presente” (ABBAGNANO, 1970, apud SERENATO, 2008, p. 75). Dessa forma, é possível analisar na intuição a necessidade implícita do ato de “ver”, de tornar algo presente, imaginável, tátil.

Voltamos então ao questionamento inicial: a visualização pode dar concretude ao pensamento intuitivo? Sim, pois como afirma Cifuentes (2010) uma das funções da visualização é construir significados, dar sentido, “a intuição permite ‘ver’ a forma do objeto estudado” (p. 655). Este autor menciona também que a visualização é uma forma de pensamento, sendo possível argumentar através dela, portanto, nesse contexto, a visualização está dando significado à intuição, seja no intuito de argumentar ou de dar realidade. Ilustrando tais abordagens, temos o seguinte exemplo:

> É suficiente um certo número finito de termos de uma sequência para “ver” intuitivamente sua regra de formação ou seu limite, cada termo da sequência é um particular, mas a passagem de um termo a outro permite ver a generalidade escondida. O suficiente, devidamente objetivado, delimitaria o que deveríamos entender por “aproximado”. (CIFUENTES, 2010, p. 655).

Portanto, vimos nessa seção à forma com a qual a informação visual está intrínseca ao pensamento intuitivo, trazendo certezas, dúvidas, verdades, equívocos, mas principalmente, propiciando questionamentos, item essencial para reflexão acerca dos paradigmas do pensamento matemático.

4. FORMAS DE VISUALIZAÇÃO ATRAVÉS DE EXEMPLOS

4.1 Visualização por analogia

> *A analogia permeia todo o nosso pensamento, nossa fala cotidiana e as nossas conclusões triviais, assim como os modos de expressão artística e as mais elevadas conclusões triviais. (Polya, 1995, p. 29).*

Analisando os modos de pensar e compreender expressões, muitas vezes buscamos fazer um paralelo entre coisas diferentes levando-se em consideração seus aspectos gerais, estabelecemos analogias, comparamos, criamos imagens, cenários, visualizamos. Mas quais são as relações entre analogia e visualização? Como esse movimento poderia auxiliar na construção de conceitos matemáticos? Essas são algumas das questões que serão base para nossa reflexão neste capítulo

Segundo dicionário de filosofia entende-se por analogia:

> (gr. analogia: proporção matemática, correspondência) 1.Paralelo entre coisas diferentes levando-se em conta o seu aspecto geral.
> 2. Identidade de relação unindo dois a dois os termos de vários pares. É o caso da proporção matemática A, B e C, D, que se escreve: "A:B::C:D" e se enuncia: "A está para B como C está para D". Donde a igualdade proporcional. 3. Identidade de relações entre seres e fenômenos (analogia entre queda e gravitação, entre o boi e a baleia). 4. Raciocínio por analogia é uma inferência fundada na definição de características comuns. Assim, um corpo que sofre na água o chamado impulso de Arquimedes deve sofrer o mesmo impulso no ar, pois as características comuns à água (líquido) e ao ar (gás) definem o fluido. As descobertas científicas frequentemente consistem na percepção de uma analogia, ou seja, de uma identidade entre dois fenômenos sob a diversidade de suas aparências. Ex.: a analogia do raio e da centelha elétrica descoberta por Franklin (JAPIASSÚ, MARCONDES, 2001, p.12).

A frase "raciocínio por analogia é uma inferência fundada na definição de características comuns" nos faz pensar na relação entre os objetos, na busca por semelhanças, com o objetivo de verificar sua lei geral de formação, ou até mesmo uma comprovação, uma nova teoria.

A analogia permite fazer relações que ligam novos domínios a conhecimentos já concretizados. Por exemplo, na questão da matemática, para resolver determinado problemas nos fundamentamos em exemplos simples para poder concluir outros mais complexos. Nesse sentido, utilizamos a analogia para predizer o próximo passo, através de exemplos podemos compreender o caminho a ser seguido. De acordo com Nagem e Oliveira (2004),

> A analogia é uma comparação explícita entre dois elementos. Parte-se do pressuposto de que um elemento seja considerado familiar (veículo), no qual se buscam semelhanças com o outro elemento, considerado desconhecido (alvo ou conceito) (NAGEM E OLIVEIRA p.18, 2004).

Já o conceito de analogia, segundo Polya (1995, p. 29) também segue a ideia de semelhança: “objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto; objetos análogos coincidem em certas relações das suas respectivas partes”. O exemplo usado pelo autor para mostrar a analogia por semelhança é representada pela identidade de relações entre os lados de um paralelogramo retângulo e as faces de paralelepípedo retângulo, posto que as relações entre os lados do paralelogramo são semelhantes as que existem entre as faces do paralelepípedo, exemplo análogo que usaremos posteriormente no caso do hipercubo[23].

Quando prevemos o resultado de um determinado problema, estamos fazendo o uso da analogia, como o exemplo citado no capítulo 1: os quatro primeiros termos da sequência $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\right\}$ são suficientes para predizermos o termo seguinte, sendo que essa sequência segue a lei de formação $\frac{1}{2^n}$. Neste caso, mesmo sem determinar a lei de formação, verificamos as relações existentes entre os 1º e 2º , 2º e 3º, 3º e 4º termos da sequência, então pela igualdade entre as relações, estabelecemos por analogia o 5º termo; $\frac{1}{16}$. O tipo de raciocínio que usamos nessa situação é o chamado indutivo.

A forma de argumentação por indução[24] é considerada como uma analogia, pois como já vimos anteriormente é um processo em partimos de um caso particular

---

[23] Hipercubo é o análogo do cubo na quarta dimensão.

[24] Em filosofia da ciência, discute-se bastante o papel da indução como elemento constitutivo do método cientifico, permitindo a generalização dos resultados e conclusões dos experimentos científicos. O método indutivo é valorizado sobretudo pelas concepções empiristas. Vários são os problemas relacionados à indução, desde a discussão dos critérios de justificação dos procedimentos indutivos, e sua relação com a probabilidade e a estatística, até o questionamento da racionalidade da indução. (JAPIASSÚ, MARCONDES p. 103, 2001).

para chegarmos ao geral, ou seja, a partir de hipóteses buscam-se relações, conexões através de semelhanças ou diferenças, para assim chegarmos ao caso geral.

> O método de demonstração por indução é um método de beleza clássica: "*De um salto pode-se alcançar o infinito"*, também o é o método de descoberta por analogia, pois permite iluminar vários campos simultaneamente através de suas semelhanças e diferenças (CIFUENTES, 2003, p. 62).

Segundo Johassen (1998), na Grécia antiga a analogia era classificada em 4 tipos: a) analogia aritmética, que consiste nas semelhanças e diferenças; b) a analogia geométrica que tem relação com a proporção; c) a analogia resultante da relação entre o raciocínio teórico e diário, baseada na semelhança e repetição; d) e por último, a metáfora, que segundo o autor é um subconjunto da analogia. Sobre esta última, utilizamos a ideia apontada por Palma (2008), em que a metáfora seria uma forma de linguagem figurada, cuja função é a analogia ou semelhança, e, nesse sentido, a expressão metafórica teria um significado semelhante ou análogo ao seu equivalente literal.

O uso da metáfora em relação ao conhecimento é muito discutido. Por vezes a metáfora ganha características que condizem apenas ao lado ilustrativo, por vezes faz-se menção somente ao seu aspecto linguístico, mas a metáfora vai além disso, ela permite fazer relações entre objetos conhecidos para que possamos compreender o desconhecido. De acordo com Leite e Otte (2010):

> As metáforas são fundamentais para o pensamento matemático. A metáfora não é apenas um fenômeno linguístico manifesto através da fala, mas é especialmente um mecanismo cognitivo, inerente ao domínio do pensamento. Metáforas atuam no sentido de permitir uma interação entre domínios conceituais distintos, tais como geometria e a aritmética, e nesse sentido podem ter sido fundamentais para o próprio avanço da matemática ao longo dos tempos. (LEITE e OTTE, 2010, p 106).

Não obstante a essa linha de pensamento, Machado (1991) discute sobre a metáfora usando a ideia de Aristóteles, que consiste em atribuir a uma coisa o nome de outra coisa, como uma transferência de significados. Além disso, para o pensamento matemático, a metáfora permite estabelecer pontes entre diferentes contextos, entre o antigo e o novo, entre o conhecido e o desconhecido, possibilitando a expansão do pensamento.

> As metáforas, mesmo as mais eficazes, iluminam com a fugacidade de um relâmpago enquanto os objetos matemáticos operam com a constância ou a tenacidade de uma lâmpada ou uma vela. (MACHADO, 1991, p. 82).

Cifuentes (2010) apresenta um uso criativo da metáfora, para além dos recursos didáticos, mas também epistemológico.

> Um exemplo relevante do uso da metáfora num sentido epistemológico em matemática é o conceito de “igualdade”: muitas vezes usa-se a igualdade para se referir a uma congruência. Essa congruência adquire o estatuto de igualdade só no processo de “passagem ao quociente”, processo que permite criar (a *poiésis*) objetos, ou fatos, matemáticos, os objetos quociente. No fundo toda igualdade que precise de uma definição é uma metáfora, por exemplo, a igualdade de pares ordenados, a igualdade de polinômios, etc. (CIFUENTES, 2010, p. 19).

Ao se introduzir o conceito de equação podemos fazer menção à balança: o que acrescentamos/subtraímos num prato da balança devemos acrescentar/subtrair ao outro prato da balança para que desta forma ela permaneça em equilíbrio. Quando nos referimos em acrescentar ou subtrair algo, estamos criando uma analogia para os princípios da igualdade (princípio aditivo e multiplicativo).

Seria então a analogia uma forma de argumentação? Para pensarmos nisso, vamos analisar um exemplo de analogia que usa de propriedades geométricas e visuais: a compreensão dos objetos geométricos num espaço quadridimensional. Quando pensamos num segmento de reta, o representamos num espaço unidimensional, porém ao “traduzir”, tratando de generalizar, esse segmento do espaço unidimensional para o bidimensional, podemos representar um quadrado. Analogicamente, ao mover esse quadrado do espaço bidimensional para o espaço tridimensional, concretizamos um cubo e por fim, movimentando esse cubo do espaço tridimensional para o quadrimensional, temos o “hipercubo”. Vejamos algumas analogias que se apresentam nessa construção: assim como no segmento de reta temos dois vértices, ou seja, para uma aresta teremos dois vértices, no caso do quadrado vemos que em cada vértice temos duas arestas, não é diferente no caso do cubo, em cada vértice temos três arestas. Logo, no caso do hipercubo, teremos que cada vértice corresponde a quatro arestas. Podemos também fazer essa análise observando os lados do quadrado, que é formado por segmentos de reta (arestas), já as faces do cubo são formadas por quadrados e consequentemente, os “faces” do hipercubo são formados por cubos.

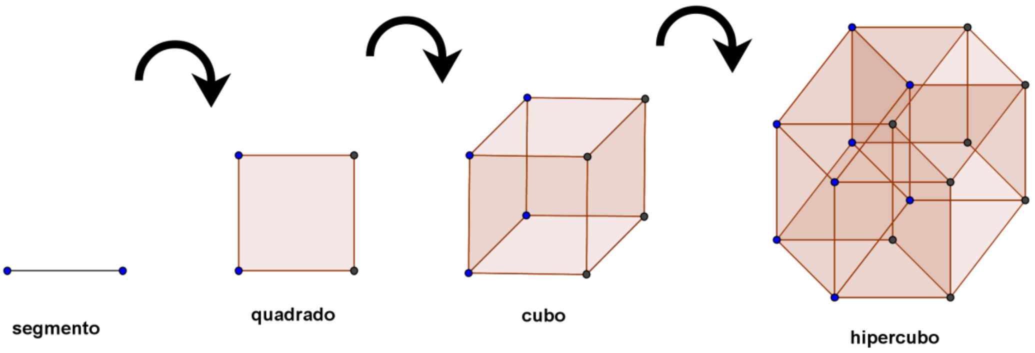

Figura 6: Representação do hipercubo

Com o exemplo mostrado anteriormente, podemos perceber o elo existente entre a visualização, a analogia e a geometria. Partimos da visualização do objeto geométrico que já conhecemos para tentar construir, por analogia, o hipercubo, ou até mesmo a hiperesfera. Importante salientar que não estamos nos referindo ao cubo em dimensão quatro, mas sim a uma representação dele em dimensão dois, o que permite imaginarmos suas propriedades e características numa dimensão maior. Portanto, voltamos a afirmar que a visualização não é somente o que vemos diante aos olhos, mas o que o pensamento é capaz de construir por meio da analogia, da movimentação de imagens, da imaginação e da intuição.

Outro exemplo que se serve como base de reflexão para entender o elo existente entre a visualização e a analogia, é a discussão que se faz sobre o infinito. Seguindo as nossas capacidades sensórias, uma dimensão infinita parece inatingível, impossível, mas se formos pensar pelo lado da lógica, sua existência parece mais “aceitável”. Na matemática é muito comum a resolução de exercícios de diferentes dimensões, até mesmo “n” dimensões, parece sim, como dissemos anteriormente, mais aceitável, mas será que existe formas de aliar a lógica com o lado sensível? É exatamente isso que a visualização e a analogia criam, possibilidades de enxergar o raciocínio lógico através da sensibilidade matemática.

Vejamos o triângulo de Sierpinski[25]:

Figura 7: Triângulo recursivo proposto por Sierpinski

Fonte: pt.wikipedia.org

Do primeiro triângulo para o segundo, desde que removido o central, sobram apenas três. Do segundo para o terceiro triângulo, removendo os quatro centrais, sobram nove. Analogicamente, do terceiro para o quarto triângulos, removendo os treze centrais, restam vinte e sete triângulos. Analisando as transformações, nota-se que os triângulos restantes (em preto), são potências de base três. No primeiro caso, 3^0, no segundo 3^1, no terceiro 3^2 e assim sucessivamente, até chegarmos ao arbitrário representado por $3^n,$ que envolve infinitos casos De acordo com Naves (2013), o infinito não pode ser encontrado, pois os sistemas conceituais são finitos, logo, para se concretizar a concepção do infinito, podemos usar como mecanismo a analogia, mas precisamente a metáfora.

> A Matemática faz parte do universo físico de estrutura racional. O infinito pode ser explicado por meio de elementos da natureza, como as flores, espirais logarítmicas em caracóis, fractais nas cadeias de montanhas, parábolas no jogo de baseball, formas esféricas das estrelas, planetas, bolhas entre outros que se possuem um sistema de recursividade. Esses elementos possuem partes que parecem módulos geométricos que vão se repetindo infinitamente (...) O triângulo de Sierpinski é uma metáfora do infinito representado pela recursividade por ser uma imagem metafórica que se repete a partir de um módulo triangular, dando a abertura para a sucessão desses módulos em um processo sem fim (NAVES, 2013, p. 40).

Portanto, nessa seção pudemos observar a analogia como uma forma de visualização que diferentemente do pleno rigor, do método, traz algo mais que quantitativo, o qualitativo. A abordagem qualitativa em matemática condiz à interpretação, ao questionamento, ao ato de ir e vir. O próprio uso de imagens

[25] Waclaw Sierpink (1882-1969) matemático polonês, foi professor em Lvov e Wariaae. Teve grande reputação, principalmente na década de 1920-1930, a ponto de uma das crateras lunares ter seu nome. (BARBOSA, 2002, p. 41).

geométricas compreende um caráter interpretativo. Para visualizarmos o hipercubo, interpretamos suas fases anteriores, assim como o triângulo recursivo proposto por Sierpinski. De acordo com Cifuentes “os raciocínios por semelhança, por analogia, são típicas formas de um pensamento qualitativo na matemática pensada como atividade” (2010, p. 23). Para esse autor, processos matemáticos do tipo qualitativo estão ligados também ao uso de recursos tecnológicos computacionais, como forma de movimentação de imagens e esse será o tema de estudo para nossa próxima seção.

4.2 Visualização pela movimentação das imagens

Nesse tópico, analisaremos qual a importância da movimentação de imagens num ambiente computacional e como esse processo auxilia no desenvolvimento do pensamento matemático. Ressaltamos que não faremos um estudo sobre o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), apenas discutiremos sobre o papel da geometria dinâmica[26] como forma de dar “vida” aos objetos matemáticos.

Sabemos que as ferramentas ‘tradicionais’, como régua e compasso, auxiliam na visualização de muitas figuras geométricas, mas o ambiente computacional permite visualizar não somente a imagem estática, mas também as relações que a engloba. Por exemplo, o hipercubo que apresentamos na seção anterior, ele foi construído num *software* de geometria dinâmica, poderia sim ter sido criado utilizando régua e compasso, mas o *software* permite observarmos além da figura estática, sua movimentação.

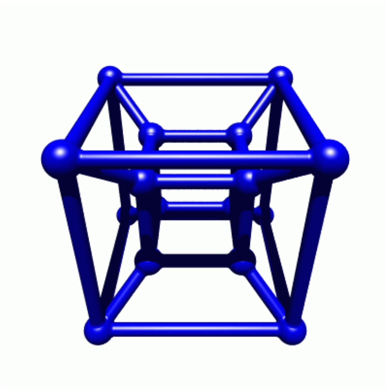

Figura 8: Hipercubo rotacionado.

Fonte: http://www.prof-edigleyalexandre.com/[1]

[26] Os ambientes de geometria dinâmica são ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem (GRAVINA, 2001, p. 82).

Uma ferramenta importante nesse processo de movimentação de imagens é a de “arrastar”, que permite descolar, movimentar a figura sem alterar suas propriedades, fazendo com que o aluno crie diferentes interpretações sobre um mesmo objeto. Esse recurso enriquece a própria concepção de figura, incorporando nela a dinamicidade subjacente (JANZEN, 2011).

Os ambientes de geometria dinâmica incentivam o espírito de investigação matemática, de acordo com Gravina (2001, p.90), a interface interativa, aberta à exploração e à experimentação disponibiliza *experimentos de pensamento.* Podemos questionar nossas próprias ações e operações, testando a validade das construções.

Desta forma, podemos testar e verificar a validade de alguns teoremas. Um exemplo é a demonstração do teorema de Pitágoras:

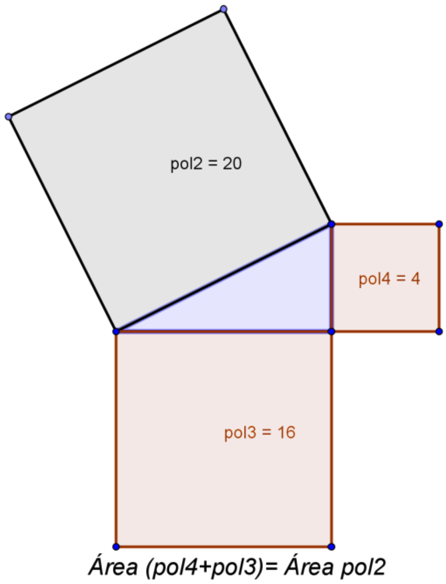

Figura 10: Teorema de Pitágoras pelo cálculo de áreas

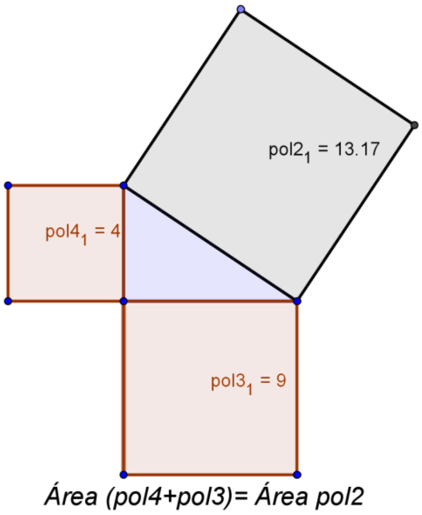

Figura 9: Teorema de Pitágoras pelo cálculo de áreas

Em qualquer uma das duas imagens, a relação entre as áreas permanece, ou seja, a soma das áreas dos quadrados menores resulta na área do quadrado maior. Podemos movimentar o triângulo retângulo que a proporção entre as áreas se mantém. Essa ideia vai ao encontro do que menciona Janzen (2011):

> Nesse sentido, as figuras construídas em um ambiente dinâmico adquirem um estatuto diferente dos simples desenhos. Passam a ser exemplos genéricos, com a possibilidade da exploração dinâmica das propriedades envolvidas, já que a construção da figura utiliza explicitamente as duas propriedades, proporcionando a visualização de muitas e diferentes representações de uma mesma classe de figuras. (JANZEN, 2011, p. 52).

As propriedades das figuras se concretizam com os *softwares* de geometria dinâmica, como por exemplo, a construção do triângulo equilátero, que possuí ângulos internos de mesma medida e lados congruentes.

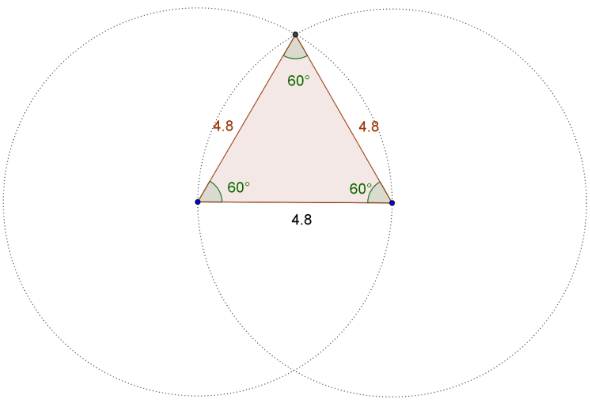

Figura 11: Triângulo equilátero

Os gráficos da função afim, que possibilita verificarmos a declividade da reta quando alteramos o coeficiente angular.

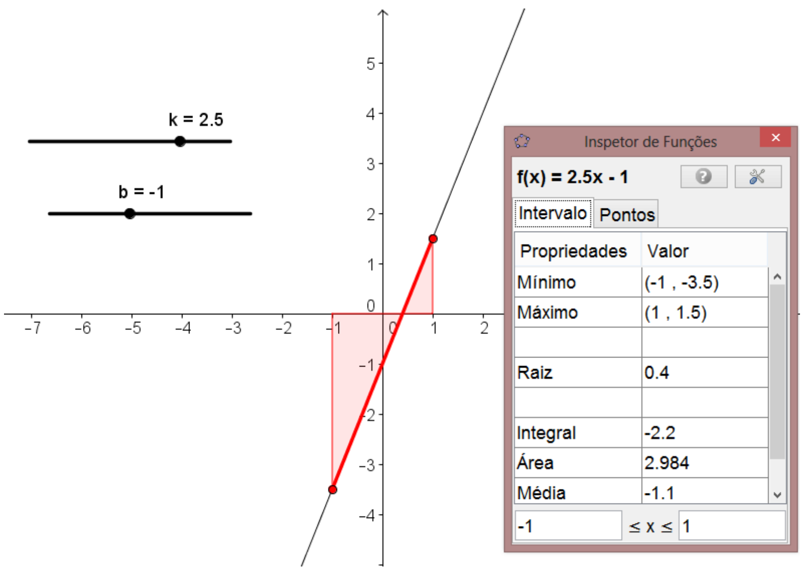

Figura 12: Gráfico (função afim)

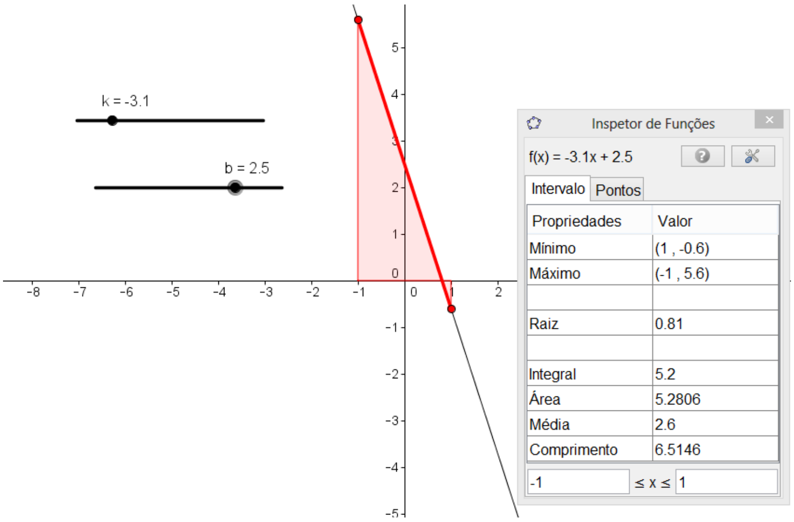

Figura 13: Gráfico (função afim)

A criação de imagens no *software* de geometria dinâmica possibilita a ida e a volta da construção, podendo nos levar a pontos não percebidos quanto utilizamos desenho.

> Para compreender um problema geométrico não basta olhar simplesmente uma figura, é preciso considerar cada parte, olhá-la separadamente, reunir o que convém, considerando-o como um todo e procurando ver simultaneamente as várias conexões exigidas pelo problema. (JANZEN, 2011, p. 39).

A geometria dinâmica não é apenas um recurso para se concretizar um determinado conceito de natureza geométrica, mas também contribui na concretização de conceitos de natureza algébrica. No capítulo sobre os tipos de visualização, mencionamos a visualização por meio da argumentação, mas podemos também pensar na visualização da argumentação, em que para uma sequência da demonstração temos uma sequência de imagens. O que diferencia uma da outra é que a visualização por meio da argumentação seria ver para poder argumentar, ou seja, o argumento se concretiza após conseguirmos visualizar como os objetos e as transformações se comportam. Já na visualização da argumentação, temos o argumento estabelecido, concretizado, no qual necessitamos criar uma sequência de imagens, para melhor entende-lo, ou até mesmo para simplesmente visualizá-lo. Como exemplo podemos citar a proposição 27, encontrada no livro I dos Elementos de Euclides.

Se duas retas são cortadas por uma terceira formando ângulos alternos internos iguais, então elas são paralelas.

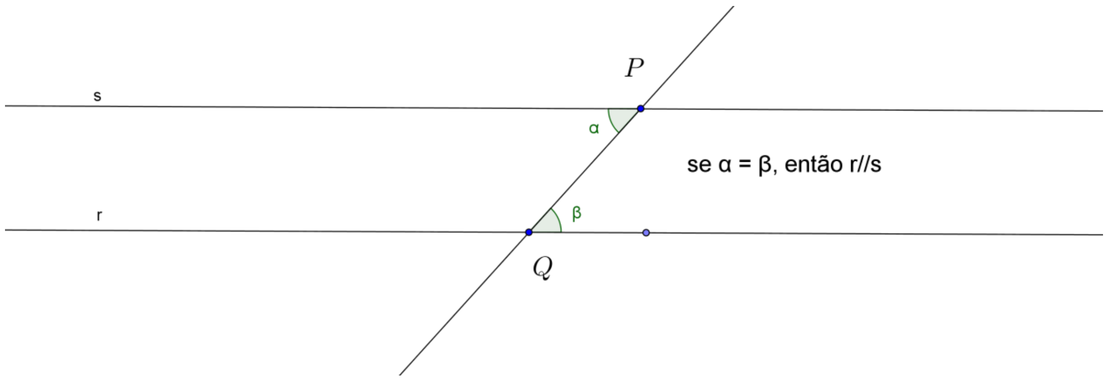

Figura 14 - Retas Paralelas cortadas por uma transversal

De fato, se s interceptasse r em algum ponto T, formar-se-ia um triângulo QPT.

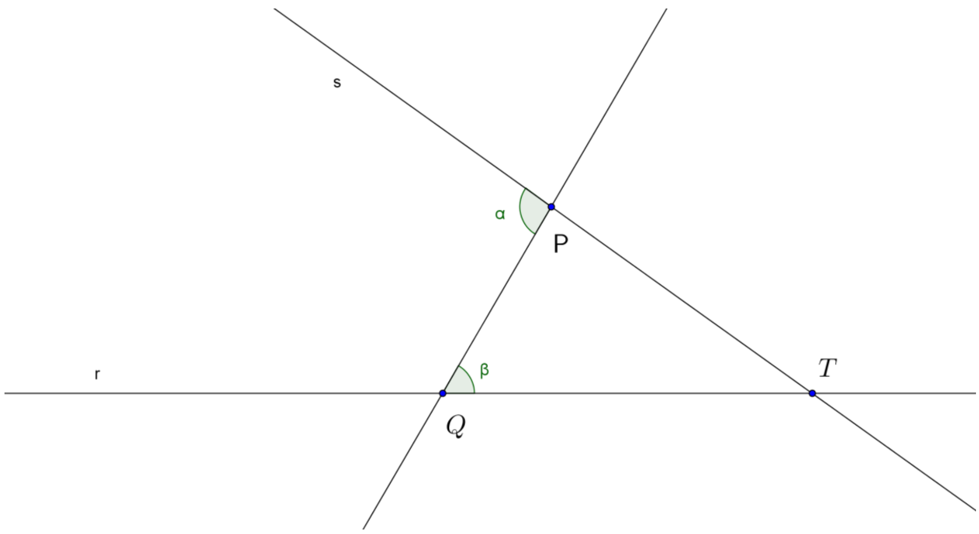

Figura 15 - Retas se interceptando no ponto T

Nesse triângulo, α é o ângulo externo e β é o ângulo interno não adjacente a α, ou vice versa. Assim, pelo teorema do ângulo externo[27], teríamos que $\alpha \neq \beta$, o que contradiz nossa hipótese. Portanto r e s não se intersectam.

[27] Teorema do ângulo externo: todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

Portanto, o uso de *softwares* de geometria dinâmica no ensino de matemática possibilita visualizar a movimentação das imagens explorando suas relações e propriedades de modo mais preciso de experimental do que no desenho geométrico. Como salienta Janzen (2011), esses ambientes suportam “formas de pensar que ultrapassam as do discurso oral ou escrito ou do desenho estático” (p. 46).

5. SÍNTESE COMPREENSIVA

Ao iniciar essa pesquisa, nos deparamos com um emaranhado de concepções sobre visualização, além de encontrar textos, estudos que já tratavam sobre esse conceito em relação ao conhecimento matemático. Então, como não "reinventar a roda", ou melhor, como falar sobre a visualização de forma a não repetir o que já se tenha concluído, analisado, desenvolvido? Nossa grande preocupação foi a de que essa pesquisa não se tornasse uma revisão de literatura, para isso tomamos a liberdade em desconstruir para construir. Descontruímos conceitos já existentes para construir novos, como o da visualização geométrica, a analogia como forma de visualização, entre outros. A maneira que encontramos para fazer "diferente" foi investigar a essência do processo de visualização através de uma discussão teórica e de exemplos representativos, quais características estão relacionas a ele, salientando que não tratamos aqui da visualização apenas como algo que se *vê com os olhos*, mas o que o pensamento é capaz de construir por meio da analogia, a imaginação, a intuição, etc.

Como a visualização exerce um papel de atribuição da concretude na elaboração e aquisição do conhecimento matemático? Não temos como intenção apresentar uma resposta a essa pergunta, mesmo porque com base nesse estudo é possível verificar que não seria apenas uma resposta, mas algumas. Nosso objetivo nesse momento foi refletir sobre os tipos e as formas de visualização estudadas e mais, analisar de que forma esses processos podem contribuir para a concretude do conhecimento matemático.

Em vários momentos referenciamos a matemática pelo seu aspecto qualitativo, em que a interpretação e a sensibilidade aparecem como forma de sustentar o pensar independente, livre, distanciando-se da rigidez e das regras. Essa dimensão qualitativa se faz presente quando mencionamos a visualização como forma de aprimorar a intuição, ou quando mencionamos a analogia como forma de visualização, e mais importante, quando entendemos a visualização como forma de concretizar o pensamento matemático. Por exemplo, o entendimento do infinito, sendo este não evidente, mas concretizável, seja na geometria euclidiana, com o prolongamento das retas, seja na geometria analítica com o plano cartesiano, na geometria fractal e seus infinitos passos construtivos.

A visualização também foi discutida como forma de experiência matemática, pois a partir do momento em que visualizamos um resultado matemático sem o recurso lógico, estamos enlaçando a esse resultado aspectos da realidade, do que é evidente para nós, nesse sentido, estamos experimentando por meio da intuição e da imaginação.

Mas, como mencionamos anteriormente, a visualização não é apenas o que vemos de imediato, ela vai além do que é evidente. O capítulo em que apresentamos três ideias distintas de visualização é um indicativo disso. Primeiramente falamos sobre a visualização geométrica, que traz geometria como uma forma de argumentação da visualização, para isso utilizamos como um dos exemplos a ideia do número quadrado perfeito e sua construção geométrica. A visualização algorítmica, que requer um processo de construção para sua concretização, como por exemplo, a utilização da geometria analítica para representar a existência de dois planos não paralelos que se interceptam num espaço quadridimensional. E a visualização contextualizada, em que apontamos diferentes aplicações a um mesmo conceito, além de concretizá-lo no espaço real. Como a aplicação do conceito de derivada, que se concretiza no mundo físico (no caso da velocidade), no mundo biológico (cálculo do fluxo de sangue na artéria), etc.

Desta forma, destacamos esses tipos de visualização no intuito de compreender que, de certa maneira, fazemos uso de recursos visuais mesmo sem perceber, isso vai de encontro à noção singular de que visualizar remete somente ao ato de ver.

Porém, captar a essência do conceito de visualização não basta para entendermos o motivo pelo qual não possa ser considerada como forma de argumentação legítima, como acontecia na geometria grega. Atualmente observamos a visualização sendo utilizada apenas como uma ferramenta, ou uma simples ilustração de uma demonstração lógica, quando em sua natureza é ela que concretiza o conceito, não apenas no caso dos números. E por esse motivo que levantamos a discussão sobre a cientificidade da visualização, que por sua vez não é movida por regras, métodos, mas permite atingir o conhecimento não apenas pelas vias algorítmicas, mas também geométricas e intuitivas.

Essa seria uma primeira resposta à questão norteadora dessa pesquisa, a visualização pode dar concretude na aquisição do conhecimento matemático através da geometria e dos objetos geométricos. Um exemplo disso é a criação dos espaços de concretização, como por exemplo, os espaços artificiais nas geometrias não-euclidianas.

Para compreender as possibilidades que a geometria cria no processo de visualização, analisamos no capítulo 2, o seu desenvolvimento histórico, com a finalidade de interpretar o modo de ver e perceber o mundo na geometria grega e como o desenho geométrico, as construções com régua e compasso, eram aceitas como comprovação de uma teoria.

Uma possível segunda resposta à questão inicial dessa pesquisa é que a visualização exerce também um papel de concretude no conhecimento matemático por meio da analogia, pois o pensamento é capaz de construir por meio dela diferentes interpretações de um conceito matemático. Um exemplo que usamos foi o do hipercubo, construído analisando as etapas anteriores a ele, além disso, a movimentação do hipercubo permite não só a visualização estática do objeto geométrico, mas possibilita a visualização de suas propriedades, criando uma dinamicidade à figura. Adotamos assim a analogia como uma forma de visualização que, diferentemente do pleno rigor, do método, traz algo mais que o quantitativo, o qualitativo.

Portanto, a geometria como forma de argumentação da visualização, a analogia e a intuição como forma de criar possibilidades de enxergar o raciocínio lógico através da sensibilidade matemática, são algumas das inúmeras formas de se concretizar o conhecimento matemático por meio da visualização.

Mas nas salas de aula, será que a visualização vem sendo utilizada como forma e desenvolver o pensamento visual? Para uma pesquisa futura, seria interessante colocar em prática as discussões e análises por nós realizadas em sala de aula, estudando a relação professor – aluno no que se refere ao ensinar e apreender conceitos matemáticos por meio da visualização.

Inicialmente acreditamos que utilizar a visualização para a construção do pensamento matemático em sala de aula requer atenção, principalmente para que não se conduza os alunos a construções equivocadas, mas da mesma forma entendemos a possibilidade para tal feito. Como por exemplo a simples construções de gráficos, que já são utilizados inclusive por meio da geometria dinâmica. Outro exemplo é o pensamento matemático sobre o infinito pela análise da geometria fractal, que também já vem sido discutida em sala de aula.

E, como anunciamos anteriormente, a visualização é tida por nós como uma experiência matemática e experiência é experienciar. Nada mais belo e legítimo do que viver a matemática, estudá-la não pelo seu exterior, mas interior, analisando suas transformações, movimento e criações. Desejamos que essa viagem pelo imaginário e intuitivo mundo da matemática possa ter levantado novos questionamentos e muitas reflexões, aguçando não somente a curiosidade, mas a busca por novas perguntas e não apenas respostas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Paulo. **Aprendizagem e ensino da geometria.** Educação e Matemática, 95, p. 2-11. Lisboa: APM. 2007.

ANDRADE, Jael, SARAIVA, Manuel Joaquim. **Pitágoras até aos nossos dias e o raciocínio visual.** Educação e Matemática, 96, p. 3-6. Lisboa: APM. 2008.

ANDRADE, Plácido Francisco de Assis. **De Euclides a Poincaré.** 2007. Disponível em <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAep4oAI/euclides-a-poincare>. Acesso julho/2014.

ARNHEIM, Rudolf. **Intuição e intelecto na arte**. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

ALVES, Francisco Regis Vieira; NETO, Hermínio Borges. **A contribuição de Efraim Fischbein (1920-1998) para a educação matemática e a formação do professor**. Conexões: Ciência e Tecnologia, v. 11, p. 38-54, 2011.

ALVES, Francisco Régis Vieira. **Implicações da teoria das representações semióticas no ensino do cálculo.** Conexões: Ciência e Tecnologia, v. 1, p. 1-15, 2012.

ALVES, Francisco Régis Vieira. **Aplicação da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a várias variáveis.** 2011. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2011, 9ª reimpressão.

BACHELARD, Gaston. **Ensaio sobre o conhecimento aproximado**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2004.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula.** Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2002.

BERTOCHE, Gustavo. **A Objetividade da Ciência na filosofia de Gaston Bachelard**. Edição do Autor. Rio de Janeiro, 2006. Disponível em
< http://www.ebooksbrasil.org/adobeebook/objbachelard.pdf> acesso fev. 2013.

BOAVIDA, João; AMADO, João. **Epistemologia, Identidade e Perspectivas.** 1ª edição. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2006.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRUNET, Ana Regina; LEIVAS, José Carlos; LEYSER, Magda. **Intuição, visualização e tecnologia no ensino de limites na licenciatura em matemática.** In: X Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Ijuí/RS, 2009.

BURATTO, Ivone Catarina. **Historicidade e Visualidade: Proposta Para Uma Nova Narrativa na Educação Matemática.** Tese (Doutorado em Educação Cientifica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

BURIOL, Tiago Martinuzzi. **Processamento e Visualização de campos em ambientes virtuais e sistemas CAD 3D aplicados a projetos de iluminação em subestações**. 123 f. Dissertação (Métodos Numéricos em Engenharia) Setor de Tecnologia e Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

CASTRO, Eduardo. **O Intuicionismo de Henri Poincaré.** Intelectu 7..2002 Disponível em http://ecastro.com.sapo.pt/Poincare,%20Intuicionismo.pdf. Acesso junho 2013.

CHAUI, Marilena. **Convite à Filosofia**. Ed. Ática, São Paulo, 2000.

CIFUENTES, José Carlos. **Fundamentos estéticos da Matemática** In: Filosofia da Educação Matemática: Concepções e Movimento. Brasília: Plano Ed., 2003.

CIFUENTES, José. Carlos. **Uma Via Estética de Acesso ao Conhecimento Matemático.** Boletim GEPEM (USU), Rio de Janeiro, v. 46, p. 55-72, 2005.

CIFUENTES, José Carlos; NEGRELLI, Leônia Gabardo; PEREZ, Marlene. **A História da Arte como História da Ciência**. In: III Encontro da Rede Paranaense de Pesquisa em História e Filosofia da Ciência, 2005a, Curitiba. Anais do III Encontro da RPPHFC, 2005. v. 1. p. 1-15.

CIFUENTES, José Carlos; NEGRELLI, Leônia Gabardo. **Modelagem Matemática e o Método Axiomático**. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizeti; ARAÚJO, Jussara de Loiola. Modelagem Matemática na Educação Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. Recife: Biblioteca do Educador Matemático SBEM, 2007, p.63 a 80.

CIFUENTES, José Carlos. **Do conhecimento matemático à educação matemática: uma 'odisséia espiritual'**. In: Filosofia, Matemática e Educação Matemática, Editora UFJF, 2010.

CIFUENTES, José Carlos. **O "Salto Arquimediano": um processo de ruptura epistemológica no pensamento matemático.** Scientiae Studia (USP), v. 9, p. 645-667, 2011.

CIFUENTES, José Carlos. **Minicurso: Pressupostos filosóficos da Matemática Moderna.** Apresentado na 2ª Semana Acadêmica da Licenciatura em Matemática, UTFPR – 2012. Disponível em http://www.utfpr.edu.br/curitiba/estrutura-universitaria/diretorias/dirgrad/departamentos/matematica/licenciatura/eventos/cifuentes.pdf

CIFUENTES, José Carlos; SANTOS, Alessandra Hendi; CHYCZY, Luciane. **Da geometria de Euclides à geometria euclidiana: a gênese das geometrias modernas.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), XI, 2013, Curitiba. Anais e palestras: SBEM, 2013. Disponível em: http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/trabalhos_9.html.

COSTA, Conceição. **Visualização: veículo para a educação em geometria.** In: Encontro de investigação em educação matemática, ensino e aprendizagem de geometria. Fundão/ES, 2000. Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/CC.pdf >. Acesso em: dez. 2012

COSTA, Conceição. **Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. Atividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores.** João Pedro Ponte (Org.) Escola Superior de Educação de Coimbra, p. 257-274, 2002.

COSTA, Celma Laurinda. **O pensamento analítico em Bachelard.** In: VI Colóquio Internacional "Educação e Contemporaneidade". São Cristóvão /SE. 2012.

COUY, Laís; FROTA, Maria Clara. **Representação e Visualização no estudo de funções.** In: IX ENEM – Encontro Nacional de Educação. Belo Horizonte, 2007.

D' AMORE, B. **Elementos de didática da Matemática**. Tradução Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DREYFUS, Tommy. HADAS, Nurit. **Euclides deve permanecer e até ser ensinado.** In: LINDIQUIST, Mary. SHULTE. Albert P. Aprendendo e ensinando geometria. Trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1994.p. 50-71.

DUTRA, Luiz Henrique de Araújo. **Introdução à Teoria da Ciência.** 1ª Edição. Florianópolis: Editora da UFSC, 1998.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et Pensée Humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Paris: Peter Lang Editeur, 1995

FLORES, Cláudia Regina; BURATTO, Ivone Catarina Freitas; SZTAJN, Paola. **Visualização Matemática na Formação Inicial de Professores.** In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, 2011.

FLORES, Cláudia Regina. **Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva.** São Paulo: Musa, 2007.

FLORES, Cláudia Regina. **Cultura Visual, Visualidade, Visualização Matemática: balanço provisório, propostas cautelares.** Revista Zetetiké, 18, 271-294. 2011

FLORES, Claudia Regina. **Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem**. Bolema. Rio Claro. n. 26, p. 1-22, 2006.

FLORES, Cláudia Regina; WAGNER, Débora Regina; BURATTO, Ivone. Catarina Freitas **Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas.** Revista Educação Matemática e Pesquisa. v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012.

FOGAÇA, Mônica**. Imagens mentais e compreensão de conceitos científicos**. In: MACHADO, N. J; CUNHA, M. O. (org.). Linguagem, Conhecimento, Ação: ensaios de epistemologia e didática. São Paulo: Escrituras Editora, 2003.

FREITAS, Neli Klix. **Representações mentais, imagens visuais e conhecimento no pensamento de Vygotsky.** In: Ciência e Cognição v. 06 p. 109-112, 2005. Disponível em: <http://www.cienciasecognicao.org/revista/index.php/cec/article/view/540> Acesso Abril 2013.

GOLDENBERG; E, Paul. **"Hábitos de pensamento": um princípio organizador para o currículo (II)**. Educação e Matemática nº 48, 37-44, 1998.

GRAVINA, Maria Alice**. Ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Porto Alegre: Publicação digital da UFRGS, 2001 (Tese de Doutorado).

GUILLEN, Michael. **Pontes para o infinito: O lado humano das matemáticas.** Tradução de: Jorge da Silva Branco. 1ª Edição. Lisboa: Gradiva, 1987.

JANZEN. Elen Andrea. **O Papel do Professor na Formação do Pensamento Matemático de Estudantes durante a Construção de Provas em um Ambiente de Geometria Dinâmica**. Tese de doutorado (Doutorado em Educação), Universidade Federal do Paraná, Curitiba: 2011.

JAPIASSU, Hilton; MARCONDES, Danilo. **Dicionário Básico de Filosofia**. 3ª edição. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1990.

KALEFF, Ana Maria. **Tomando o ensino da geometria em nossas mãos**. In: Educação Matemática em Revista. São Paulo: v. 1, n. 2, p. 19-25. 1994.

KALEFF, Ana Maria. **Vendo e entendendo Poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos.** 2ª edição. Niterói: EDUFF, 2003.

KALEFF, Ana Maria. **Ver com olhos, mãos e mente: ferramentas para o ensino de matemática e para a inclusão de deficientes visuais**. VII Encontro Paraibano de Educação Matemática, 2012, João Pessoa-PB. Anais do Encontro Paraibano de Educação Matemática(2012). João Pessoa: Editora Realize, 2012. v. 1. p. 1-19

LEITE, Kécio Gonçalves; OTTE, Michael. **Metáfora e matemática**. JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática. v.2, página 87 – 110, 2010.

LEIVAS, José Carlos Pinto. **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LORENZAT0, Sérgio. **Por que não ensinar geometria?** In: A educação matemática em revista – SBEM nº 4. São Paulo, 1995.

LOUREIRO, Cristina. **Geometria no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Contributos para uma gestão curricular reflexiva**. Educação e Matemática, número 105, 61-66 Lisboa, 2009. Disponível em <http://www.apm.pt/files/_EM105_pp061-066_lq_4ba2b378bd03e.pdf> Acesso em: jan. 2013.

MACHADO, Nílson J. **A Alegoria em Matemática**. Estudos Avançados, São Paulo, v. 5, n. 13, 1991 . Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/eav/article/viewFile/8622/10173>. Acesso em: 16/04/2014.

MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel; BICUDO, Irineu. **Uma discussão sobre a constituição do saber matemático e seus reflexos na educação matemática**. BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, ano 16, n. 19, p. 58-72, 2003.

MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel. **Constituição do saber matemático: reflexões filosóficas e históricas**. 1ª edição. Londrina: Eduel, 2010.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides, A história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço.** Traduzido por: Enézio de Almeida. 1ª edição. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

MOCROSKY, Luciane Ferreira; BICUDO Maria Aparecida Viggiani. **Um estudo filosófico-histórico da ciência e da tecnologia sustentando a compreensão de educação científico-tecnológica.** Acta Scientiae, 2013 - periodicos.ulbra.br. (p.406-419)

MONTOYA, Adrian Oscar Dongo. **Piaget: imagem mental e construção do conhecimento.** São Paulo, SP: Editora UNESP, 2005.

MORACO, Ana Sheila Trindade; PIROLA, Nelson Antonio. **Visualização e Representação Geométrica e sua Contribuição na Formação do Pensamento Geométrico em Alunos do Ensino Médio.** In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, 2007, Belo Horizonte. Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa, 2007. v. 1.

NAGEM, Ronaldo Luiz; OLIVEIRA, Eliene Freire. **Analogias e metáforas em livros didáticos de matemática.** Revista Educ. Tecn., v. 9., n. 2., p. 17-22., 2004.

NAVES, Érika Schmidt **Analogias e metáforas em livros didáticos de Matemática: contribuições para o ensino de geometria.** Dissertação (Curso de Mestrado em Educação Tecnológica), Centro Federal de Educação Tecnológica, Minas Gerais: 2013.

PAVANELLO, Regina. Maria. **Por que ensinar /aprender geometria?** In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. Disponível em: <http:// www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr21-Regina.doc> Acesso em: 30 out. 2011.

PALLES, Camila; SILVA, Maria José Ferreira da. **Visualização em Geometria Dinâmica.** In: Encontro de Produção Discente - PUC/SP-UNICSUL, 2012, São Paulo. Encontro de Produção Discente - PUC/SP-UNICSUL, 2012. p. 1-9.

PALMA, Héctor A. **Metáforas y modelos científicos : el lenguaje en la enseñanza de las ciências.** Buenos Aires : Libros del Zorzal, 2008. 116 p.

POINCARÉ, Henri**. O valor da ciência.** Tradução realizada por Maria Helena Franco. 1ª Edição. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995. La Valeur de la Science.

POINCARÉ, Henri. **A ciência e a Hipótese.** Tradução realizada por: Maria Auxiliadora Kneipp. 2ª Edição. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1988. La Science et l'hypothèse.

QUEIROZ, José J. **As Expressões do Imaginário, o Pensamento Complexo e seus Reflexos na Educação.** Notandum, Gabriel Perissé (Org.), Ano XIII, n.23, Maio - Agosto 2010, São Paulo: EDF-FEUSP; Porto: Universidade do Porto/Faculdade de Direito, pp. 33-40.

READ, Herbert. **La educación por el arte**. Buenos Aires, Paidós, 1977.

READ, Herbert Edward. **A educação pela arte.** Tradução de Valter Lellis Siqueira. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

SARAIVA, Manuel **J**oaquim**. Raciocinar em Matemática com imagens visuais vagas e com intuição**. Educação e Matemática, 100, p. 29-32. Lisboa: APM. 2008

SARAIVA, Manuel **J**oaquim. **Raciocínio Visual. Parente pobre do raciocínio matemático?** In: Educação e Matemática Nº21, (pp.3-5). Lisboa: APM. 1992

SERENATO, L.J. **Aproximações interdisciplinares entre matemática e arte: resgatando o lado humano da matemática**. Dissertação de mestrado (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal do Paraná, Curitiba: 2008.

SILVA, Marina de Camargo. **Desenho e pensamento: imagem e texto, deslocamentos e cidades.** Dissertação de Mestrado/UFRGS. Porto Alegre: 2007.p. 25.

VALENTE, Tamara da Silveira. **Entendeu, ou quer que eu desenhe?** Educar em Revista, Curitiba, n. 30, p. 131-144, 2007.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas.** Apostila 3 Obmep. 2009. Disponível em: http://www.obmep.org.br/docs/Apostila3-teorema_de_pitagoras.pdf. Acesso: julho 2014.

WILDER, Raymond. **The Role of Intuition.** *Science*, vol. 156 (1967), p. 605-610. Traduzido por Marcelo Papini.