UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

KEILLA CRISTINA ARSIE CAMARGO

A EXPRESSÃO GRÁFICA E O ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

CURITIBA

2012

KEILLA CRISTINA ARSIE CAMARGO

A EXPRESSÃO GRÁFICA E O ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profª Drª Simone da Silva Soria Medina

CURITIBA

2012

Camargo, Keilla Cristina Arsie
A expressão gráfica e o ensino das geometrias não euclidianas / Keilla Cristina Arsie Camargo. - Curitiba, 2012.
144 f. : il., tabs.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ciências e em Matemática.
Orientadora: Simone da Silva Soria Medina

1. Geometria não euclidiana. 2. Espaço elíptico. 3. Geometria hiperbólica. I. Medina, Simone da Silva Soria. II. Título.

CDD 516.9

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA

PARECER

Defesa de Dissertação de **KEILLA CRISTINA ARSIE CAMARGO**, intitulada **"A EXPRESSÃO GRÁFICA E O ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS"**, para obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências e em Matemática.

De acordo com o Protocolo aprovado pelo Colegiado do Programa, a Banca Examinadora composta pelos professores abaixo-assinados arguiu, nesta data, a candidata acima citada. Procedida a arguição, a Banca Examinadora é de Parecer que a candidata está **apta ao** Título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA**, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIAÇÃO
Profª. Drª. Simone da Silva Soria Medina (orientadora)	Simone Sibera	APROVADA
Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco	Franco	APROVADA
Prof. Dr. Alexandre Trovon de Carvalho	Alexandre Luis T. Carvalho	APROVADA
Profª. Drª. Ana Maria Petraitis Liblik	Ana Maria P. Liblik	APROVADA

Curitiba, 23 de Fevereiro de 2012.

Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Educação em Ciências e em Matemática.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
1912
SETOR DE CIÊNCIAS
Coordenação de Pós-Graduação

Dedico este trabalho a todos os Professores de Matemática que não medem esforços em continuar estudando e pesquisando sobre a melhor forma de ensinar, de aprender, de cativar e envolver seus alunos neste Universo tão infinito que é a Matemática.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Professora Simone da Silva Soria Medina pelas orientações, conversas, pelo tempo dedicado e por acreditar no meu trabalho.

À Professora Ana Maria P. Liblik, que foi tão importante no início deste trabalho, com sua dedicação, motivação e contribuições.

Aos Professores e Secretária do Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática – UFPR pelo apoio recebido.

Aos Professores Ana Maria, Valdeni Franco, Alexandre Trovon, Paulo Henrique por aceitarem fazer parte deste momento e dar suas contribuições valiosas.

Aos meus colegas, especialmente da Linha de Pesquisa Expressão Gráfica, pelo encorajamento, pelo caminhar junto e troca de experiências.

À minha família que é o meu alicerce, sobretudo meus pais Nelson e Elenice e meus irmãos, Karla e Luiz Eduardo, que sempre me incentivaram nos estudos e onde nos momentos mais difíceis e de dúvidas me apoiei em tudo que me ensinaram.

Ao meu marido Marcos que esteve sempre ao meu lado, que me ajudou, me apoiou, participou comigo, vivenciou minhas angústias, minha ausência em vários momentos, minhas alegrias e sempre disse: “você consegue”.

À minha filha Elena, que ainda em meu ventre, foi minha grande força para concluir este trabalho.

Uma geometria não pode ser mais verdadeira do que outra; poderá ser apenas mais conveniente. (Poincaré)

RESUMO

As Diretrizes Curriculares de Matemática da Educação Básica do Estado do Paraná passaram por algumas reformulações e desde 2008 propõem o ensino das Geometrias não Euclidianas no Ensino Fundamental e Médio. Para o Ensino Médio, são destacadas as seguintes Geometrias: Hiperbólica, Elíptica, Projetiva e Fractal. Ao se abordar este tema, alguns questionamentos são levantados, como por exemplo: o que são estas Geometrias, desde quando se passou a pensar em seu ensino; por que ainda não são de fato ensinadas; e como é um tema que ainda não está inserido nas aulas de Matemática, quais alternativas e metodologias podem ser desenvolvidas para se buscar uma melhor compreensão dos seus conceitos básicos. Assim, é apresentado um histórico sobre a Geometria Euclidiana, passando pelo quinto postulado, que desencadeou o estudo das novas Geometrias. Também faz – se um levantamento histórico destas Geometrias; busca-se algumas metodologias que foram estudadas para aprimorar seu ensino e destacamos a Expressão Gráfica como um instrumento facilitador na construção e apropriação destes novos conceitos, focalizando os recursos visuo-espacias e imagéticos.

Palavras – chave: Expressão Gráfica, Geometrias não Euclidianas, Ensino.

RESUMEN

Las Directrices Curriculares de la Matemática en la Educación del Estado del Paraná pasaron por algunas reformulaciones y a partir del año 2008 propusieron la enseñanza de la Geometría no Euclidiana en la enseñanza de los ciclos fundamentales y medios. Para la enseñanza del ciclo medio son destacadas las siguientes Geometrías: Hiperbólica, Elíptica, Proyectiva y Fractal. Al proponer el tema algunas cuestionamientos son llevados en consideración como por ejemplo: que son estas Geometrías, a partir de cuándo se pensó en su enseñanza, porque todavía no son enseñadas, como es un tema que todavía no está dentro de las clases de Matemática, cuales son las alternativas y metodologías que pueden ser desarrolladas para buscar una mejor comprensión de sus conceptos básicos. Todavía, se presenta un histórico sobre la Geometría Euclidiana, pasando por el quinto postulado que desencadena el estudio de las nuevas Geometrías. También se hace un levantamiento histórico de estas Geometrías, en busca de algunas metodologías que fueron estudiadas para mejorar su enseñanza y se destaca la Expresión Gráfica como un instrumento que facilita la construcción de estos nuevos conceptos, enfocando los recursos viso-espaciales y imagéticos.

Palabras – clave: Expresión Gráfica, Geometrías no Euclidianas, Enseñanza.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1. ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA E EXPRESSÃO GRÁFICA

Estou inserida no Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, da Universidade Federal do Paraná (UFPR), recomendado pela Capes e criado pelo Conselho Universitário da UFPR em dezembro de 2009, iniciando a primeira turma de Mestrado Acadêmico em março de 2010. A proposta de criação deste curso foi amplamente discutida e apresentada por professores de diferentes Departamentos, entre eles Expressão Gráfica, Física, Matemática e Química do Setor de Ciências Exatas e pelo Departamento de Teoria e Prática de Ensino, do Setor de Educação.

O referido curso foi inserido na área 46 da Capes: Ensino de Ciências e Matemática. Esta área foi criada pela Capes em setembro de 2000. Porém, estas discussões remontam da década de 50, a partir da preocupação destes profissionais com o ensino e aprendizagem nas suas áreas de atuação. Em 1960 algumas propostas estrangeiras foram estudadas e aplicadas nas escolas brasileiras. Nas décadas de 70 e 80 surgem grupos de estudo com o apoio da Capes para o início da pesquisa e formação da área de Ensino em Ciências e Matemática no país. A partir de 1980 começam a surgir eventos mais específicos com o objetivo de apresentar e discutir as pesquisas *stricto sensu* que foram desenvolvidas pelos primeiros grupos de pesquisa.

Com a intensificação dos trabalhos das áreas de Ciências e Matemática, houve a preocupação de armazenar e mapear esta produção, sendo criados bancos de dados nas universidades de todo o país. Assim, são criados também programas de mestrado e doutorado, com suas próprias características, motivando a instalação de um Comitê de Ensino de Ciências e Matemática pela Capes, em 2000. Neste mesmo ano, a Área de Ensino de Ciências e Matemática foi oficialmente criada pela Capes, iniciando com apenas cinco programas de pós – graduação.

O primeiro deles foi o mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências, desenvolvido conjuntamente pela Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. No ano seguinte, já eram 16 os programas desta área, que continuou a se expandir, ano após ano, até que em 2011 a área foi extinta, sendo incorporada à área de ensino.

Na UFPR, o programa denomina-se Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática e foi originalmente criado com três linhas de pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Ciências; Educação Matemática e Interdisciplinaridade e Expressão Gráfica no ensino de Ciências e Matemática.

A proposta desta dissertação pretende abordar a Expressão Gráfica no ensino da Matemática, mais especificamente no ensino das Geometrias não Euclidianas. Com relação à Expressão Gráfica no ensino da Geometria de Euclides, verifica-se que ela permite uma melhor compreensão das propriedades e conceitos. Pretendemos fazer uma transposição desta ideia para o estudo das Geometrias não Euclidianas, associando, assim, a Expressão Gráfica como participativa na interpretação e apropriação dos conceitos não euclidianos.

1.2. INQUIETAÇÕES

Minha vontade de fazer Mestrado na área de ensino de Ciências e Matemática se deve ao fato de estar preocupada com o processo de ensino e de aprendizado de Matemática nas escolas, especialmente da Rede de Ensino Público do Estado do Paraná, em me dedicar à pesquisa, principalmente em relação à representação gráfica da Matemática, já que tenho assistido o descaso desta área e a ênfase à "algebrização" dos conceitos matemáticos. Esta preocupação é decorrente da minha formação: sou formada em Licenciatura em Matemática pela UFPR, especialista em Expressão Gráfica no Ensino, também pela UFPR e atuo como professora da Rede Estadual de Ensino do Paraná. Meu interesse específico está, desde o tempo da minha graduação, no ensino de Geometria e especialmente pelo ensino das Geometrias não euclidianas, que ainda não são de fato ensinadas nas escolas, apesar de estarem incluídas nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná de Matemática[1].

Desta forma, alguns questionamentos norteiam minha pesquisa: o que são Geometrias não Euclidianas? Quando passou a se pensar no seu ensino? Se ela está contemplada nas diretrizes curriculares, por que ainda não se ensina nas escolas? Isto é possível? O que fazer para ensinar Geometrias não Euclidianas?

---

[1] Poderá ser acessado no link:
http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica.pdf

Com estas inquietações, surge a seguinte hipótese: o ensino das Geometrias não Euclidianas acontece por meio da comparação com a Geometria Euclidiana, analogias e semelhanças e suas representações tanto bidimensionais quanto tridimensionais, bem como sua respectiva visualização.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. Objetivo geral

A proposta desta dissertação de mestrado tem como objetivo geral discutir metodologias de ensino da Geometria, para o Ensino Médio, a partir do estudo das Geometrias não Euclidianas, considerando seu aspecto visuo-espacial, associando, assim, a Expressão Gráfica como participativa na interpretação e apropriação dos conceitos, ou seja, na construção do conhecimento científico.

1.3.2. Objetivos específicos:

Com a finalidade de alcançar o objetivo geral desta pesquisa, delineei os seguintes objetivos específicos:

- Identificar, a partir das Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná, quais as geometrias que deveriam ser ensinadas no Ensino Médio.
- Explicar o que são as “novas geometrias” que estão nas Diretrizes Curriculares.
- Apresentar algumas Geometrias não Euclidianas, buscar seu histórico e mostrar suas relações.
- Elaborar argumentos pelos quais é possível a sua inserção no currículo do Ensino Médio, atendendo as Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Paraná.
- Apresentar e discutir atividades que possam ser aplicadas em conjunto com os conteúdos propostos no currículo de matemática, proporcionando sua inserção gradual.

A partir destes objetivos me vejo diante do seguinte problema: como ensinar Geometrias não Euclidianas para alunos do Ensino Médio a partir de linguagens visuais tais como desenhos, vídeos, fotos, ultrapassando os “limites” da linguagem Matemática?

1.4. JUSTIFICATIVA

Em 2006 foram publicadas e distribuídas para as escolas públicas do Paraná as Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Paraná de todas as disciplinas, fruto de várias discussões, encontros e simpósios promovidos para os núcleos de educação em todo o Estado.

O objetivo foi atingir as escolas, seus professores e equipes pedagógicas na construção de um material de orientação para as ações docentes, que apresentam a fundamentação teórica e os encaminhamentos metodológicos que definem o rumo de cada disciplina da formação básica.

Na elaboração das Diretrizes Curriculares, a partir do estudo da história das disciplinas escolares, foram definidos os conteúdos estruturantes, isto é, os conhecimentos e conceitos de maior amplitude, que fazem a organização das diversas áreas de estudo destas disciplinas.

A saber, os conteúdos estruturantes de Matemática para o Ensino Médio são quatro: Números e Álgebra, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação. Limitando apenas no conteúdo estruturante Geometrias, este se abre nos conteúdos específicos sobre Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica e noções básicas de Geometria não Euclidianas. É neste ponto que quero chegar: as Geometrias não Euclidianas estão inseridas como um dos conteúdos a serem trabalhados pelos professores de todo o Estado do Paraná.

De acordo com Paraná (2008), a Geometria Euclidiana não consegue resolver vários problemas da realidade científica e do dia a dia, necessitando das Geometrias não Euclidianas. Como por exemplo, Albert Einstein usou a Geometria Elíptica no seu estudo que resultou na Teoria da Relatividade.

Chamaremos aqui de Geometrias não Euclidianas as Geometrias que constam nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática: “também no Ensino Médio aprofundam – se os estudos das Geometrias não Euclidianas ao abordar a Geometria dos Fractais, a Geometria Projetiva, Geometria Hiperbólica e Elíptica (PARANÁ, 2008, p. 57)".

Segundo Coutinho (2001), a descoberta de uma nova Geometria foi revolucionária, pois a Geometria de Euclides, que até então era considerada a única e a mais perfeita representação do Universo, passou a ser apenas uma das interpretações da natureza.

Diante deste fato, as discussões sobre a inclusão das Geometrias não Euclidianas aos conhecimentos geométricos escolares vem se intensificando. Assim, em 2008 o documento passou por uma reformulação e nele consta que para se abordar este conteúdo na sala de aula, recomenda-se o ensino das Geometrias Fractal (explorando o triângulo de Sierpinski, a curva e a ilha de Koch), Projetiva, Hiperbólica (por meio do postulado de Lobachevski) e Elíptica (abordando o postulado de Riemann, conceito de geodésica entre outros). O professor tem liberdade para fazer a sua abordagem, mas desde que trabalhe com os conceitos fundamentais destas geometrias.

Segundo Paraná (2008), ao se ensinar Geometrias não Euclidianas no Ensino Médio, busca-se: perceber a necessidade das Geometrias não Euclidianas para a compreensão de conceitos geométricos, quando analisados em planos diferentes do plano de Euclides; compreender a necessidade das Geometrias não Euclidianas para o avanço das teorias científicas; articular ideias geométricas em planos de curvatura nula, positiva e negativa; conhecer os conceitos básicos das Geometrias Elíptica, Hiperbólica, Projetiva e Fractal.

Estes conceitos são considerados essenciais para que o aluno do Ensino Médio amplie seu conhecimento e pensamento geométrico, para que possa aplicá-los a diversas situações do seu cotidiano, sendo que estas geometrias fazem parte de sua realidade. Porém seu ensino ainda não está ao alcance de todos:

> (...) as noções de geometrias não euclidianas têm sido negligenciadas nas aulas de matemática pela maioria dos professores, tanto no ensino fundamental como no ensino médio, não pelo descaso do professor, mas sim pelo fato dos mesmos não terem tido contato com essas geometrias em sua formação considerando que a maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática, não contempla este conteúdo em suas estruturas curriculares. (FRANCO E RISSI, 2008, p. 2 e 3).

Esta situação tem levado a aumentar a crença, por parte dos alunos e de grande parte dos professores também, de que a Geometria de Euclides ainda é a única Geometria existente. Contudo, muitos matemáticos e educadores matemáticos, preocupados com esta situação, têm divulgado inúmeros trabalhos sobre a importância do estudo das Geometrias não Euclidianas nas aulas de Matemática. Por esta razão, justificamos o estudo das Geometrias não Euclidianas, mas também sob o olhar da Expressão Gráfica.

1.5. ESTRUTURA DESTA DISSERTAÇÃO

Com o intuito de apresentar a pesquisa e seus resultados este trabalho foi dividido em sete capítulos, que descreverei a seguir:

O primeiro é referente à introdução, no qual aponto em linhas gerais a criação do Programa de Pós-Graduação em Ciências e em Matemática da UFPR, assim como da linha de pesquisa Expressão Gráfica no ensino de Ciências e Matemática; traço algumas considerações iniciais a respeito da escolha do tema: Expressão Gráfica e as Geometrias não Euclidianas; faço a delimitação do meu problema de pesquisa, quais são meus objetivos, bem como a justificativa desta pesquisa.

A partir do segundo capítulo, apresento o referencial teórico utilizado nesta pesquisa. Desenvolvo um breve histórico da Geometria de Euclides, discutindo até o quinto postulado, que deu origem às novas Geometrias. No terceiro capítulo, apresento um histórico das Geometrias não Euclidianas clássicas: Hiperbólica, Elíptica e no quarto capítulo, das outras Geometrias não Euclidianas: Fractal e Projetiva.

O quinto capítulo versa sobre a Expressão Gráfica, sua relação com a representação, a imaginação, imagens mentais e o ensino de conceitos científicos. Logo após discorro sobre a Expressão Gráfica no ensino e por fim, relaciono-a com o estudo das Geometrias não Euclidianas.

No capítulo seis apresento um levantamento de metodologias existentes para o ensino das Geometrias não Euclidianas e discuto sobre as representações gráficas que podem ser utilizadas para uma melhor compreensão e visualização dos conceitos e propriedades matemáticas relacionados com este tema. No sétimo e último capítulo relato análises e reflexões decorrentes do estudo sobre o ensino das Geometrias não Euclidianas e sua relação com a Expressão Gráfica.

2. GEOMETRIA EUCLIDIANA

2.1. TUDO COMEÇOU COM EUCLIDES

De acordo com Garbi (2006), depois da conquista da Pérsia por Alexandre O Grande, o Egito foi tomado por volta do ano 332 a.C. e ele fundou nas proximidades do Rio Nilo uma cidade portuária que batizou como Alexandria. Alexandre morreu em 323 a.C. e seu império ficou dividido entre os seus quatro maiores generais, entre eles estava Ptolomeu. Assim, iniciou-se a disseminação da cultura grega pelo Oriente Próximo.

Com Ptolomeu, uma dinastia teve início, governando o Egito por três séculos e sendo sua última representante Cleópatra. Neste período Ptolomeu, motivado por Demétrio, de Falero, que viveu em Atenas e conheceu a escola de Platão, idealizou fazer de Alexandria o centro do saber, constituído de um museu e uma vasta biblioteca, que posteriormente ficou conhecida por “Universidade de Alexandria” (na figura 1 temos uma ilustração do interior da Universidade de Alexandria) e procurou atrair para a cidade as pessoas mais inteligentes do mundo grego. Foi assim que Euclides por volta de 300 a.C. passou a ensinar Geometria na Alexandria.

FIGURA 1 - O INTERIOR DA ANTIGA BIBLIOTECA DE ALEXANDRIA.
FONTE: http://dgdalmeida.blogspot.com/2009/06/antiga-biblioteca-de-alexandria-ideia.html.

Ainda segundo Garbi (2006) as informações sobre Euclides são poucas, nem mesmo se tem certeza sobre seu nascimento e sua morte. Mas acredita-se que tenha estudado na Academia de Platão e que teve acesso aos trabalhos que os geômetras da época produziram. Com certeza pode-se afirmar que Euclides foi diretor da área de Matemática do Museu de Alexandria, onde escreveu uma coleção de textos denominada *Os Elementos,* obra que constitui a base para o que se adota como material didático no ensino da Geometria. Nas palavras de Garbi (2006, p. 49), os "*Elementos* são o mais antigo livro de Matemática ainda em vigor nos dias de hoje, uma obra que somente perde para a Bíblia em números de edições e, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos". Tornou-se um clássico após sua publicação e até hoje, desde os tempos de Arquimedes são feitas referências a esta obra.

Ávila (2001, p.1) vai ao encontro de Garbi (2006) e acrescenta:

> Temos muita pouca informação sobre Euclides, que teria vivido por volta do ano 300 a. C. E esse pouco que dele sabemos nos vem dos comentários de Proclus (410-485), um autor que viveu mais de 700 anos depois de Euclides. Mesmo Proclus tem dificuldade em determinar a época em que viveu Euclides.

Ávila (2001) tem dúvidas se Euclides, representado na figura 2, escreveu esta obra para ensinar ou simplesmente para reunir todo o conhecimento da época, visto que não se tinha a preocupação pedagógica que se tem atualmente, porém conclui que ele conseguiu atender os dois quesitos. Em *Os Elementos* está reunido todo o conhecimento matemático grego que se desenvolveu desde Tales de Mileto, que viveu no século VI a.C. até Euclides e se configura numa compilação do saber geométrico até esta época.

Para Berlinghoff e Gouvêa (2010) o sistema de Euclides foi estudado por acadêmicos romanos e gregos por aproximadamente um milênio. Traduzido para o árabe por volta de 800 d.C. e também estudado por seus acadêmicos.

FIGURA 2 - EUCLIDES
FONTE: www.im.ufrj.br/~walcy/GEOMETRIA_I.ppt.

França (2008, p. 66-67) acrescenta também:

> Durante séculos, mais de 20, as superfícies matemáticas construíram-se sobre o rigoroso alicerce grego, euclidiano. Euclides (300 a. C.) foi quem primeiro sistematizou o pensamento geométrico grego, reunindo num conjunto de livros (13 volumes) praticamente todo o conhecimento matemático conhecido até então. Sua obra (Elementos, do grego "Stoicheia") serviu como base para toda a teoria matemática posteriormente desenvolvida.

Para Struik (1992, p. 92-93), a intenção de Euclides ao escrever Os *Elementos,* era:

> (...) reunir num texto três grandes descobertas do seu passado recente: a teoria das proporções de Eudoxo, a teoria dos irracionais de Teateto e a teoria dos cinco sólidos regulares, que ocupava um lugar importante na cosmologia de Platão. Estas três descobertas eram, todas elas, tipicamente realizações gregas.

Berlinghoff e Gouvea (2010) afirmam que um dos propósitos de Euclides era de colocar a matemática grega em uma base sólida unificada e lógica.

Struik (1992) prossegue dizendo que para entender as leis do Universo, na época de Platão, era preciso estudar Aritmética, Astronomia, Música e Geometria *(quadrivium).* À entrada da Academia de Platão era colocada a seguinte máxima: “não entre nesta escola se não aprendeu os Elementos”. Aos poucos a palavra “Elementos” foi substituída por “Geometria” em todas as escolas de Platão.

Segundo Machado (2000), o *trivium* (Gramática, Dialética e a Retórica) e o *quadrivium* (Aritmética, Astronomia, Música e Geometria), desde a educação grega, consolidaram um quadro de referência que reinou por muitos séculos como base da formação humanística do mundo ocidental e constituem-se num par complementar. As matérias do *quadrivium,* ligadas diretamente com a Matemática, eram caracterizadas por uma ginástica mental, uma preparação espiritual e mais tarde passaram a ser consideradas uma formação para a prática. Eves (2004) acrescenta que para uma pessoa ser considerada culta e educada, precisava ter como bagagem cultural estas sete artes liberais.

A maior parte dos teoremas incluídos na obra *Os Elementos* foi descoberta de outros geômetras, mas várias provas são originais de Euclides e algumas foram aperfeiçoadas por ele. Desta forma, muitos consideram esta obra como a maior obra de síntese do conhecimento matemático deste período. Segundo Dante (2008), Euclides superou seus predecessores, pois fez a súmula dos teoremas de Eudoxo, melhorou os teoremas de Teateto e algumas demonstrações que haviam sido deixadas com pouco rigor matemático. Desta forma, sua genialidade não está nas descobertas que fez, mas na sequência lógica com que organizou e apresentou todo o material, nas demonstrações rigorosas que cobriu as lacunas deixadas por outros e acredita-se, de acordo com Garbi (2006), que o conhecimento matemático de Euclides ainda não estava todo descrito nesta obra.

> Embora os treze volumes não constituíssem a melhor forma de estruturar esse conhecimento, sua organização e os critérios de precisão impressos ao trabalho levaram à sua adoção, privilegiada, entre outras razões por essa organicidade, que não estava presente noutras formas de reunir o conhecimento matemático, algumas delas mais significativas, no sentido de proporcionar uma leitura relacional da matemática. Entretanto, em muitos casos, as anotações encontravam-se dispersas, compostas de um amontoado de notas e comentários difíceis de serem utilizados e, principalmente, difundidas (FRANÇA, 2008, p. 67).

Como descrito anteriormente, a obra *Os Elementos* é composta por treze livros, contendo definições, teoremas, problemas, corolários, lemas, postulados e axiomas, como mostra a tabela a seguir:

TABELA 1 – VISÃO GERAL DE OS ELEMENTOS

Livros	Definições	Teoremas	Problemas	Corolários	Lemas	Postulados	Axiomas
I	23	34	14	1	-	5	5
II	2	12	2	-	-	-	-
III	11	31	6	1	-	-	-
IV	7	-	16	1	-	-	-
V	18	25	-	2	-	-	-
VI	3	23	10	3	-	-	-
VII	22	33	6	1	-	-	-
VIII	-	25	2	1	-	-	-
IX	-	36	-	1	-	-	-
X	16	91	24	4	11	-	-
XI	28	34	5	1	1	-	-
XII	-	16	2	2	2	-	-
XIII	-	12	6	1	3	-	-
TOTAL	120	372	93	19	16	5	5

FONTE: Lancon (2003)

Atualmente, no Livro IX, dois de seus problemas são considerados como teoremas. O termo “porism”, do inglês refere-se a um resultado direto da prova de um teorema, conhecido hoje por corolário.

Garbi (2006) afirma que Euclides obedeceu a uma determinada classificação existente décadas antes de Aristóteles, pois na organização da obra, Euclides considera como noções comuns, princípios válidos para várias ciências e postulados assumidos sem demonstração, princípios específicos para determinada ciência. Garbi (2006) ressalta que esta obra de Euclides criou um padrão que ainda é seguido em todas as ciências exatas.

FIGURA 3 - CAPA DA PRIMEIRA EDIÇÃO EM LÍNGUA INGLESA DE *OS ELEMENTOS,* EM 1570.
FONTE: www.im.ufrj.br/~walcy/GEOMETRIA_I.ppt.

Berlinghoff e Gouvêa (2010) relatam que o estilo de apresentação das proposições de Os Elementos, cuja capa da primeira edição inglesa desta obra é mostrada na figura 3, é muito formal e não há motivação ou discussão. Porém, após cada enunciado das proposições, há uma figura à qual ela se refere para ilustrá-la, indicando a atenção que Euclides dava à representação gráfica. Alguns autores defendem a sua apresentação:

> A capacidade de Euclides para usar uma linguagem simples e lógica para exprimir leis que nunca tinham sido definidas anteriormente constitui um desenvolvimento histórico significativo. O seu livro, Elementos, é uma das mais importantes obras científicas na historia da humanidade, pois marca uma nova forma de pensar, baseada no raciocínio empírico (HEMENWAY, 2010, p. 17).

De acordo com França (2008), a Matemática de alguns povos, como os árabes e os chineses, caiu no esquecimento sendo suprimida pelas “vantagens” dadas pela obra de Euclides. Os árabes faziam interação com outras áreas do conhecimento, como Filosofia e Arte, onde eram estudadas conjuntamente e isso não ocorria em Os *Elementos,* que passou a ser um conjunto de argumentos fechados, fundamentado em axiomas que até então eram inquestionáveis e pelos quais deveriam basear qualquer teoria.

2.1.1. O conteúdo de Os Elementos

A seguir vem uma breve descrição dos principais conteúdos contemplados nos treze livros de Euclides, porém com mais atenção ao primeiro livro que contém os cinco postulados que foram mais discutidos ao longo da história, especialmente o quinto axioma, que dá origem à descoberta das Geometrias não Euclidianas.

Striuk (1992, p. 91) afirma que:

> Os primeiros quatro livros tratam da geometria plana, (...) e, partindo das mais elementares propriedades de retas e ângulos, conduzem à congruência de triângulos, à igualdade de áreas, ao teorema de Pitágoras (livro I, proposição 47), à construção de um quadrado de área igual a do retângulo dado, à seção de ouro, ao circulo e aos polígonos regulares.

Com mais detalhes, Garbi (2006), diz que o **livro I** inicia com 23 definições, entre eles do ponto, reta, superfície, plano, ângulo, perpendicular, figura, centro, círculo, diâmetro e paralelas. Logo após, os famosos cinco postulados são apresentados da seguinte forma:

> Seja postulado o seguinte:
>
> 1. Traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.
>
> 2. Estender um segmento de reta continuamente em uma linha reta. 3. Descrever um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
>
> 4. Que todos os ângulos retos são iguais.
>
> 5. Que, se uma linha reta caindo sobre duas linhas retas faz ângulos internos do mesmo lado cuja soma seja menor do que dois retos, as duas linhas retas, se estendidas indefinidamente, encontram-se do mesmo lado em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos (GARBI, 2006, p. 50).

Segundo Lancon (2003) nos três primeiros postulados, Euclides pressupõe a existência de pontos, linhas e círculos. Já a existência de todos os outros objetos geométricos é provada em proposições posteriores. O quarto e o quinto postulados foram pensados durante muito tempo como teoremas que poderiam ser provados.

Garbi (2006) comenta que atualmente a redação dos postulados de Euclides ensinado nas escolas está diferente da redação feita pelo matemático. O ensino de Geometria é um extrato dos volumes de *Os Elementos* e não inclui muitos tópicos tratados nesta obra por motivos didáticos, porém as demonstrações dos teoremas são as mesmas de Euclides, apenas foram feitas simplificações de escrita e de símbolos.

Hoje os postulados são apresentados da seguinte forma:

> 1. Dois pontos determinam uma única reta.
> 2. A partir de qualquer ponto de uma reta é possível marcar sobre ela um segmento de comprimento arbitrário.
> 3. É possível traçar um círculo com centro arbitrário e raio arbitrário.
> 4. Todos os ângulos retos são iguais.
> 5. Por um ponto do plano fora de uma reta passa uma única reta paralela a essa reta (retas paralelas de um plano são aquelas que prolongadas indefinidamente não se encontram) (DANTE, 2008, p. 79).

Coutinho (2001) afirma que com estes postulados, Euclides formulou toda a Geometria que até hoje estudamos no colégio. Um exemplo disso está no estudo do famoso Teorema de Pitágoras que é próprio desta Geometria.

Dante (2008) diz que “para Euclides, a Geometria era uma ciência dedutiva que operava a partir de certas hipóteses básicas – os axiomas ou postulados[2]”. Por exemplo, o postulado das paralelas era considerado um axioma, pois não precisava discuti-lo. Porém, muitos matemáticos passaram a discutir este postulado e chegaram a novas conclusões que apresentarei mais adiante.

Coutinho (2001), afirma que uma teoria é dita axiomática quando é construída a partir de axiomas, ou conceitos básicos, que não precisam de comprovação. Estes axiomas são escolhidos de forma arbitrária, porém é necessário ter a preocupação de que sejam consistentes, suficientes e independentes. São consistentes se não conduzirem a teoremas contraditórios, suficientes quando a teoria pode ser desenvolvida sem precisar recorrer a outros postulados e independentes se nenhum deles pode ser provado a partir dos outros. Caso contrário, este axioma passa a ser um dos teoremas da teoria. A Geometria Euclidiana foi a primeira teoria da Matemática a ser axiomatizada.

Segundo Garbi (2006), ao longo dos tempos, muitos matemáticos verificaram que o 5º postulado difere dos outros e sua compreensão exige esforço e não é tão óbvio como os anteriores. Desta forma, muitos geômetras acharam que se

[2] Axiomas (grego) e postulados (latim) são usados como sinônimos, pois ambos significam “verdade”. (BARCO, (2001)).

tratava de um teorema demonstrável, o que resultou em exaustivos estudos por mais de dois milênios.

Struik (1992) em relação ao postulado das paralelas, afirma que as tentativas de reduzi-lo a um teorema, conduziram à descoberta das Geometrias não Euclidianas.

Ainda no livro I está a demonstração do Teorema de Pitágoras. A prova dada por Euclides usa a figura que está representada a seguir, que é conhecida como “a cadeira da noiva” (figura 4), pois sua configuração lembra uma cadeira, porém a noiva é um mistério, diz Garbi (2006).

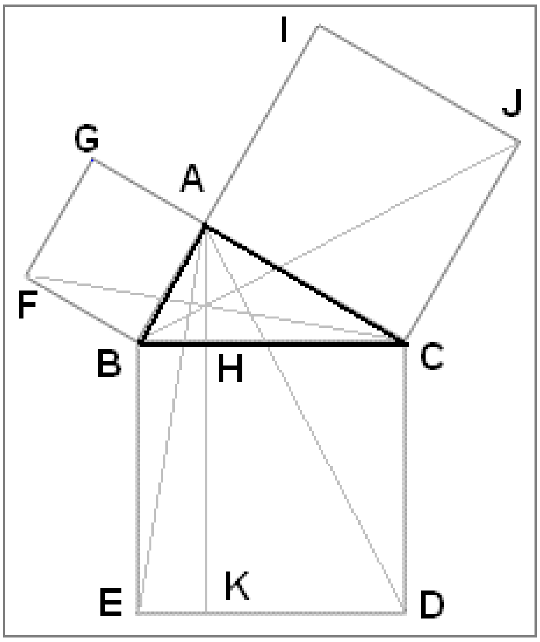

FIGURA 4 - A “CADEIRA DA NOIVA”.
FONTE: Garbi (2006)

Segundo Lancon (2003), o conteúdo do L**ivro II** tem sido entendido em termos de álgebra geométrica. É o menor dos livros da obra de Euclides. Suas proposições tratam geometricamente questões que são algébricas. Uma delas, a proposição II – 4, que é citada por Garbi (2006), faz a demonstração da clássica relação do produto notável: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Na figura 5 está a sua representação:

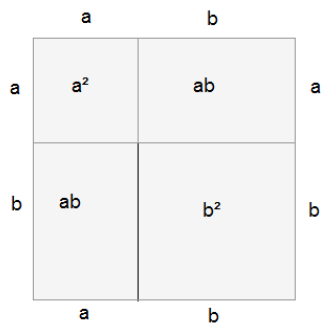

FIGURA 5 - PROVA GEOMÉTRICA DO PRODUTO NOTÁVEL.
FONTE: Garbi (2006)

Outra proposição contida neste Livro II é a de número II - 5, que trata da resolução de equações do segundo grau (figura 6).

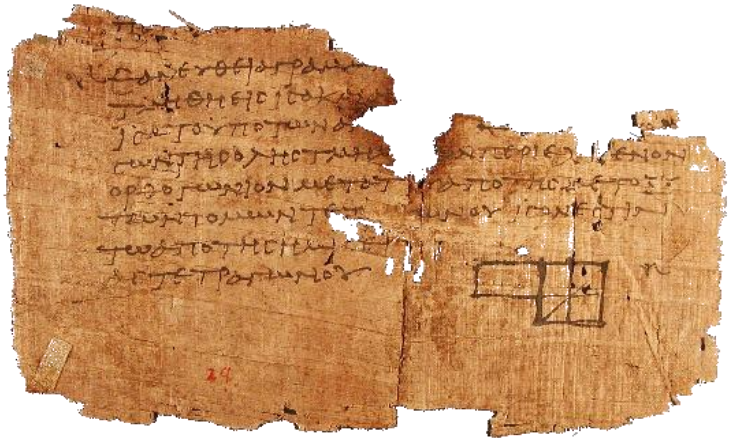

FIGURA 6 - PAPIRO OXIRRINCO, UNIVERSIDADE DA PENNSYLVANIA, 100 D.C. CONTÉM A PROPOSIÇÃO V DO LIVRO II DOS *ELEMENTOS*.
FONTE: www.im.ufrj.br/~walcy/GEOMETRIA_I.ppt

O **Livro III** é dedicado ao estudo da circunferência, bem como dos seus correspondentes: arcos, segmentos, tangentes e cordas. Contêm proposições que, certamente são descobertas de Hipócrates, de acordo com Garbi (2006), incluindo a "potência de ponto em relação a uma circunferência": $PA.PB = PC.PD = PT^2$, e representado conforme a figura 7.

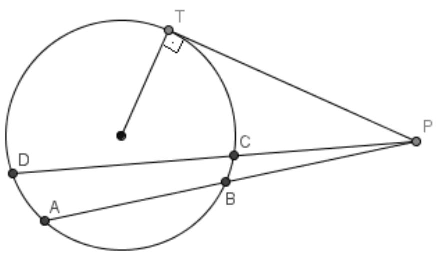

FIGURA 7 - POTÊNCIA DE UM PONTO
FONTE: A autora (2011)

A construção com régua e compasso é tratada no **Livro IV,** e contem 16 problemas envolvendo alguns polígonos regulares, tais como o triângulo, quadrado, pentágono e hexágono, circunscritos e inscritos em circunferências. Segundo Lancon (2003), todas as proposições são problemas, especificamente construções a serem realizadas.

No **Livro V,** Euclides apresenta a Teoria das Proporções, que segundo Struik (1992) está ligada à Eudoxo e é todo aritmético, apesar de utilizar segmentos de reta para representar números. E o **Livro VI** é dedicado à aplicação da Teoria das Proporções.

As propriedades dos números naturais são estudadas no **Livro VII,** é totalmente aritmético e dentre seus teoremas, o mais importante é sobre o máximo divisor comum. O **Livro VIII** também é aritmético e é referente às propriedades dos números, mas sobre sequências numéricas que hoje são chamadas de progressões geométricas.

Outro livro aritmético é o **Livro IX.** Nele estão quatro grandes teoremas da Matemática, entre outros de menor nível: Teorema Fundamental da Aritmética (decomposição de números por meio de fatores primos); existência de infinitos primos; o terceiro é sobre como somar os termos de uma progressão geométrica e o último é uma regra para encontrar números perfeitos.

Com relação aos livros de número VII a IX, Struik (1992, p. 92), resume afirmando que “ ... são dedicados à teoria dos números – não às técnicas de cálculo, mas aos assuntos pitagóricos, tais como a divisibilidade de inteiros, a adição de séries geométricas e algumas propriedades dos números primos”.

O mais longo de todos é o **Livro X** e conforme afirma Struik (1992), certamente o mais difícil de ser compreendido. A discussão geométrica é bem resumida neste livro, pois seu estudo está dirigido para os diversos tipos de grandezas incomensuráveis, produzidas pela extração da raiz quadrada.

Para Struik (1992) os três últimos livros estão voltados para a geometria sólida e conduzem, por meio dos ângulos sólidos, aos volumes de alguns deles. É feita a discussão dos cinco poliedros platônicos e a demonstração que existem apenas cinco regulares.

Garbi (2006) complementa que o **Livro XI** traz a passagem de Euclides do plano para o espaço. As figuras sólidas são definidas como aquelas que têm largura, comprimento e espessura; são definidas as seguintes figuras: ângulo sólido, pirâmide, prisma, paralelepípedo, cone, esfera e os cinco poliedros regulares. Este é um livro mais familiar para muitos estudantes, pois a maioria dos seus teoremas é apresentada nos currículos atuais.

O estudo de áreas e volumes faz parte do **Livro XII.** Suas proposições mostram como fazer este estudo em figuras como círculos, cones, esferas e pirâmides e também mostra proposições sobre proporcionalidade. Entre estas proposições, Garbi (2006) cita a proposição XII – 7, que é referente ao cálculo do volume da pirâmide triangular, que mostra que o seu volume é igual a um terço do volume do prisma triangular conforme ilustrado na figura 8.

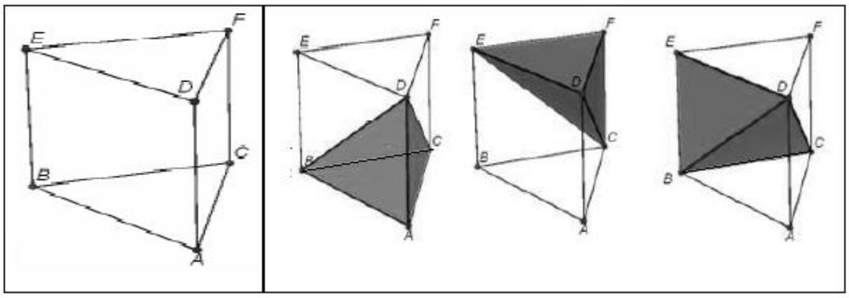

FIGURA 8 - DECOMPOSIÇÃO DO PRISMA TRIANGULAR EM TRÊS PIRÂMIDES TRIANGULARES
FONTE: http://www.limc.ufrj.br/htem4/papers/19.pdf

O último livro, o **Livro XIII** é dedicado ao estudo dos poliedros regulares: tetraedro, cubo (ou hexaedro), octaedro, dodecaedro e icosaedro, que estão ilustrados na figura 9. Garbi (2006) afirma que Euclides os escolheu para fechar sua obra.

FIGURA 9 – POLIEDROS REGULARES
FONTE: Garbi (2006)

Garbi (2006) afirma que o trabalho de Euclides termina desta forma, porém Hípsicles, um geômetra posterior a Euclides, por volta de 180 a.C. escreveu um livro com cerca de oito proposições que mostrou algumas propriedades desconhecidas de Euclides e que são bastante interessantes sobre o dodecaedro e o icosaedro e este veio a ser conhecido por **Livro XIV** de Os Elementos.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010), *Os Elementos* não se referem apenas a números e formas, mas também sobre como pensar. E este pensar não está relacionado somente à Matemática, e sim como pensar logicamente sobre qualquer coisa.

No decorrer dos anos, a Geometria Plana modelou o pensamento ocidental. Os autores exemplificam relatando que diversos escritos muito influentes na Política, Literatura e Filosofia não são inteiramente compreendidos sem uma avaliação de Euclides, como:

- René Descartes baseou, no século XVII, parte de seu método nas cadeias de raciocínio utilizadas por Euclides para ligar princípios simples a conclusões complexas;
- Isaac Newton, no mesmo século de Descartes, usou a forma dos Elementos para fazer a apresentação de suas ideias;
- Abraham Lincoln, no século XIX, com o objetivo de ser um advogado melhor, estudava a obra de Euclides durante a noite, à luz de velas;
- A independência dos Estados Unidos da América foi proclamada com base nos axiomas de Euclides. Em 4 de julho de 1776, as treze colônias se desligaram da Grã – Bretanha concordando com um sistema axiomático – a Declaração da Independência. Neste documento consta a justificativa para o rompimento com o país colonizador, no qual os axiomas são enunciados como verdades evidentes por si, de modo explícito.

O estudo de Os Elementos durou muitos séculos devido ao seu modelo de pensamento preciso. Foi no século XX que o ensino da Geometria foi para as escolas, porém a forma como passou a ser ensinada, levou os alunos a aprender as demonstrações pela memorização dos passos, sem a compreensão do teorema, tornando-se um ritual penoso e sem ligação com o mundo real.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010), apenas em 1970 é que os textos de Geometria começaram a inserir outras ideias, mais informais e relacionadas com o estudo de medidas. Porém, com o tempo, o ensino da Geometria foi ficando praticamente informal e superficial. Desta forma, a estrutura lógica de Euclides foi colocada nos capítulos finais e candidata à omissão, pela pressão do tempo a que os professores estão subordinados. E assim chegamos ao caos que está o ensino de Geometria nas escolas.

2.2. QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES E AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

2. 2. 1. Quinto Postulado

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010), a abordagem sistemática, com uma estrutura lógica, de Euclides foi tão perfeita e convincente que mais de dois mil anos foram precisos até que um dos mistérios mais fundamentais começasse a ser questionado.

Para Mlodinow (2004, p. 101):

> Através dos tempos, os matemáticos que tentaram demonstrar o postulado das paralelas como um teorema chegaram bem perto da descoberta de novos tipos de espaços estranhos e emocionantes, mas cada um deles foi impedido por uma crença simples: que o postulado era uma propriedade verdadeira e necessária do espaço.

A Geometria grega tinha muitas verdades que até então não eram questionadas e foi preciso a teimosia de alguns matemáticos para levar esta inquietude adiante. França (2008, p. 74) sobre a geometria grega, afirma que:

> (...) realiza um exercício de sistematização, reunindo elementos que permitissem criar uma estrutura em forma de escada, com cada novo conhecimento sempre apoiado em conhecimentos anteriores. Tal estrutura foi tão bem alicerçada que precisou de muitos séculos para que fossem encontradas algumas rachaduras.

Sobre estas “rachaduras” no alicerce de Euclides que este trabalho toma forma. E a primeira delas está no quinto postulado de Euclides, que segundo Coutinho (2001) é atualmente apresentado da seguinte forma:

Por um ponto P exterior a uma reta m, considerada em um mesmo plano, existe uma única reta paralela a reta m.

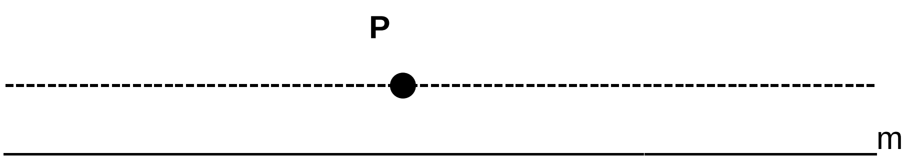

FIGURA 10 - REPRESENTAÇÃO DO 5° POSTULADO
FONTE: A autora (2011)

De acordo com Coutinho (2001), por aproximadamente dois mil anos a Geometria Euclidiana foi considerada a única possível e Os Elementos era uma obra livre de quaisquer dúvidas, porém os questionamentos com relação à Geometria Euclidiana surgiram a partir do postulado citado acima. E complementa que:

> A certa altura da História da Ciência, os matemáticos, estimulados pelas afirmações de alguns filósofos representados enfaticamente por Kant, argumentaram com a seguinte ideia: se há possibilidade apenas de uma única geometria, certos postulados ou noções comuns seriam teoremas, isto é, seriam uma consequência lógica de proposições primeiras. Foi dentro desse raciocínio que renomados matemáticos tentaram provar o quinto postulado de Euclides, pois consideravam este postulado o menos intuitivo e de redação complicada (COUTINHO, 2001, pg. 35-36).

E Ávila (2001) vai ao encontro de Coutinho (2001) quando afirma que os Elementos, apesar do texto ser muito admirado, motivou questionamentos em relação ao quinto postulado, também conhecido como o postulado das paralelas. Desde a antiguidade muitos matemáticos acreditaram que ele pudesse ser provado a partir dos outros quatro postulados, pois como dito anteriormente, este destoava dos demais. Muitas tentativas foram feitas para se chegar numa demonstração e todas fracassaram.

Segundo França (2008), o rompimento parcial com a “sagrada” teoria de Euclides, a partir do desenvolvimento de outras geometrias, funcionou como uma alavanca para motivar uma reflexão e revisão da geometria tradicional. A autora ainda reforça:

> A história das mudanças significativas que ocorreram na matemática e na geometria, não se dá isoladamente, mas é consequência de um estado de coisas, de processos em ação, impulsionando-a ao questionamento de seus próprios argumentos, da mesma forma que o homem vive fases de inquietação e põe em xeque aspectos antes sequer tocados (FRANÇA, 2008, p. 72).

Segundo Ávila (2010) as Geometrias não Euclidianas provocaram mudanças e o aprimoramento do sistema axiomático de Euclides, que voltou a ser estudado com cuidado e reconsiderado.

Garbi (2006, p.239) relacionou os principais geômetras que se lançaram ao questionamento de uma geometria que era considerada intocável e iniciaram a tentativa de demonstrar o quinto postulado usando os quatro anteriores e que de alguma forma provocaram algumas mudanças significativas:

> Posidônio (século I a.C.), Gêmino (século I a.C.), Cláudio Ptolomeu (século II), Proclus (século V), Nasir ed-din (século XIII), Commandino (século XVI), John Wallis (século XVII), Girolano Sacheri (século XVIII), Johann Heinrich Lambert (século XVIII) e Adrien – Marie Legendre (século XVIII). (...) Sacheri e Lambert, entretanto, ao supor a falsidade do quinto postulado em busca de absurdos, acabaram, sem dar-se conta, descobrindo alguns teoremas que, hoje sabemos, pertencem a uma geometria não – euclidiana.

Berlinghoff e Gouvêa (2010) também citam Proclus como um dos iniciadores dos questionamentos acerca do postulado das paralelas. Proclus escreveu sobre a geometria grega de modo histórico e nesta exposição tem uma passagem sobre a tentativa de demonstrar o quinto postulado, feita por Ptolomeu no segundo século, bem como suas falhas de argumento, fornecendo uma demonstração sua, mas que mais tarde foi considerada com defeitos também.

Segundo Mlodinow (2004), o raciocínio de Ptolomeu era complicado, apesar da essência de seu método ser simples, no qual assumiu uma forma alternativa do postulado. Duzentos anos após Ptolomeu, Proclus tentou demonstrar o postulado de uma vez por todas. Ele passava muitas horas analisando a obra euclidiana. Proclus chegou até a escrever um comentário sobre o primeiro livro de *Os Elementos.*

Muitos matemáticos árabes, nos séculos VIII e IX, traduziram a obra de Euclides e buscaram uma prova para o quinto postulado. Esta busca durou séculos, tanto no Oriente Médio como no Ocidente, com muitas falhas. Um entendimento correto deste postulado surgiu apenas no século XIX.

Paralelamente às tentativas de demonstração, alguns matemáticos, de acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2010), propuseram enunciados equivalentes, porém mais claros ou mais fáceis de trabalhar do que a escrita de Euclides. Um dos substitutos ficou conhecido como o Postulado de Playfair, em homenagem ao matemático escocês John Playfair (1748 – 1819), que o tornou popular no século XVIII e que foi escrito da seguinte forma: “por um ponto fora de uma reta, existe exatamente uma reta paralela à reta dada” (BERLINGHOFF e GOUVEA, 2010, p. 198). Esta versão é muito conhecida atualmente e está presente nos livros de geometria em lugar do enunciado original dado por Euclides, como citado por Coutinho (2001) anteriormente.

Outro matemático que merece destaque, de acordo com Mlodinow (2010) é Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), que plantou as sementes de uma nova revolução, não apenas no sistema de Euclides, mas um sistema operacional completamente novo, que passaram despercebidos durante muitos séculos, como veremos em seguida.

2. 2. 2. Os primeiros estudos

Para Garbi (2006), foi o padre jesuíta italiano Girolano Saccheri (1667 – 1733) quem encontrou os primeiros teoremas não euclidianos. Antes de morrer fez a publicação de um opúsculo, que pela redução ao absurdo, pretendia ter provado este postulado. Saccheri, negando o postulado, demonstrou vários teoremas, acreditando ter chegado a uma contradição, contudo não havia contradição e isto foi notado posteriormente por Eugênio Beltrami (1835 – 1900), quando conheceu os estudos de Saccheri.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 199), Saccheri tentou uma nova e inteligente abordagem para o quinto postulado, argumentando da seguinte forma:

> Sabemos que o axioma de Euclides não contém contradição porque temos no mundo real modelos do sistema. Acreditamos que o Postulado das Paralelas pode ser demonstrado a partir dos outros axiomas, mas até agora ninguém conseguiu fazê-lo. Suponha que possa ser demonstrado. Então, se substituirmos o postulado por sua negação, estaremos pondo uma contradição no sistema. Portanto, se eu usar a negação do Postulado das Paralelas como axioma e encontrar uma contradição nesse novo sistema, terei mostrado que o Postulado das Paralelas pode ser demonstrado a partir dos outros axiomas, embora eu não tenha uma demonstração direta disso!

Saccheri precisava mostrar a contradição existente no axioma das paralelas. Ele conseguiu provar resultados interessantes, mas não conseguia encontrar uma contradição que fosse clara.

Segundo Garbi (2006) os trabalhos de Saccheri não ficaram perdidos, apesar de esquecidos por quase cem anos, pois mais tarde, muitos matemáticos leram seus escritos e tentaram seguir adiante. Um deles foi Lambert, seguido posteriormente por Legendre.

Johann Lambert (1728-1777), cuja imagem é apresentada na figura 11, também utilizou quadriláteros em seus estudos, mas considerando três ângulos retos e analisando as possibilidades para o quarto ângulo. De acordo com Garbi (2006) o quadrilátero de Lambert é a metade do de Saccheri. O trabalho dos dois foi semelhante, porém Lambert fez uma nova descoberta: sobre a área de qualquer polígono de n lados em relação às duas hipóteses não euclidianas. Lambert morreu sem ter feito a publicação dos seus resultados.

FIGURA 11 - LAMBERT
FONTE: Garbi (2006)

Adrien Marie Legendre (1752-1833), após Lambert, pesquisou também sobre a teoria das paralelas. Quando escreveu *Éléments de Géométrie* que demonstrou interesse pelo postulado das paralelas e passou a estudá-lo. Segundo Garbi (2006), Legendre parece nunca ter admitido a existência de outras geometrias e apesar da descoberta de importantes teoremas, não foi muito além dos trabalhos de Lambert e Saccheri. Segundo Eves (2004), Legendre ganhou fama em geodésica por seu trabalho em triangulação na França e contribuiu para popularizar o problema do quinto postulado.

Tanto Saccheri, quanto Legendre e Lambert já conheciam alguns teoremas não euclidianos antes mesmo da comprovação da existência de geometrias diferentes da de Euclides. Courant e Robbins (2000) afirma que as conclusões destes matemáticos eram equivalentes a teoremas desta nova geometria e se não as considerassem como absurdas, poderiam ter sido os “descobridores” das Geometrias não Euclidianas. Isto era fato quando Gauss deu atenção para esta questão.

Em relação ao estudo das Geometrias não Euclidianas:

> Uma consequência de alcance muito maior foi a libertação da geometria de seus moldes tradicionais. Despedaçou-se uma convicção secular e profundamente arraigada de que apenas uma geometria era possível e abriu caminho para a criação de muitos outros sistemas geométricos (...). A criação das geometrias não – euclidianas, puncionando uma crença tradicional e rompendo com um hábito de pensamento secular, desferiu um golpe duro no ponto de vista da verdade absoluta em matemática (EVES, 2004, p. 544-545).

É importante salientar que, segundo França (2008), a abertura para outras Geometrias não “aposenta” a Geometria Euclidiana na história, ela ainda se faz presente no cotidiano, entretanto a sua “quebra de exclusividade” abre as portas para novas perspectivas, onde se podem esclarecer várias questões que provocaram dúvidas nos argumentos de Euclides.

Para Eves (1992, p. 47):

> O verdadeiro desenvolvimento da geometria não – euclidiana não se baseou no trabalho de Saccheri e só ocorreu por volta do início do século XIX, mais de dois milênios depois de Euclides. Então, surpreendentemente, foi desenvolvida por três pessoas, Lobachevski, Bolyai e Gauss.

Segundo Oliva (1983) Gauss foi o primeiro a acreditar que o quinto postulado de Euclides era independente dos demais, embora por receio tenha mantido esta crença sem divulgação, de modo que poucos sabiam de seu trabalho na época, por volta de 1810. Ele aceitou a hipótese de Saccheri do ângulo agudo e denominou a geometria para a qual isto é válido de Geometria não Euclidiana.

Sobre Gauss, cuja imagem aparece ilustrada na figura 12, França (2008, p. 78) relata:

> Pioneiro na articulação de uma inovação nas linguagens geométrica e matemática, pesquisador inconformado, Gauss (1777-1855), partiu em busca de um novo meio para tratar a questão da geometria e, consequentemente, das superfícies matemáticas estudando o postulado das paralelas, segundo o qual: por um ponto fora de uma reta só pode passar uma única reta paralela a reta dada. Gauss percebeu que este fato vale para o plano, mas não para a tridimensão, pois nesse caso, tanto podem existir infinitas paralelas – na geometria de Lobachevisky como nenhuma na geometria de Riemann (FRANÇA, 2008, p. 78).

FIGURA 12 - GAUSS
FONTE: Garbi (2006)

Segundo Garbi (2006) esta busca é comprovada por cartas escritas entre 1813 e 1831, que mostram as deduções de Gauss para vários teoremas sem contradições e que inicialmente foram chamadas de Geometrias Anti – Euclidianas, depois Geometria Astral e por fim, Geometrias Não – Euclidianas.

Coutinho (2001) complementa que o adjetivo “não euclidianas”, que recebeu esta nova Geometria, está ligado ao fato que estas contém princípios distintos daqueles elaborados por Euclides. Estes levam a teoremas que contradizem os da Geometria Euclidiana, que era considerada a descrição perfeita do nosso mundo e assim, inquestionável. Mas após esta descoberta, passou a dividir posição com outras geometrias. Com a dificuldade surgida com o quinto postulado, D’Alembert disse que isto constitui o escândalo da Geometria.

De acordo com França (2008), Gauss dizia que a Geometria era uma ciência do olho. Para a Geometria, a visão é um sentido muito importante. Como exemplo, cita a esfera, “volume que nos suporta, é um espaço fechado a duas dimensões mergulhado num espaço a três dimensões” (FRANÇA, 2008, p. 79) e que a terceira dimensão seria uma correção da retina, uma construção cerebral. Conforme Garbi (2006) sua visão focou-se em “reconceituar” o paralelismo. Gauss teve muito tempo para fazer a publicação de seus estudos referentes à nova Geometria, mas nunca o fez.

Uma importante descoberta feita por Gauss, conforme Garbi (2006) trata de superfícies curvas pesquisadas por meio da Geometria Diferencial. Depois da introdução ao conceito de curvatura em cada ponto de superfícies do espaço euclidiano tridimensional, Gauss mostrou que ela pode ser nula, positiva ou negativa. Considerando-se três pontos diferentes sobre uma superfície curva e unindo estes pontos dois a dois pelos caminhos mais curtos desta superfície, forma-se um triângulo dito geodésico. Assim, Gauss demonstrou que em todos os pontos, para superfícies constantes:

> a) se a curvatura é zero, a soma dos ângulos internos dos triângulos geodésicos é igual a dois retos. b) se a curvatura é positiva, a soma dos ângulos internos dos triângulos geodésicos é maior que dois retos e as áreas de tais triângulos são proporcionais aos excessos daquela soma em relação a dois retos. c) se a curvatura é negativa, a soma dos ângulos internos dos triângulos geodésicos é menor que dois retos e as áreas de tais triângulos são proporcionais aos déficits daquela soma em relação a dois retos (GARBI, 2006, p. 258).

Para tornar mais clara a compreensão deste conteúdo, a seguir apresentamos uma representação (figura 13) relacionada às curvaturas mencionadas por Garbi (2006):

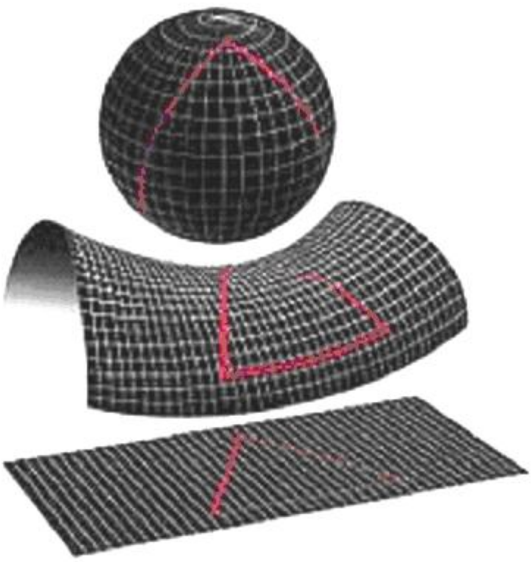

FIGURA 13 – SUPERFÍCIES E SUAS CURVATURAS
FONTE: http://www.portalescolar.net/2011/03/googol-googolplex-grau-geometria-nao.html

Na primeira superfície (elíptica) temos uma curvatura positiva; na segunda (hiperbólica), negativa e na última superfície (euclidiana), a curvatura nula.

De acordo com Garbi (2006) as superfícies cilíndricas e cônicas são exemplos da existência de outras superfícies de curvatura constante e nula em todos os pontos. Desta forma, se forem considerados três pontos sobre uma superfície cônica e estes unidos por geodésicas, forma-se um triângulo cuja soma dos ângulos internos a ele vale dois retos como nos triângulos retilíneos sobre o plano. A esfera é um exemplo de superfície de curvatura constante e positiva em todos os pontos, cuja soma dos ângulos internos do triangulo esférico é sempre maior que dois retos. A superfície de curvatura constante e negativa é denominada de pseudo – esfera. Ela é gerada pela rotação da tractriz em torno de sua assíntota. Nesta superfície, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois retos.

O primeiro que divulgou seus resultados sobre uma nova Geometria, tornando – os públicos em 1829 foi Nikolai Ivanovich Lobachevisky (1792 – 1856). Paralelamente ao seu trabalho e independentemente, János Bolyai (1802-1860) publicou um trabalho análogo. Ambos se valeram da hipótese dos ângulos agudos e assim como Euclides consideraram que as retas têm comprimento infinito.

Porém as publicações de Lobachevisky não bastaram para convencer os matemáticos da existência de um novo sistema geométrico, pois esses trabalhos eram semelhantes ao de Saccheri: com a negação deste postulado, surgiram novos teoremas sem chegar a nenhuma contradição: daí a descrença. Mas foi a partir destes questionamentos que a própria Geometria Euclidiana foi repensada, pois Euclides demonstrou somente um número finito de teoremas e a contradição poderia aparecer no próximo teorema a ser demonstrado.

Bolyai, cuja imagem aparece na figura 14, era filho de Farkas Bolyai, amigo de Gauss, relata Garbi (2006). Pai e filho conversavam a respeito dos problemas envolvendo o quinto postulado de Euclides. Bolyai Filho passou muito tempo pesquisando sobre a Teoria das Paralelas e fora aconselhado por seu pai, em súplicas, a abandonar estes estudos.

FIGURA 14 – BOLYAI
FONTE: Garbi (2006)

Coutinho (2001) afirma que Bolyai escreveu uma carta a seu pai em 1823, com as seguintes palavras: “resolvi publicar um trabalho sobre a teoria das paralelas tão logo tenha o material organizado... o objetivo ainda não foi alcançado, mas tenho feito descobertas maravilhosas que quase sou esmagado por elas... do nada criei um universo” (p. 39). Seu pai lhe respondeu: “pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema, tanto isso quanto as paixões sensuais, porque isso também pode tomar todo seu tempo, e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida” (p. 39).

Complementando a advertência de Farkas Bolyai:

> Se você realmente teve êxito na questão, é melhor não perder tempo em torná-lo público, por duas razões: primeiro, porque as ideias passam facilmente de uma pessoa a outra e alguém pode antecipar-se na publicação; em segundo lugar, há certa verdade em dizer-se que muitas coisas tem sua época, na qual elas são encontradas em vários lugares, como as violetas aparecem por toda a parte na primavera (GARBI, 2006, p. 253).

Segundo Mlodinow (2004), János Bolyai nunca publicou outro trabalho sobre Matemática. E conta que Gauss também o alertou sobre seu trabalho, já que o próprio Gauss fez descobertas parecidas. Alguns anos depois, Gauss leu o artigo de Lobachevisky propondo que ele fosse aceito como membro da Sociedade Real de Ciência em Göttingen. Os dois poderiam ter continuado desconhecidos se não fosse por Gauss, mas foi após a morte deste que finalmente ocorreu a “revolução não euclidiana”.

Lobachevisky perseverou em suas buscas, não abandonando suas crenças nas descobertas que estava fazendo, mesmo sem ter conhecimento dos trabalhos de Bolyai, como veremos no texto sobre a Geometria Hiperbólica.

De acordo com Mlodinow (2004), depois da morte de Gauss, suas pesquisas e anotações sobre o espaço não euclidiano foram descobertas, assim como os trabalhos de Bolyai e Lobachevisky, que tiveram seus artigos incluídos, em 1867, na segunda edição do livro Elementos de Matemática, de Richard Baltzer, tornando-se referência para quem estuda as novas geometrias.

Para Ávila (2001), Eugenio Beltrami (1835 – 1900) foi o primeiro a mostrar um modelo de Geometria não Euclidiana, no qual é possível fazer a sua interpretação a partir da geometria euclidiana. Beltrami conseguiu, de acordo com Garbi (2006), uma conquista maior que o teorema sobre representações que havia enunciado. Com base neste teorema e em estudos posteriores, Beltrami mostrou, (embora de forma indireta), por volta de 1868, que não é possível deduzir o quinto postulado a partir dos anteriores, das definições e das noções comuns que precedem este postulado, sendo assim, pode ser formulado com liberdade.

Mlodinow (2004, p. 125) vai ao encontro de Ávila (2001) afirmando que:

> Eugenio Beltrami enterrou de uma vez por todas a questão de provar o postulado das paralelas: ele demonstrou que, se a geometria euclidiana forma uma estrutura matemática consistente, então o mesmo deve ocorrer com os espaços não euclidianos recém descobertos.

Concluindo-se que a consistência da Geometria Euclidiana passou a ser repensada, não estando acima das outras e também não sendo refutada. Porém, o seu sistema axiomático foi revisto e comparado, assim com seus elementos, com as novas Geometrias que acabaram de ser descobertas.

Garbi (2006) afirma que um dos passos importantes destes matemáticos foi perceber a existência de uma diferença entre as circunferências da Geometria de Euclides e as novas Geometrias, no caso do ângulo agudo: enquanto as circunferências euclidianas tendem a uma linha reta se seus raios crescerem indefinidamente, as circunferências não – euclidianas tendem a uma linha não reta denominada horociclo, (nome definido por Lobachevisky) quando seus raios aumentam indefinidamente.

Isto pode causar certa estranheza, já que os conceitos de círculo e circunferência são independentes do quinto postulado e imagina-se que não deveria haver esta diferença de comportamento. Porém a curva a que tende uma circunferência não euclidiana não pode ser uma reta quando o seu raio tende ao infinito.

Desta forma, Garbi (2006) apresenta outra definição: “a circunferência, em qualquer geometria, pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos de um plano, equidistantes a um ponto pertencente a ele” (p. 255). Outra maneira de defini-la é afirmar que é a trajetória ortogonal a um feixe de retas que são coplanares e provém de um ponto central, já que a circunferência corta todos os seus ângulos retos, bastando imaginar que a circunferência é a figura limite de um polígono regular quando os seus lados tendem ao infinito.

Segundo Ávila (2001), Felix Klein (1849 – 1925) e Henri Poincaré (1854 – 1912) construíram outros modelos, apoiando-se na Geometria de Euclides. E, somente depois de muitos matemáticos apresentarem modelos euclidianos das Geometrias não Euclidianas, é que estas obtiveram credibilidade.

Ao se estudar a consistência da Geometria Euclidiana, pois se percebeu que ela era incompleta e tinha várias lacunas. O próprio Euclides usava fatos externos aos postulados para suas demonstrações. Assim, tornava-se preciso reorganizar a Geometria tradicional e suprir os postulados que faltavam no seu modelo axiomático. No final do século XIX isso foi realizado por muitos matemáticos, destacando-se David Hilbert (1862 – 1943) que publicou o livro *Fundamentos da Geometria* e nele faz uma apresentação rigorosa e adequada ao desenvolvimento dedutivo da Geometria de Euclides.

3. AS DUAS CLÁSSICAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS (OU PSEUDO – EUCLIDIANAS): A DE LOBATCHEVISKY E A DE RIEMANN

Segundo França (2008), as Geometrias de Lobachevisky e de Riemann vêm somar-se à Geometria Euclidiana, ampliando os conceitos geométricos utilizados desde a época de Euclides.

Hemenway (2010) conclui que "a diferença entre a Geometria Euclidiana e outras geometrias está no seu tratamento das linhas paralelas" (p. 17). Na Geometria Euclidiana, as linhas paralelas estão sempre separadas pela mesma distância e nunca irão se encontrar. Já em outras, há casos que duas retas se encontram em algum lugar, em que paralelas não existem e ainda que possam existir, mas não estão a uma mesma distância.

Coutinho (2001), a partir da substituição do postulado das paralelas afirma que surgiram dois tipos clássicos de Geometrias não Euclidianas: a Hiperbólica e a Elíptica. Porém a sua aceitação foi difícil, pois contraria as experiências da Geometria tradicional.

De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2010), é tentador pensar as Geometrias não Euclidianas como invenções "extravagantes", enquanto que é mais aceitável continuar com a geometria euclidiana como a geometria "verdadeira", já que nos parece bem mais familiar. Na época, muitos não aceitavam os novos estudos e acreditavam que muitas contestações das novas geometrias seriam feitas.

Oliva (1993, p. 4) relata que:

> Apesar da autoridade de Riemann muita gente imaginava que contradições seriam encontradas nessas Geometrias não – Euclidianas, até que o matemático Beltrami em 1868 mostrou que em determinadas superfícies, chamadas de curvatura constante negativa, as curvas chamadas geodésicas podiam ser interpretadas como "retas" e obteve uma geometria para a qual vale a hipótese dos ângulos agudos.

Para Berlinghoff e Gouvêa (2010) não se trata de pensar qual geometria é a verdadeira, ou discutir o fato de que o sistema que Euclides desenvolveu veio antes, por isso é mais válido, mas pensar como funcionam, quais são as Geometrias convenientes para a realização de determinada tarefa, já que elas são ferramentas, desenvolvidas pelo homem, para ajudar a lidar com o mundo e compreendê-lo. De toda forma, a geometria é escolhida por quem trabalha, como por exemplo:

> Se você for um construtor, um agrimensor ou um carpinteiro (...) então a geometria euclidiana é a mais simples de usar; funciona para tudo isso. Se você for um astrônomo estudando galáxias distantes, poderia preferir a geometria riemanniana; ela é mais eficiente do que a euclidiana para tais coisas. Se você for um físico teórico, a geometria de Lobachevisky poderia ser melhor para você que qualquer uma das outras (BERLINGHOFF e GOUVEA, 2010, p. 202).

Estudaremos com mais detalhes e separadamente cada uma destas Geometrias: a Hiperbólica e a Elíptica. Posteriormente mais duas geometrias: a Projetiva e a Fractal. Existem outras geometrias consideradas não euclidianas, como a Topológica e a Geometria do Táxi, porém nos deteremos nestas quatro por serem as Geometrias propostas nas Diretrizes Curriculares de Matemática para o Ensino Médio.

3.1. GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Como dito anteriormente, Coutinho (2001) afirma que os matemáticos Lobachevisky e Bolyai desenvolveram trabalhos parecidos e independentes um do outro. Porém, Lobachevisky (figura 15) dedicou mais de duas décadas à sua descoberta. Sua primeira apresentação pública ocorreu em 1826, à Sociedade de Física – Matemática de Kasan, mas não foi aceita. Outros matemáticos tinham conhecimento da possibilidade de outras Geometrias, mas não sustentaram a mesma crença de Lobachevisky.

Bolyai tinha convicção das suas ideias, mas não as aprofundou. Lobachevisky foi mais além e finalmente conseguiu publicar suas descobertas em 1855, mas foi ditada, pois já se encontrava cego e idoso, mas provou que tinha confiança na sua criação e força na sua mente. A nova geometria, portanto, é também conhecida por seu nome.

FIGURA 15 – LOBACHEVISKY
FONTE: Garbi (2006)

Posteriormente, no ano de 1829, outro trabalho seu foi ignorado, especialmente por estar escrito em russo, apesar de ser mais amplo. Todavia, foi o primeiro matemático a mostrar que existe outra geometria além da de Euclides. Denominou-a *Geometria Imaginária* e *Pangeometria,* mais tarde. Em 1835 a 1837, Lobachevisky tentou fazer outras publicações, sem sucesso. Logo após, no ano de 1840, publicou em alemão um resumo de tudo o que havia descoberto e finalmente seu trabalho foi lido por Gauss, sendo muito elogiado por ele. Porém, em Kasan, onde prestou 20 anos de serviço, foi demitido em 1846. Publicou seu último trabalho sobre o assunto um ano antes de sua morte.

Segundo Franco (2008) a Geometria Hiperbólica admite os postulados de Euclides, menos o quinto, que é o postulado das paralelas, sendo substituído por: “existe uma reta r e um ponto P que não pertence a r tal que por P passa ao menos duas retas paralelas à reta r”, entendendo reta como geodésica do espaço hiperbólico.

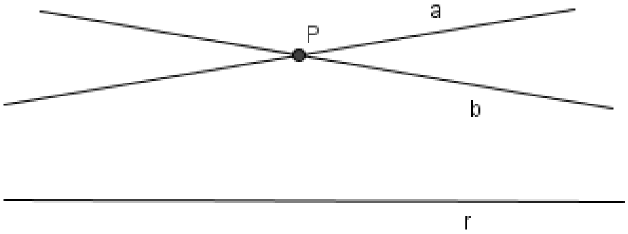

FIGURA 16 – POSTULADO DE LOBACHEVISKY
FONTE: Coutinho (2001)

Apesar de a teoria avançar, esses matemáticos não conseguiam uma representação para este espaço não euclidiano. Segundo Mlodinow (2004), nem Gauss, Bolyai e Lobachevisky conseguiram visualizar um modelo que pudesse representar este novo tipo de espaço, e isso foi realizado por Beltrami e de uma forma mais simples por Klein e Poincaré, mais tarde.

Foi em 1868 que Beltrami construiu um modelo para a Geometria Hiperbólica, fazendo com que muitos matemáticos encarassem uma nova realidade, com base em fatos da Geometria Euclidiana. Para a representação do plano hiperbólico, Beltrami utilizou uma superfície denominada pseudoesfera (figura 17), que se parece com uma corneta.

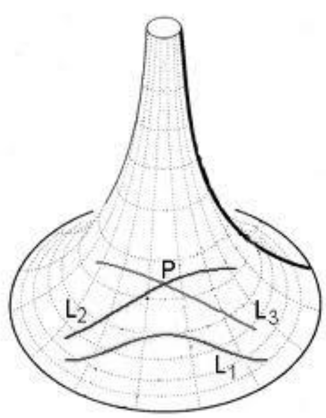

FIGURA 17 – PSEUDOESFERA
FONTE: Ávila (2010)

Segundo Ávila (2010), Beltrami considerou as geodésicas da superfície como retas. Na figura 17 temos duas retas (geodésicas) L_2 e L_3 que passam por um ponto P, mas que não cruzam com a reta L_1 e desta forma, as retas L_2 e L_3 são paralelas a L_1.

Segundo Coutinho (2001), o Postulado de Lobachevisky encontra possibilidades de afirmação na superfície da pseudoesfera. Mas este modelo de Beltrami continha uma falha: muitas geodésicas não poderiam ser prolongadas além da aresta que a pseudoesfera possui o que contraria o segundo postulado de Euclides. Klein e Poincaré elaboraram outros modelos que não tinham este problema, mas que também tinham como apoio a Geometria Euclidiana.

No modelo elaborado por Klein, o plano é interpretado como o interior de um círculo fixado, excluindo a sua fronteira; as retas são as cordas deste círculo sem as suas extremidades e os pontos são os mesmos da Geometria de Euclides.

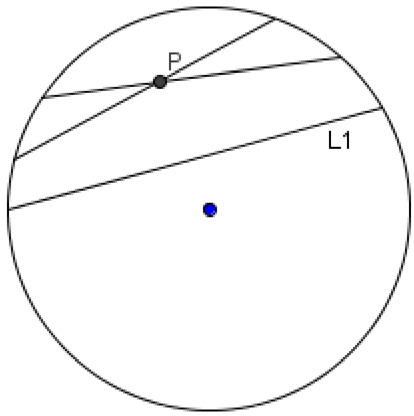

FIGURA 18 – MODELO DE KLEIN
FONTE: Ávila (2010)

Da figura 18 podemos notar que dada uma reta L_1 e um ponto P fora dela, existem infinitas retas paralelas à primeira reta, pois elas não tem pontos em comum com esta. Este modelo de Klein satisfaz os quatro primeiros postulados de Euclides, porém nega o quinto, que é o postulado das paralelas.

Segundo Coutinho (2001), para complementar este modelo, é necessário que as retas tenham, dentro de uma área finita, uma extensão infinita. Esta dificuldade é superada inserindo uma unidade de medida variável, ou seja, na proporção que fica mais próximo da fronteira do círculo, seu tamanho diminui. Assim garantimos que a reta será infinita, pois se quisermos medi-la, não conseguiremos atingir a sua “extremidade”, pois a sua unidade de medida vai encolhendo na razão tanto maior quanto mais próximos ficarmos da fronteira.

Para a Geometria de Lobachevisky, conclui-se um importante resultado: a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior a dois ângulos retos.

Coutinho (2001) apresenta a prova deste resultado. Primeiramente mostra que a soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é menor que 180º e em seguida, mostra que vale para todos os triângulos.

Para Ávila (2010), uma das consequências das novas descobertas foi a possibilidade de uma nova interpretação, além dos conceitos primitivos do sistema axiomático. Como exemplo, temos os modelos que foram citados acima: o modelo de Beltrami, cujo plano era a pseudoesfera e as retas eram as geodésicas desta superfície; o modelo de Klein, cujo plano era o interior de um círculo e as retas eram as cordas deste círculo. Estes modelos não tinham que necessariamente expressar verdades evidentes por eles mesmos, como o antigo modelo euclidiano, nos quais os postulados eram formulados sobre conceitos primitivos concebidos.

Depois destes dois modelos, outro foi elaborado, na tentativa de interpretar e representar a Geometria Hiperbólica. De acordo com Mlodinow (2004), em 1880, Poincaré definiu seu modelo de espaço hiperbólico. Ao criá-lo, Poincaré substitui alguns termos como retas e pontos por entidades concretas, não fazendo a interpretação da Geometria Hiperbólica por meio destes termos.

Segundo Coutinho (2001, p. 44), neste modelo, “as retas são arcos de círculos perpendiculares ao círculo, que representa o plano hiperbólico”.

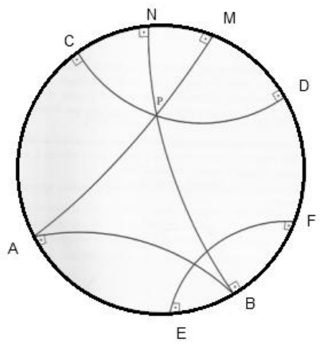

FIGURA 19 – MODELO DE POINCARÉ
FONTE: Coutinho (2001)

Mlodinow (2004) apresenta, por meio de uma figura, a comparação de linhas paralelas no plano euclidiano e no plano hiperbólico.

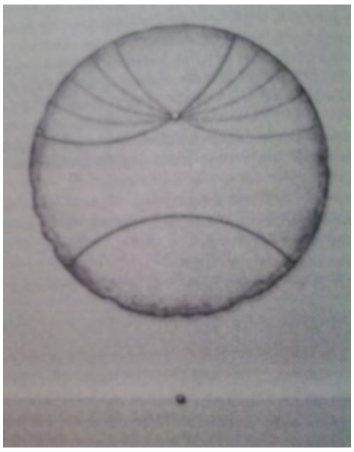

FIGURA 20 – LINHAS PARALELAS NO ESPAÇO HIPERBÓLICO E EUCLIDIANO
FONTE: Mlodinow (2004)

A figura 20 mostra os dois modelos de geometria para linhas paralelas: a primeira para o espaço hiperbólico e a segunda para o espaço euclidiano. De acordo com Mlodinow (2004), o modelo de Poincaré é um laboratório que torna mais simples a visualização de alguns teoremas que vários matemáticos tentaram descobrir, como exemplo, neste modelo fica mais fácil perceber que não existem retângulos. Não é possível desenhá-los. Isto porque o modelo de Poincaré é o próprio espaço hiperbólico, mas em duas dimensões.

Segundo Coutinho (2001), na Geometria Hiperbólica, existem dois tipos de curvas e a teoria dos círculos que está relacionada ao postulado das paralelas da Geometria Euclidiana, não é mais válida. Como exemplo:

> A prova de que a medida de um ângulo inscrito é a metade do arco correspondente é feita com base naquele postulado e, dado que este é substituído pelo Postulado de Lobachevisky, tal afirmativa perde o significado na Geometria Hiperbólica. Entretanto a proposição de que o raio de um círculo é perpendicular à tangente a este círculo, no ponto de tangência, permanece válida, pois a sua constatação não depende do Postulado de Euclides (COUTINHO, 2001, p. 67).

As duas curvas da Geometria Hiperbólica são chamadas de curva limitante e curva equidistante. A primeira é importante para a Trigonometria Hiperbólica, enquanto que a segunda curva está ligada ao Quadrilátero de Saccheri.

A curva limitante, também chamada de horociclo, é a trajetória ortogonal de um feixe de retas com vértice num ponto ideal α.

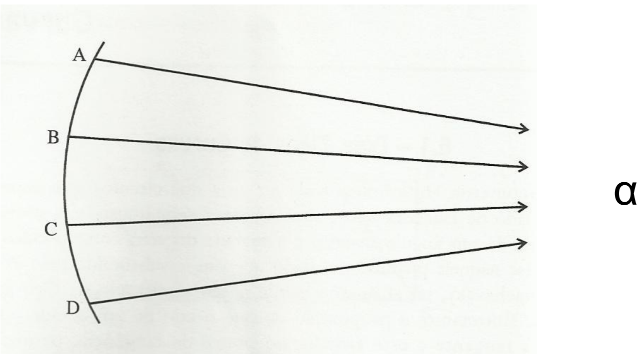

FIGURA 21 – FEIXE DE RETAS COM VÉRTICE NUM PONTO IDEAL A.
FONTE: Coutinho (2001)

O horociclo na Geometria Hiperbólica é o equivalente à reta da Geometria Euclidiana considerada como um círculo de centro num ponto infinito. Porém, possui algumas características próprias da sua natureza, como: quaisquer duas retas limitantes são congruentes.

Já a curva equidistante, chamada de hiperciclo, é a trajetória de um feixe de retas que possui uma perpendicular em comum. O hiperciclo possui dois ramos, chamada de linha base, que fica um de cada lado da perpendicular em comum.

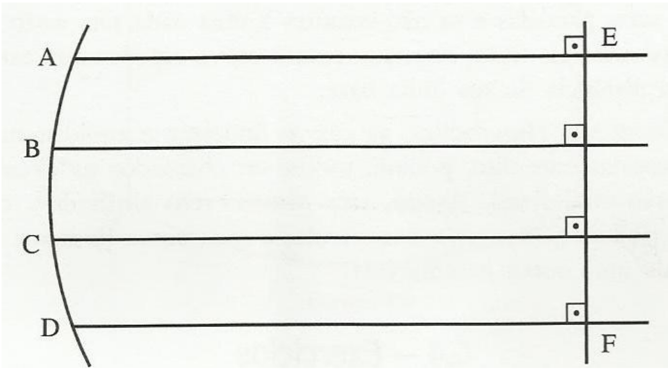

FIGURA 22 – FEIXES DE RETAS COM PERPENDICULAR EM COMUM
FONTE: Coutinho (2001)

O horociclo e o hiperciclo possuem características semelhantes, porém tem algumas que são próprias, como por exemplo, nem todos os hiperciclos são congruentes.

Na Geometria de Lobachevisky, estas curvas mais o círculo podem ser considerados círculos dessa geometria não euclidiana. Desta forma, no plano hiperbólico, quando três pontos estão alinhados, significa que podem pertencer a um círculo, a um horociclo ou a um dos ramos do hiperciclo.

De acordo com Garbi (2006), a primeira vez que entram em contato com esta teoria, os alunos ficam espantados, pois alguns conceitos de círculo e circunferência são independentes do quinto postulado de Euclides e não haveria motivos para fazer esta distinção. Porém, de uma forma simples, pode-se chegar à conclusão de que a curva a que tende uma circunferência não euclidiana, não pode ser uma reta quando seu raio tende ao infinito:

> A circunferência, em qualquer geometria, pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes a um ponto pertencente a ele. Mas é fácil ver que a circunferência corta todos os seus raios em ângulos retos (...). Portanto, outra forma de se definir circunferência é dizer que ela é a trajetória ortogonal a um feixe de retas coplanares que saem de um ponto central (GARBI, 2006, p. 255-256).

Esta explicação não pode ser considerada uma demonstração, mas já basta para que o aluno possa compreender este fato. Como todos os horociclos são iguais e fazendo o horociclo girar ao redor de um de seus raios, determina-se uma superfície chamada de horosfera. O estudo de suas propriedades foi importante na descoberta das relações métricas da Geometria Hiperbólica, deduzindo fórmulas trigonométricas referentes à comprimentos, áreas e volumes desta geometria.

Garbi (2006) relaciona algumas propriedades da Geometria de Lobachevisky consideradas importantes no seu estudo. São elas:

1. Não são todos os triângulos que podem inscrever num círculo;
2. Os triângulos que possuem vértices infinitamente afastados, isto é, com dois lados paralelos, tem áreas finitas;
3. Com apenas régua e compasso, pode-se transformar um círculo em um quadrado de mesma área (fato este visto por Bolyai).
4. Com régua e compasso é impossível dividir um segmento em três partes iguais.

3.2. GEOMETRIA ELÍPTICA

Tornou-se natural os questionamentos acerca de outras geometrias, após a descoberta de Lobatchevski. Segundo Mlodinow (2004), outro tipo de espaço foi descoberto algumas décadas após a descoberta do espaço hiperbólico: o espaço elíptico, que é obtido se outra violação do quinto postulado for assumida: que não existem retas paralelas.

Mlodinow (2004) conta que Gauss passou dez anos na Alemanha depois do ano de 1816, fazendo um levantamento de algumas áreas deste país, o que atualmente é chamado de levantamento geodésico. Sua pesquisa consistia em medir a distância entre as cidades e outros pontos de referência e dispor estes dados num mapa. Com as dificuldades surgidas com seu trabalho, como por exemplo, o alcance limitado de seus instrumentos de prospecção e assim era preciso construir linhas retas a partir de segmentos muito pequenos, isso o levou ao desafio de criar uma “colcha de retalhos” para produzir um mapa bidimensional partindo de dados que eram tridimensionais e ainda que sofriam variações nas elevações e dadas também pela curvatura da Terra.

Quando Gauss levou em consideração a curvatura da Terra, percebeu que sua superfície não tem a mesma geometria do plano euclidiano. Desta forma o matemático chegou a duas conclusões. A primeira delas diz que uma superfície pode ser considerada como um espaço; a outra estabelece que a curvatura de um espaço qualquer pode ser estudada na própria superfície, sem precisar de uma referência a um plano euclidiano de dimensão superior. Essa ideia foi muito importante para o desenvolvimento e estudo da nova geometria, pois não se pode sair do Universo para estudar a sua superfície limitada, nos levando a determinar a curvatura do nosso próprio espaço.

Para Coutinho (2001) Bernhard Riemann (1826 – 1866), cuja imagem está representada na figura 23, criou uma Geometria, denominada Elíptica, contrariando o axioma das paralelas, estabelecendo que não existem retas paralelas a uma reta dada. Aqui a reta não é mais infinita como na Geometria Euclidiana, pode ser percorrida de forma ilimitada.

FIGURA 23 – RIEMANN
FONTE: Garbi (2006)

Segundo Mlodinow (2004), Riemann, em 1846, aos 19 anos recebeu do diretor da sua escola um livro de Legendre, com 859 páginas, sobre a Teoria dos Números para examinar. Mas para o jovem este livro não exigiu muita concentração e o devolveu em seis dias dizendo ter sido uma boa leitura. Riemann foi examinado sobre este livro e tirou a nota máxima.

Neste mesmo ano Riemann matriculou-se na Universidade de Göttingen, onde Gauss era professor. Sua tese de doutorado foi entregue em 1851 e um dos analistas era Gauss, que escreveu sobre o trabalho do aluno que sua mente era criativa, verdadeiramente matemática e que tinha uma imaginação “gloriosamente fértil”. Gauss afirmou que já escreveu um trabalho parecido, mas que nunca fora publicado.

No ano de 1854, numa aula inaugural pronunciada por Riemann, para sua admissão como professor adjunto na Universidade de Gottingen, ele fez o apontamento de outras geometrias e assim de outros espaços, motivando os nomes de Geometria ou Espaços de Riemann. Não chegou a expor o nome de geometria não euclidiana, mas explicou como a esfera era interpretada como um espaço elíptico bidimensional, embora suas implicações fossem óbvias.

> Em duas dimensões, esse tipo de espaço era conhecido e estudado num contexto diferente pelos gregos e até por Gauss; no entanto, eles não perceberam a sua importância como um exemplo de um espaço elíptico. E por uma boa razão: tinha sido provado que no sistema de Euclides, mesmo se fossem permitidas formas alternativas do postulado das paralelas, os espaços elípticos não poderiam existir. Bem, no final, não foram os espaços elípticos que se mostraram problemáticos, foi a própria axiomática de Euclides (MLODINOW, 2004, p. 131 – 132).

Para o autor, Riemann interpretou a sua maneira os conceitos de ponto, reta e plano; escolhendo a superfície de uma esfera como plano, os pontos como as posições, assim como os de Poincaré, usando coordenadas de latitude e longitude e as retas eram as geodésicas sobre a esfera.

Berlinghoff e Gouvêa (2010), complementam que para visualizar um modelo da geometria de Riemann, é necessário visualizar a superfície de uma esfera como se fosse um plano e pontos como posições em sua superfície. Nesta Geometria, as retas são consideradas como os círculos máximos, chamados de geodésicas, que dividem a esfera em duas partes iguais, assim como a linha do equador ou as linhas de longitude da Terra. Esses círculos são chamados de máximos, pois são os maiores círculos que podem ser traçados na esfera e desta forma são os caminhos com menor curvatura.

Sendo assim, tem – se uma analogia com as retas no plano euclidiano, pois o caminho mais curto formado por dois pontos da esfera é um arco do círculo máximo que passa por estes pontos. Dois grandes círculos se cruzam, de modo que não existem retas paralelas nesta geometria, um exemplo simplificado sobre isto é pensar em cortar a Terra ao meio, sem cortar o Equador.

Podemos entender um pouco melhor estas afirmações a partir das figuras 24 e 25 que seguem e constatar algumas diferenças com a geometria euclidiana: as retas e os triângulos:

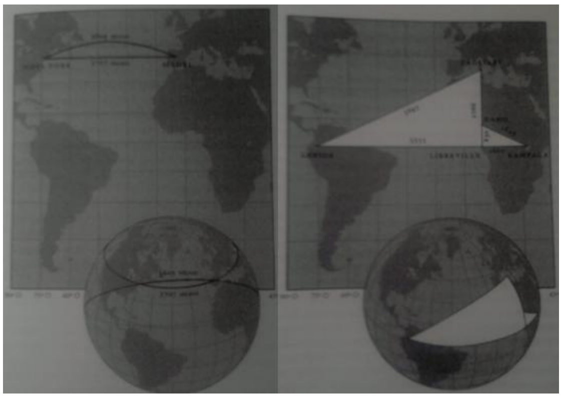

FIGURA 24 – REPRESENTAÇÃO DE RETA E TRIANGULO NO PLANO BIDIMENSIONAL E EM SUPERFÍCIE ESFÉRICA
FONTE: Mlodinow (2004)

No espaço de Riemann todas as retas, ou seja, os círculos máximos se interceptam e a soma dos ângulos nos triângulos é superior a 180º. É possível escolher um triângulo de modo que a soma seja 270º, como exemplo o triângulo formado pela linha do Equador e dois meridianos ligando o Equador ao pólo Norte.

FIGURA 25 – TRIÂNGULO ESFÉRICO COM 270º
FONTE: A autora (2011)

De acordo com Mlodinow (2004), assim como no espaço hiperbólico, para distâncias relativamente menores, o espaço curvo seria mais parecido com o euclidiano, e foi por isso que se levou tanto tempo para ser percebido. Por exemplo, quanto menor é o triângulo, o número de graus que ultrapassa 180º diminui, ficando menos perceptiva a diferença.

Outras propriedades da Geometria Elíptica foram estudadas, principalmente por seu precursor. Entre elas, Coutinho (2001), cita o Postulado de Riemann: “quaisquer duas retas em um plano tem um ponto de encontro” (p. 73).

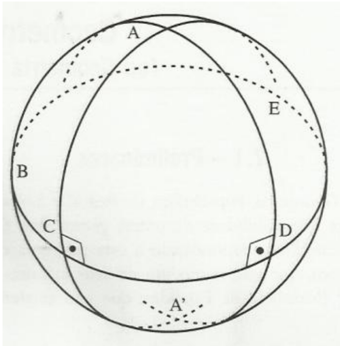

FIGURA 26 – RETAS SECANTES COM UMA RETA PERPENDICULAR EM COMUM
FONTE: Coutinho (2001)

Este postulado pode ser interpretado usando uma superfície esférica, na qual teríamos como retas os círculos máximos desta superfície. Dois círculos máximos se interceptam em mais de um ponto. Para evitar isso, consideramos idênticos os dois pontos de interseção. As retas ACA’ e ADA’ tem como única perpendicular a reta BCDE (também reta polar de A e A’, sendo estes dois pontos pólos desta reta) e cortam-se nos pontos A e A’, que são extremidades de um mesmo diâmetro.

Temos ainda que a distância de A e A’ a qualquer ponto desta reta polar é constante. E a distancia de qualquer reta a seu pólo também é constante para todas as retas. Assim, uma reta tem um comprimento finito.

Para Mlodinow (2004, p. 150):

> A revolução do espaço curvo teve uma influência profunda em todas as áreas da matemática. Desde o tempo de Euclides até a época em que os trabalhos de Gauss e de Riemann foram descobertos postumamente, a matemática era principalmente pragmática. A estrutura de Euclides era interpretada como descrevendo o espaço físico (...). Mas por volta de 1900, os matemáticos tinham a opiniãode que os axiomas eram afirmações arbitrárias, sendo apenas a base de um sistema cujas consequências deveriam ser investigadas num tipo de jogo mental.

Desta forma, surgiu para os matemáticos novos questionamentos: mostrar a consistência lógica de suas estruturas e se a Geometria de Euclides é autoconsistente. Portanto a comparação das novas Geometrias com a Euclidiana foi muito natural, ao mesmo tempo que precisavam provar os novos teoremas e que nenhum deles contradiz os outros.

3.3. DIFERENÇAS E SEMELHANÇAS ENTRE AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS CLÁSSICAS

Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 201) afirmam que:

> Nos meados do século XIX, havia três “marcas” diferentes de geometria, que se distinguiam pela maneira de tratar as paralelas. Os novos sistemas de Lobachevisky e Riemann foram chamados de *geometrias não euclidianas* para enfatizar sua oposição lógica à Geometria de Euclides.

Podemos destacar algumas diferenças e semelhanças entre as geometrias, usando como comparação propriedades da Geometria Euclidiana. Tenório (1995, p. 44) fez um quadro comparativo entre as Geometrias Hiperbólica e Elíptica com a Euclidiana, destacando as principais semelhanças e diferenças entre elas:

TABELA 2 – DIFERENÇAS E SEMELHANÇAS ENTRE AS GEOMETRIAS

Geometria Parabólica (euclidiana)	**Geometria Hiperbólica (Lobatchevski – Bolyai)**	**Geometria Elíptica (Gauss – Riemann)**
1° postulado: dois pontos determinam uma única reta	Idem	Dois pontos determinam uma ou mais de uma reta (ex: pólos de uma esfera)
2° postulado: toda reta é infinita	Idem	As retas são finitas
3° postulado: um ponto (centro) e uma distância (raio) determinam um círculo	Idem	Idem
4° postulado: todos os ângulos retos são iguais entre si	Idem	Idem
5° postulado: um ponto não pertencente a uma reta determina uma única reta paralela à reta dada	Um ponto não pertencente a uma reta determina mais de uma reta paralela a reta dada	Um ponto não pertencente a uma reta dada não determina paralelas a reta dada
1ª conseqüência: a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos (180°)	A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois retos (180°) e a diferença é proporcional à área do triângulo	A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois retos (180°) e a diferença é proporcional à área do triângulo
2ª conseqüência: a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência é igual a π.	A razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência é maior que π e aumenta com a área da circunferência.	A razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência é menor que π e diminui com o aumento da área da circunferência.

FONTE: Tenório (1995)

Tenório (1995), usou como comparação os cinco postulados de Euclides, a soma dos ângulos internos de um triângulo e a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro para apontar algumas destas semelhanças e diferenças. Com os questionamentos acerca do quinto postulado, como visto anteriormente, passou – se a questionar os postulados anteriores para as geometrias que estavam surgindo. As semelhanças entre as três Geometrias são dadas pelo terceiro e quarto postulado. As diferenças aparecem nos outros itens da tabela feita pelo autor.

Para ilustrar a diferença entre as três Geometrias em relação às retas paralelas, observemos a figura 27 a seguir:

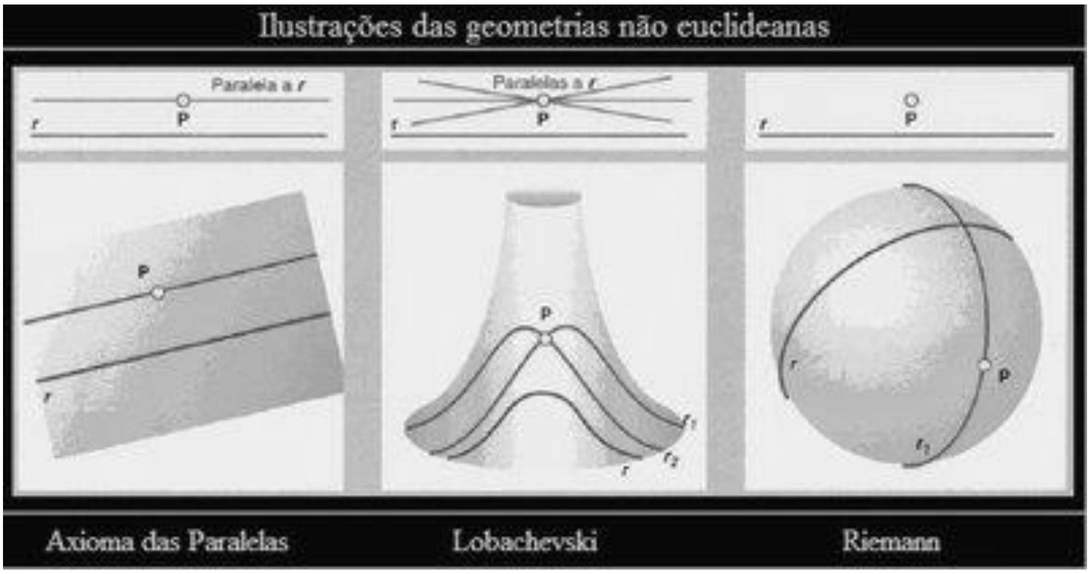

FIGURA 27 – AXIOMA DAS PARALELAS NAS TRÊS GEOMETRIAS
FONTE: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2001/icm35/nao_euclideanas.htm

Na primeira ilustração temos a representação do quinto postulado para a Geometria Euclidiana, no qual temos apenas uma reta paralela à reta dada; na segunda, a representação para a Geometria Hiperbólica, na qual podemos ter infinitas retas paralelas e a última, representando a Geometria Elíptica, não é possível ter retas paralelas à reta dada.

Berlinghoff e Gouvea (2010), também destacam sua comparação destas Geometrias, na mesma direção de Tenório (1995) e afirmam que apenas na Geometria de Euclides é possível ter triângulos semelhantes e não congruentes, pois nas outras duas, se os ângulos correspondentes de dois triângulos fossem de mesmo valor, então os triângulos deveriam ser congruentes. Os autores também apontam a diferença entre essas geometrias em relação a soma dos ângulos internos de um triângulo, e que esta soma varia conforme a Geometria considerada e ilustram a situação da seguinte forma:

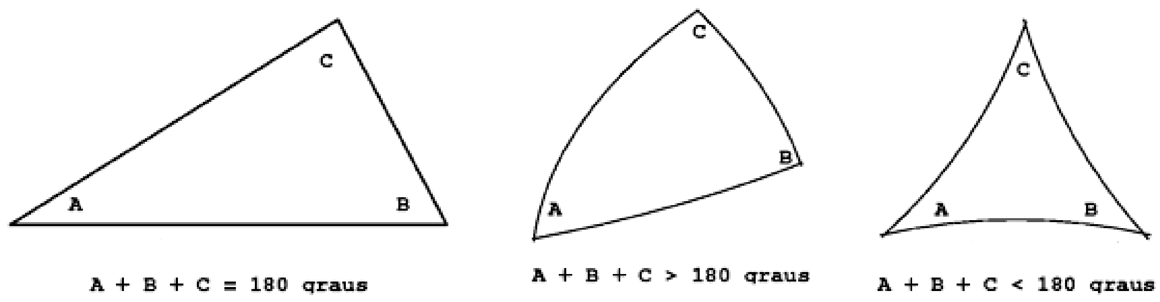

FIGURA 28 – SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO, NAS TRÊS GEOMETRIAS
FONTE: Berlinghoff e Gouvêa (2010)

De acordo com a figura 28, os dois últimos desenhos não parecem ser triângulos, pois estamos acostumados com os triângulos definidos na Geometria Euclidiana, embora sejam. Cada lado é o caminho mais curto para os vértices que estão sobre a superfície de cada Geometria. A representação é dada desta forma para acentuar as diferenças, já que a superfície na qual se encontram os três triângulos é um modelo de geometria euclidiana, distorcendo as distâncias relativas entre os vértices dos triângulos não euclidianos.

Outra diferença notável dada por Berlinghoff e Gouvêa (2010), refere-se a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, que dependem do tipo de Geometria, que também é comentada na última linha da tabela de Tenório (1995).

3.4. AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS CLÁSSICAS NA SALA DE AULA

De acordo com Kaleff (2009), os conhecimentos geométricos ficaram restritos aos saberes e construções geométricas de Euclides. Porém estes conhecimentos evoluíram, e um dos motivos se deve ao fato dos estudos que questionam a Geometria Euclidiana: as Geometrias não Euclidianas.

> Nas duas últimas décadas, todavia, criaram-se nos meios educacionais, oportunidades para a inclusão de conteúdos advindos das diversas Geometrias, Euclidiana e não-Euclidianas, aos conhecimentos geométricos escolares considerados como adequados à formação de alunos para o

> século XXI. Estes conteúdos, para uma nova constituição da Geometria Escolar, têm sido objeto de discussão entre os membros de várias associações de profissionais da Matemática: matemáticos, professores, e educadores matemáticos, de vários países. (KALEFF, 2009, p. 2).

A autora ainda justifica a inserção destas geometrias nas aulas de matemática:

> O estudo das Geometrias não-Euclidianas traz grandes contribuições para a Escola, pois possibilita uma visão da Matemática como um conhecimento que pode ser contestado, por meio de discussões dos conceitos de *verdade matemática* e de *espaço*, já que historicamente o estudo das Geometrias não-Euclidianas começou a partir da tentativa de se provar ou negar o 5º Axioma de Euclides, conhecido também como Postulado das Paralelas. (KALEFF, 2009, p. 4).

Kaleff (2009), afirma que o ensino das Geometrias não Euclidianas pode contribuir significativamente na formação do aluno, já que permite a observação da Matemática não mais como um conjunto de conhecimentos estáveis, mas fazer conexões entre o que é novo e aquilo que já é conhecido, verificando que os conceitos e valores podem variar ou não, dependendo do contexto considerado.

Pataki (2003), apresenta alguns exemplos destas conexões que podem ser feitas ao estudar a Geometria Elíptica: proporciona uma interação entre algumas áreas de conhecimento como a História, a Geografia, a Geometria e a Trigonometria, possibilitando a relação entre o aprender e os diferentes olhares que temos do nosso mundo.

Cabariti (2004), defende o ensino da Geometria Hiperbólica num ambiente informatizado, relacionando este conteúdo às novas tecnologias, tão defendidas e incentivadas na educação, proporcionando a manipulação das propriedades e motivando seu estudo, ligadas também à História da Matemática. Segundo a autora, este estudo:

> Pode favorecer o processo de compreensão das principais características e natureza da Matemática, visto que este conhecimento faz-se presente não apenas pela quantificação do real e pelo desenvolvimento de técnicas de cálculos com números e com as grandezas, mas sobretudo, pela criação de sistemas abstratos que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados por vezes a fenômenos do mundo físico. (CABARITI, 2004, p. 153).

Berro (2008) apresenta um estudo entre a Geometria Hiperbólica e a Arte, relacionando com as obras de Escher a partir do disco de Poincaré, para representar novas aproximações do infinito em suas obras da série Limite Circular, de 1958.

> As possibilidades para se trabalhar com as figuras apresentadas transcendem às aplicações evidentes que podemos extrair pensando simplesmente naquilo que os currículos da matemática escolar tratam em termos de Geometria, que é notadamente de supremacia euclidiana nos currículos de Ensino Fundamental e de Ensino Médio. (BERRO, 2008, p. 78).

E o autor ainda complementa:

> Não se exclui evidentemente as grandes vantagens que um professor teria de comparar as diferentes geometrias hoje estudadas a fim de que os alunos comecem a enxergar o Universo com olhares distintos do que estão acostumados a fitar, bem como ter uma visão mais crítica do que passa ao seu redor. Certamente, é uma oportunidade excepcional de apresentar um tema complexo utilizando figuras de rara beleza, do ponto de vista artístico, estético e matemático. (BERRO, 2008, p. 78).

Desta forma Berro (2008), busca motivar o estudo da Geometria Hiperbólica pela Arte, abordando também conceitos matemáticos como o infinito, progressão geométrica, quando se depara com figuras de limites quadrados, cuja figura tem a metade do quadrado anterior, aliando a Álgebra com a Geometria. Outra conexão possível também é a Física, promovendo uma discussão sobre qual seria a forma do Universo, conceitos de Física Moderna em expansão no Ensino Médio.

Assim, o autor afirma que o “trabalho pedagógico na sala de aula do Ensino Fundamental ou Médio contempla a possibilidade de desenvolver novas atitudes em relação ao professor e ao aluno no tratamento dos conteúdos escolares”. (p. 80).

Por fim, Franco e Delai (2010), afirmam que é possível fazer um trabalho com as Geometrias não Euclidianas em paralelo com a Geometria de Euclides, fazendo com que os alunos reconheçam as diferenças e semelhanças entre elas. Um bom professor não deve se limitar aos conteúdos que estão nos livros didáticos.

4. OUTRAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Como citado anteriormente, a escolha pelo estudo das Geometrias não Euclidianas parte do documento que orienta a ação pedagógica docente no estado do Paraná, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática, que propõe o estudo deste tema, porém, o que se observa é que este conteúdo não é efetivamente ensinado na escolas.

Este documento orienta o ensino de quatro Geometrias não Euclidianas: Hiperbólica, Elíptica, Projetiva e Fractal. As duas primeiras, estudadas anteriormente, referem-se às Geometrias não Euclidianas "clássicas", assim caracterizadas por Coutinho (2001) por irem de encontro diretamente ao quinto postulado. Porém, de acordo com Paraná (2008), são consideradas Geometrias não Euclidianas as Geometrias que contrariam alguns dos Postulados de Euclides. Como a Geometria Projetiva e a Fractal apresentam esta característica e são propostas por Paraná (2008), passaremos a estudá-las também nesta pesquisa.

4.1. GEOMETRIA PROJETIVA

De acordo com Eves (2004), paralela e independentemente da descoberta das Geometrias não Euclidianas, no século XIX, o campo da Geometria fez grandes avanços. Um destes avanços foi em Geometria Projetiva, que teve ganhos muito produtivos.

Segundo Auffinger e Valentin (2003), a história da Geometria Projetiva iniciou na Itália no século XV, no empenho de criar uma teoria racional para representar de modo correto, a imagem suscitada por nossa visão dos objetos do mundo exterior. Algumas regras práticas já haviam sido descobertas por alguns pintores renascentistas, entre eles Leonardo da Vinci (1452 – 1519) e Albrecht Dürer (1471 – 1528).

Para Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 205) a Geometria Projetiva surgiu

> Quando as tendências libertárias do Renascimento se espalharam pela Europa, levando os cientistas e filósofos a explorar com vigor renovado o mundo que os cercava, os artistas procuraram modos de espelhar essa realidade sobre papel e telas. Seu problema maior era a perspectiva – como representar profundidade sobre uma superfície plana.

Os artistas renascentistas perceberam que o problema era geométrico e então iniciaram alguns estudos sobre propriedades matemáticas das figuras tridimensionais. Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010), o italiano Filippo Brunelleschi que viveu entre os anos de 1377 e 1446, fez os primeiros estudos e logo outros seguiram seus passos.

De acordo com Auffinger e Valentin (2003), para que suas obras estivessem representando melhor a realidade, muitos artistas introduziram os conceitos de ponto de fuga e perspectividade, porém demorou aproximadamente dois séculos para que estas ideias fossem formuladas matematicamente.

Berlinghoff e Gouvêa (2010), afirmam que foi Leone Battista Alberti (1404 – 1472), o artista mais influente no estudo da perspectiva. Sua proposta foi de pintar aquilo que realmente os olhos vêem. Imaginou a superfície de uma pintura como uma janela ou tela que se vê o objeto a ser pintado. Sabendo que as linhas de visão convergem ao ponto que os olhos enxergam a cena, as pinturas do anteparo focalizam uma secção delas.

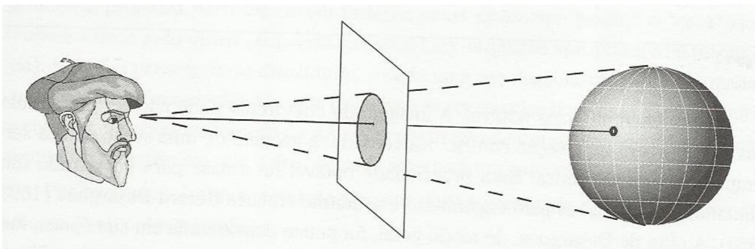

FIGURA 29 – LINHAS DE VISÃO
FONTE: Berlinghoff e Gouvêa (2010)

Alberti trabalhou também com uma questão essencial: se um dado objeto for visto de lugares distintos, logo as duas imagens formadas sobre anteparos serão distintas. Existe então uma relação entre essas imagens e que podem ser descritas matematicamente. Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010), dá-se o nome de projeções às imagens dos objetos no anteparo (conforme ilustra a figura 29). O estudo dessas projeções motivou o início de uma nova área da matemática, a Geometria Projetiva.

De acordo com Franco e Watermann (2009, p. 3), “a Geometria Projetiva fornece a indispensável base teórica para o entendimento da perspectiva utilizada pelos renascentistas”. Porém, o que importa não são as medidas reais e as propriedades métricas, mas as propriedades visuais das imagens por se tratar de regras empíricas, e desta forma, esta nova Geometria não considera as propriedades de Euclides.

Berlinghoff e Gouvêa (2010) exemplificam que se considerarmos o olho como uma fonte de luz que faz a projeção da figura de um plano em sua imagem de outro, assim como o projetor de slides mostra uma figura em um filme como uma imagem na tela e inclinarmos a tela, a imagem ficará distorcida. Pode-se mudar as distâncias e os ângulos, mas algumas propriedades nunca serão alteradas. Como por exemplo, a imagem de um círculo pode não ser um círculo, mas será sempre uma seção cônica. O francês Gerard Desargues (1593 – 1662), que foi engenheiro e arquiteto tomou essa propriedade como base para um estudo sobre as projeções, mas seu trabalho foi pouco considerado na época.

Eves (2004), cita além de Desargues, outros nomes como Gaspard Monge (1746 – 1818) e Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 – 1823) como aqueles que fizeram os primeiros estudos sobre a Geometria Projetiva, porém seu desenvolvimento de fato independente começou no século XIX com Jean Victor Poncelet (1788 – 1867).

FIGURA 30 – PONCELET
FONTE: Eves (2004)

Poncelet (figura 30) resgatou o trabalho de Desargues e publicou sua obra em 1822 intitulado “Tratado das propriedades projetivas das figuras”, escrito enquanto prisioneiro de guerra dos russos, após a derrota de Napoleão em Moscou, sem ter nenhum livro de referência em mãos.

Segundo Eves (2004), esta obra de Poncelet foi um marco da Geometria, impulsionando o estudo da Geometria Projetiva e inaugurando o "grande período" desta.

Muitos matemáticos franceses e alemães, estudando sobre as obras de Desargues e Poncelet, fizeram da Geometria Projetiva uma importante área de estudo, nas palavras de Berlinghoff e Gouvêa (2010). Várias generalizações matemáticas das ideias de perspectiva e projeção levaram a percepções surpreendentes, como o princípio da dualidade, que resulta na colocação em pares dos teoremas da Geometria Projetiva.

Eves (2004), também cita o princípio da dualidade e o princípio da continuidade como os dois instrumentos matemáticos mais importantes no desenvolvimento da Geometria Projetiva usados por Poncelet.

Para Eves (2004), existe uma simetria notável entre pontos e retas quando são utilizados elementos ideais no infinito, de tal forma que se numa proposição que seja verdade sobre pontos e retas as funções desempenhadas por estas palavras forem permutadas, uma outra proposição verdadeira sobre pontos e retas será obtida, e neste caso uma propriedade seria dual da outra.

Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 208), citam como exemplo um sistema de axiomas sendo que cada um dos axiomas é seu próprio dual nesta Geometria:

> 1. Por cada par de pontos distintos há exatamente uma reta e, cada par de retas distintas se intercepta exatamente em um ponto. 2. Existem dois pontos e duas retas tais que cada um dos pontos está sobre apenas uma das retas, e cada uma das retas está sobre apenas um dos pontos. 3. Existem duas retas e dois pontos que não estão sobre essas retas tais que o ponto de interseção de duas retas está sobre a reta pelos dois pontos.

A dualidade se faz presente neste contexto. A verdade da Geometria Euclidiana de que dois pontos determinam uma reta, é verdade também na Geometria Projetiva: "qualquer asserção sobre pontos e retas que seja verdadeira na Geometria Projetiva permanece verdadeira se as palavras ponto e reta forem trocadas uma pela outra" (BERLINGHOFF e GOUVEA, 2010, p. 207), desde que se façam os ajustes na terminologia. Cada afirmação é denominada dual da outra. Isto foi estabelecido em definitivo no início do século XX, por meio da construção de um sistema de axiomas para a Geometria Projetiva, sendo o dual de cada axioma, um axioma.

Berlinghoff e Gouvêa (2010) citam como exemplo de desenho em perspectiva a imagem trilhos (figura 31) de uma estação ferroviária. Os trilhos, apesar de serem paralelos, se encontram em algum ponto do horizonte. Tomando como plano a tela do artista, estas linhas se encontram, confrontando assim com Geometria de Euclides, cujas paralelas nunca se tocam. Os autores explicam:

> O plano da geometria projetiva bidimensional é um plano euclidiano usual a que se acrescenta uma reta – uma reta *ideal* que contém exatamente um ponto de cada "família" de retas paralelas no plano euclidiano. Desse modo, todo par de retas no plano projetivo se cruza exatamente em um ponto (BERLINGHOFF e GOUVEA, 2010, p. 207).

FIGURA 31 – TRILHOS
FONTE: Berlinghoff e Gouvêa (2010)

Os dois primeiros axiomas são mais claros de perceber a sua dualidade, porém o terceiro exige maior atenção. Segundo os autores, é preciso ter em mente que o dual da reta pelos dois pontos é a interseção das duas retas. E permutando ponto e reta no último axioma, a afirmação resultante será a mesma.

Eves (2004), existem diversos modos de se estabelecer o princípio da dualidade, sendo possível arranjar em pares duais um conjunto de axiomas da Geometria Projetiva. O autor afirma que: "o dual de qualquer teorema deduzido de um conjunto de postulados assim organizados pode ser autenticado pela simples dualização dos passos de demonstração do teorema original" (p. 592).

O princípio da dualidade pode ser expresso de forma analítica, quando formulados os conceitos de coordenadas de uma reta e equação de um ponto. Este princípio foi também estabelecido em outras áreas da matemática e, como exemplo, citamos a Geometria Projetiva Sólida, Geometria Esférica, Álgebra Booleana, Teoria das Identidades Trigonométricas e Cálculo Proposicional.

Para o Ensino Médio, busca-se que o aluno consiga desenhar corretamente a aparência de objetos tridimensionais, desta forma alguns conceitos que fazem parte da Geometria Projetiva são importantes: perspectiva, pontos de fuga, ponto de vista, linhas do horizonte e linhas de fuga. Estes conceitos são os primordiais no estudo da Geometria Projetiva deste o Renascimento e são os propostos por Paraná (2008).

Segundo Franco e Watermann (2009), a linha do horizonte “é o elemento da construção em perspectiva que representa o nível dos olhos do observador” (p. 17). Se considerarmos uma paisagem, a linha do horizonte (LH) será a linha que divide o Céu da Terra, risca horizontalmente o nível do mar e está sempre à altura dos olhos, conforme mostra a figura 32 a seguir.

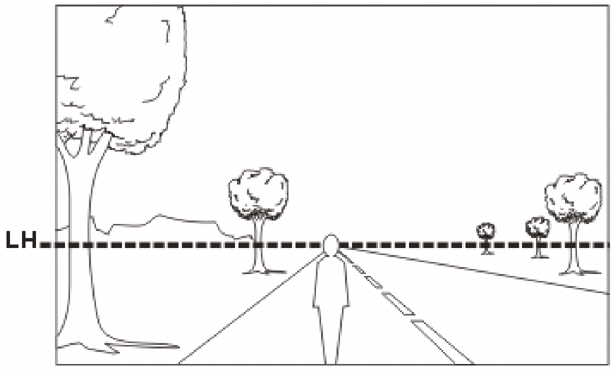

FIGURA 32 - LINHA DO HORIZONTE
FONTE: www.sobrearte.com.br/projetiva/elementos_da_perspectiva.php

Já o ponto de vista, de acordo com Franco e Watermann (2009), pode ser indicado por uma linha vertical na representação gráfica da perspectiva, e é perpendicular à linha do horizonte. Os autores apresentam a figura a seguir para ilustrar:

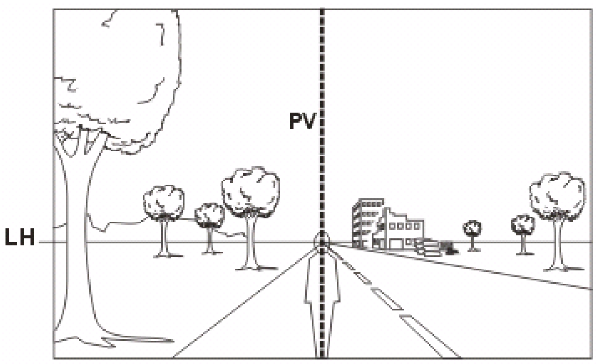

FIGURA 33 - PONTO DE VISTA
FONTE: www.sobrearte.com.br/projetiva/elementos_da_perspectiva.php

O ponto de vista está na interseção da linha do horizonte com esta linha vertical. Este ponto pode variar conforme a posição de quem desenha.

Para Franco e Watermann (2009), o ponto de fuga pertence à linha do horizonte (figura 34) onde todas as linhas convergem ao serem vistas em perspectiva. Pode haver mais de um ponto de fuga no desenho e sempre indicam uma direção.

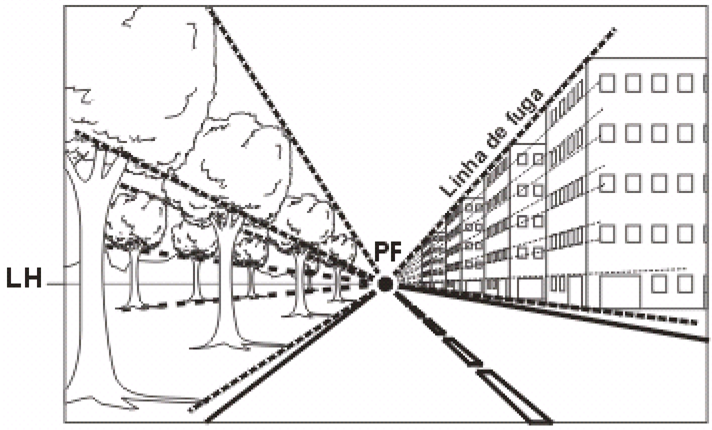

FIGURA 34 - PONTO DE FUGA
FONTE: www.sobrearte.com.br/projetiva/elementos_da_perspectiva.php

Estes conceitos auxiliam na representação gráfica de formas tridimensionais. Os autores apresentam alguns desenhos que alunos fizeram após estudar estes conceitos.

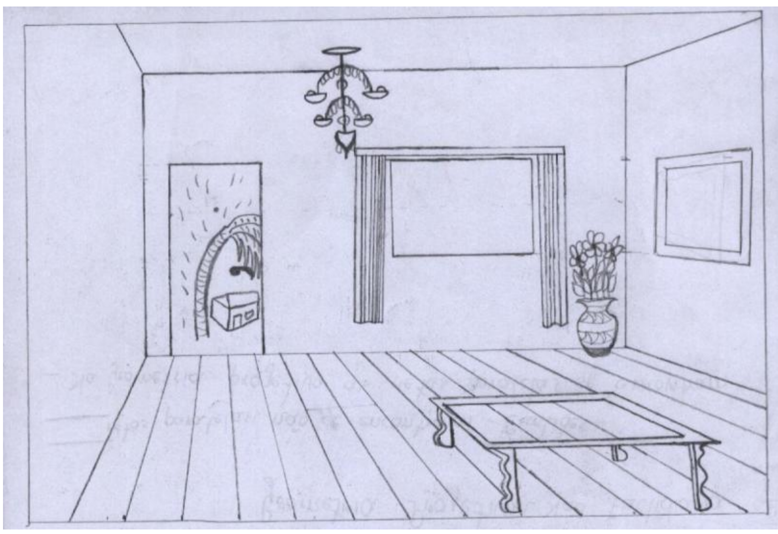

FIGURA 35 - DESENHO EM PERSPECTIVA
FONTE: Franco e Watermann (2009)

É possível também estabelecer uma comparação entre a Geometria Euclidiana e a Projetiva. Poderá auxiliar no entendimento dos conceitos projetivos. A maior diferença está, como em outras Geometrias não Euclidianas e como comentado anteriormente, nas retas paralelas, de acordo com a ilustração a seguir:

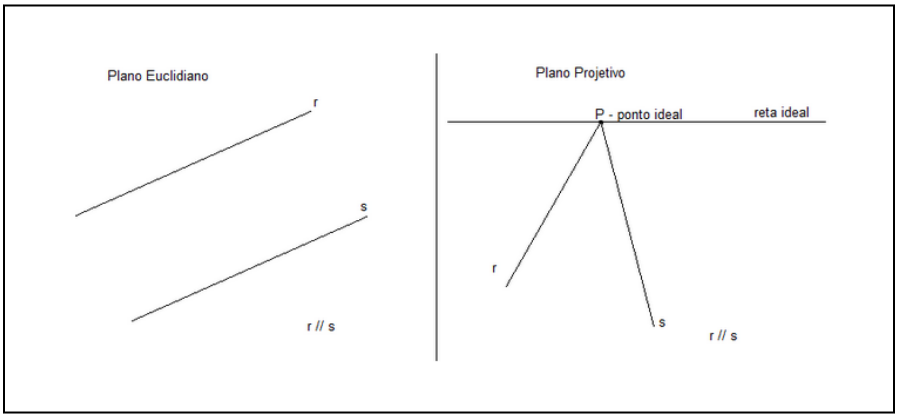

FIGURA 36 - PLANOS EUCLIDIANO E PROJETIVO
FONTE: Auffinger e Valentin (2003)

4.1.1. Geometria Projetiva e a sala de aula

Com as mudanças intensas no ensino da Matemática, professores e alunos estão percebendo a existência de novas Geometrias, além da descrita por Euclides há aproximadamente dois milênios. De acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica, a preocupação está numa Matemática baseada em explorações indutivas e intuitivas, diferente do rigor das demonstrações.

Segundo Franco e Watermann (2009), em relação à Geometria Projetiva, que é o estudo das propriedades descritivas das figuras geométricas:

> A Geometria Projetiva fornece a indispensável base teórica para o entendimento da perspectiva utilizada pelos renascentistas. Para tal teoria as dimensões reais e as propriedades métricas dos objetos em questão têm escasso valor, porque não se transmitem às suas imagens ou projeções, o que é importante conhecer são as propriedades visuais das figuras consideradas. A nova Geometria, visando criar tais regras empíricas, negligenciou, então, as velhas propriedades dos “Elementos” de Euclides e concentrou o interesse sobre as propriedades visuais da figura (FRANCO e WATERMANN, 2009, p. 3).

É importante levar os alunos a compreenderem que uma das diferenças entre a Geometria Projetiva e a de Euclides é que em relação à interseção de retas, na euclidiana pode não haver a interseção, enquanto que na projetiva, isso nunca ocorre. Nas palavras de Auffinger e Valentin (2003), “enquanto a geometria euclidiana se preocupa com o mundo em que vivemos, a Geometria Projetiva lida com o mundo que vemos”(p. 2), pois a Geometria Projetiva é a Geometria da visão.

De acordo com Kodama (2006), o desenho desempenha uma função muito importante por relacionar o espaço com a teoria. Porém existe um problema que precisa ser superado: a representação gráfica dos objetos do espaço: quando os alunos tentam representar objetos tridimensionais num espaço bidimensional, como a folha de papel, há perda de informações que podem ser dribladas com a aprendizagem de regras de representação. Assim conclui-se que o ensino da Geometria Projetiva na Educação Básica é necessária.

Kodama (2006), ainda complementa que professores e alunos estão acostumados com representações estereotipadas de objetos tridimensionais nos livros didáticos e fazem a repetição destes estereótipos.

> Quando os alunos não percebem que o objeto representado no plano é um objeto tridimensional significa que eles não relacionam as propriedades que poderiam estar no desenho com as que estão no objeto e vice-versa. Os alunos apenas repetem os desenhos que os professores colocam na lousa e não conseguem imaginar uma situação espacial a partir do desenho. (KODAMA, 2006, p. 5).

Desta forma é preciso que se desenvolva nos alunos a capacidade de representar objetos tridimensionais no plano para melhor compreender as propriedades e conceitos envolvidos.

> No processo ensino-aprendizagem o aluno deve realizar experiências com materiais concretos, usando a intuição que desperta curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, vivenciando de forma dinâmica os conteúdos, descobrindo conceitos e interiorizando-os, que servirão como auxiliares no desenvolvimento de seu raciocínio lógico, a estruturação do pensamento e a melhoria na qualidade de ensino. (FRANCO e WATERMANN, 2009, p. 4).

Esta manipulação é importante também para que o aluno possa conhecer os objetos tridimensionais e suas características para uma melhor representação destes objetos.

Franco e Watermann (2009), apresentam como sugestão de professores que a Geometria Projetiva pudesse ser inicializada junto com as noções de

Geometria Euclidiana logo que o aluno começa a estudar ponto e reta, tornando-se mais acessível para os alunos já poderia fazer a apresentação da Geometria que é de Euclides e a não Euclidiana. O que vai ao encontro da proposta desta pesquisa, pois não é necessário dedicar um bimestre para este tema, mas que seja estudado com outros conteúdos matemáticos, propiciando suas relações.

4.2. GEOMETRIA FRACTAL

De acordo com Camargo (2008), houve um distanciamento da Matemática Clássica do século XIX e da Matemática Moderna do século XX depois dos estudos da Teoria dos Conjuntos de Cantor e as Curvas de Peano. Esta curva assustou matemáticos da época, ocasionando uma crise no que se trata do conceito de curva. Estes estudos propiciaram um grande impulso na descoberta de estruturas matemáticas que não se ajustavam a Euclides e foram olhadas como um conjunto de anomalias que os matemáticos da época ainda não conseguiam explicar.

Esta nova Geometria é a Geometria da natureza. A preocupação inicial foi de mostrar que a Matemática Pura abrangia uma vasta riqueza de possibilidades quando aplicadas às estruturas presentes na Natureza, pois muitos fenômenos e formas que aparecem na Natureza não podem ser explicados pela Matemática Tradicional, precisando de uma Matemática capaz de descrever estes fenômenos e caracterizá-los.

Franco (2008) relata que esta nova Geometria mostra um universo que não é regular, redondo e suave. É a Geometria das formas irregulares, do retorcido, quebrado e entretecido. Porém muitos fenômenos físicos e biológicos revelam uma regularidade que anteriormente eram descritos como aleatórios ou caóticos. E estão muito presentes em nosso cotidiano, como por exemplo, no formato das nuvens, montanhas, litorais, relâmpagos, ramificações e tronco das árvores, samambaias, couve – flor, tornando a Geometria Euclidiana inadequada para explicar. As imagens a seguir mostram alguns exemplos associados à Geometria Fractal:

FIGURA 37 - NUVENS E MONTANHAS
FONTE: Dia a Dia Educação

FIGURA 38 - RELÂMPAGOS
FONTE: Dia a Dia Educação

FIGURA 39 - RAMIFICAÇÕES E TRONCOS DE ÁRVORE
FONTE: Dia a Dia Educação

FIGURA 40 - SAMAMBAIA
FONTE: Dia a Dia Educação

FIGURA 41 - COUVE - FLOR
FONTE: Dia a Dia Educação

Crescimento populacional, turbulências nos fluídos, nos estudos de probabilidades, (pois tanto suas regularidades como suas irregularidades podem ser previstas estatisticamente), na Medicina, através de vasos sanguíneos, ilustrados na figura 42, batimentos cardíacos e doenças como o câncer, são outros exemplos que podemos citar da Geometria dos Fractais.

FIGURA 42 - VASOS SANGUÍNEOS
FONTE: Dia a Dia Educação

Começou a surgir uma nova ciência que tentava explicar estes fenômenos, denominada “Geometria Fractal”. Segundo Hemenway (2010) a palavra fractal foi criada em 1975 por Benoit Mandelbrot (figura 43) matemático polonês que ficou conhecido como o “Pai dos fractais”, baseando-se no latim do adjetivo *fractus,* cujo verbo *frangere* correspondente significa quebrar. Mandelbrot foi o primeiro que fez cálculos repetitivos em computadores que deram origem às famosas imagens dos fractais.

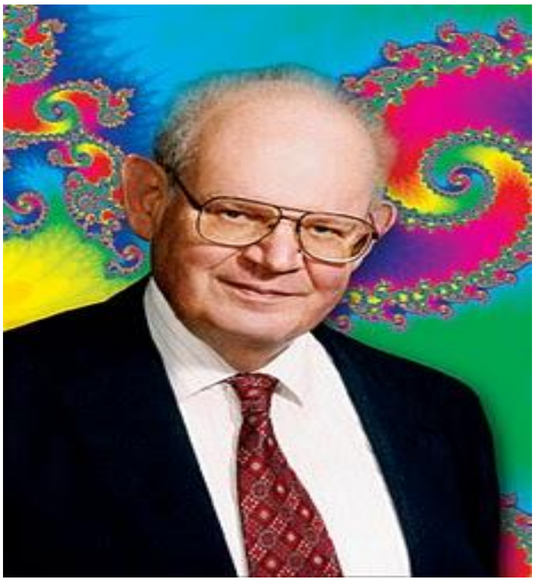

FIGURA 43 - MANDELBROT
FONTE: http://hyperbolic-crochet.blogspot.com/2010/10/benoit-mandelbrot-1924-2010-has-joined.html)

Na escola, Mandelbrot não tinha o domínio da tabuada e não aprendeu corretamente o alfabeto, mas tinha uma incrível mente visual. Após ter concluído o seu doutorado em matemática, atuou no campo da investigação.

Mas a história inicia antes disso. Segundo Franco (2008), os fractais surgiram entre 1857 e 1913 com o trabalho de alguns cientistas que deu a conhecer alguns objetos que foram catalogados como “monstros” e se supunha que não tivesse valor científico.

Franco (2008), cita que em 1872, Karl Weierstrass descobriu uma função que não era diferenciável, embora contínua em todo seu domínio. Seu gráfico recebeu o nome de fractal. Helge Von Koch, no ano de 1904 deu uma definição mais geométrica deste tipo de função, que ficou conhecida como Floco de Neve de Koch, cuja característica principal deste tipo de fractal é ter uma área finita dentro de um perímetro que é infinito.

Para Sallum (2005, p. 1):

> Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas da sua construção podem dar uma ideia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro.

De acordo com Barbosa (2002) a Geometria Fractal pode ser utilizada para descrever diversos fenômenos na natureza, onde as geometrias tradicionais não são adequadas e está intimamente ligada à Teoria do Caos. Mandelbrot constatou que os exemplos citados anteriormente podem ser estudados e descritos utilizando as propriedades dos fractais que apresentam características comuns e estas estruturas podem ser identificadas com objetos naturais que estão ao nosso redor. O desenvolvimento desta geometria e a Teoria do Caos se deu a partir dos anos 60 com o avanço da tecnologia, pois o auxílio do computador foi muito importante.

Gouvea (2005) vai ao encontro de Barbosa (2002), afirmando que Mandelbrot passou a estudar e desenvolver os Fractais, pois estava insatisfeito com a Geometria Clássica, incapaz de explicar todas as formas, principalmente as da natureza.

De acordo com Murr (2007), a Geometria Fractal teve como impulso sua beleza e seu apelo estético. Seu estudo evoluiu ainda mais quando se percebeu a relação com outras áreas como a Física, Biologia, Geologia, Computação Gráfica e também na Música.

Barbosa (2002, p. 10) exemplifica:

> Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para estas formas.

Muitos profissionais de várias áreas se depararam com questões originárias da própria natureza e buscaram tratar destas questões de modo mais adequado pela sua complexidade. Os fractais revolucionaram a construção e a reprodução de imagens, permitindo também reformular antigos problemas.

Desta forma, Camargo (2008) cita as principais aplicações dos fractais nas diferentes áreas mencionadas acima. Vamos citar apenas alguns exemplos:

- Na Biologia, a partir da análise da rugosidade de fungos e corais e no estudo da influência da superfície irregular das proteínas nas iterações moleculares;
- Na Medicina, com o estudo de patologias do coração, como a Taquicardia e a Fibrilação, cuja característica é a falta de regularidade no coração. A identificação de tumores de Câncer, como o diagnóstico do Cancro, que tem dimensão fractal superior à dos demais tecidos e o estudo do crescimento de tumores cerebrais;
- Na Física, sobre a criação de antenas fractais que tem melhor freqüência que outras e no crescimento de estruturas de cristais, que possuem ramificações auto similares;
- Na Economia, com a descrição realística de bolhas e crashs e na bolsa de valores;
- Na indústria, com a detecção automática de falhas têxteis;
- Na Computação Gráfica, a partir de técnicas de compreensão de imagens e sua criação virtualmente, representação de elementos da natureza como crateras, planetas, costas, plantas, nuvens. Também usados na criação de efeitos especiais de filmes, na decodificação de áudio e vídeo e na criptografia;
- Na Arquitetura e Urbanismo, com a comprovação de que as cidades apresentam características que são compreendidas por meio da geometria fractal. No estudo de padrões urbanos e na análise de fenômenos particulares como a formação de favelas e condomínios fechados;
- Na Astrofísica e Astronomia, fazendo previsões de trajetórias dos planetas e a distribuição das galáxias no Universo;
- Na Mineralogia, medindo a densidade dos minerais, na evolução dos terrenos e descontinuidade de rochas;

- Na Geografia, medindo comprimentos das costas dos continentes, na topografia, na descrição de falhas sísmicas, no estudo de terremotos, na dinâmica dos vulcões, na criação de modelos de crescimento demográficos e a rocha na qual reside o petróleo tem estrutura rugosa com propriedades fractais;
- E para citar um último exemplo temos a Música: músicas fractais são compostas atribuindo notas e ritmos às cores de figuras fractais, possuindo harmonia (ordem) e variedade (caos) e também no estudo de vibrações de um tambor com bordas fractais (acústica).

Sobre a aplicação dos fractais:

> Os fractais apareceram recentemente como uma das mais fascinantes descobertas da Matemática. A sofisticação e o exotismo de suas formas, bem como a ampla divulgação que lhes foi concedida pela mídia, despertaram a atenção do grande público e o interesse de grupos de pesquisadores, reduzidos no início, mas que se avolumaram à medida que os fractais começaram a invadir as áreas de outras ciências, como a física, a geologia, a computação gráfica, e encontrando inúmeras aplicações práticas, como a compreensão de arquivos de imagens, intensamente utilizada em multimídia, ingressando ainda no domínio das artes plásticas e adquirindo, dessa maneira, um caráter interdisciplinar (SERRA E KARAS, 1997, p. 1).

Segundo Arsie (2007), fractal é uma figura com propriedades e características peculiares que os diferenciam das figuras geométricas habituais, são elas: auto-similaridade, complexidade infinita, simplicidade na lei de formação e a sua dimensão espacial é estritamente maior que sua dimensão topológica. O processo de construção é freqüentemente iterativo (isto é, repetitivo) e sua construção se baseia em algoritmos simples. A estrutura dessa Geometria fornece certa ordem ao Caos, que busca padrões dentro de um sistema considerado aleatório.

Diferentes definições de fractais têm surgido:

> Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma idéia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro (SALLUM, 2005, p.1).

Sendo assim, os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita. Todas estas formas e padrões possuem algumas características comuns e há uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e os encontrados na natureza.

Sobre o termo fractal adotado por Mandelbrot,

> O termo fractal é usado para descrever um grupo particular de formas irregulares que não estão em conformidade com a geometria euclidiana, e o seu atributo mais famoso é a auto – semelhança, que significa que eles parecem ter cópias de si próprios escondidas no interior do original (HEMENWAY, 2010, p. 125).

Sobre estas particularidades dos fractais foram estudadas as suas características. Vejamos o que significam estas características, de acordo com Serra (1997):

- Uma figura possui auto-similaridade, também chamada de homotetia interna por Mandelbrot, se apresenta sempre o mesmo aspecto a qualquer escala em que seja observado. Um fractal apresenta cópias aproximadas de si mesmo em seu interior. Quando estas cópias são sempre idênticas, obtidas pelo mesmo fator de redução, diz –se que a figura possui auto-similaridade estrita. Se tomarmos uma porção do fractal esta, irá se assemelhar a uma porção maior, ou ao fractal inteiro. Alguns fractais apresentam a auto-similaridade estrita, ou seja, uma porção do fractal reproduz exatamente a forma de uma porção maior. Esta característica está ilustrada a seguir:

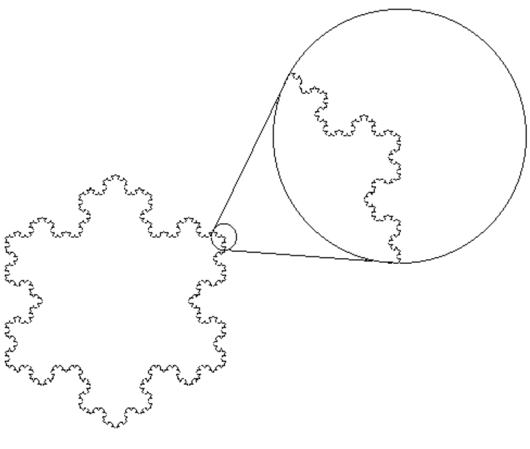

FIGURA 44 - AUTO – SIMILARIDADE
FONTE: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/koch.htm

- Possuir complexidade infinita significa que nunca conseguiremos representar um fractal completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita. Desta forma, a ciência dos fractais apresenta estruturas geométricas muito complexas e de muita beleza, que estão ligadas às formas da natureza. São imagens de figuras abstratas que possuem o caráter de presença em toda parte por terem as características do todo infinitamente multiplicadas dentro de cada parte, fugindo assim, da nossa compreensão. Sucessivas ampliações de fractais levam a mais detalhes indefinidamente. O grau de detalhamento de um fractal não diminui se examinarmos uma porção arbitrariamente pequena do mesmo. Podemos perceber esta característica por meio da figura 45:

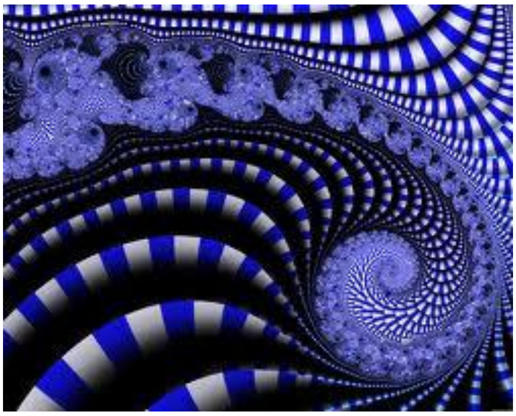

FIGURA 45 - COMPLEXIDADE INFINITA
FONTE: Dia a Dia Educação

- A complexidade de sua estrutura e de seus detalhes não impede que sejam formados por processos simples e diretos. Um fractal é gerado a partir de uma fórmula matemática, muitas vezes simples, mas que aplicada de forma iterativa produz resultados complexos e fascinantes. Seu processo de construção é repetitivo e a simplicidade dos algoritmos para sua formação faz com que sejam explorados com maior riqueza com o uso de computadores. Embora sua lei de formação seja simples, não podemos descrevê-los como lugares geométricos de pontos que possuem propriedades simples, o que ocorre com figuras geométricas simples.
- Para Arsie (2007) das características que expressam um fractal, a mais importante é sobre sua dimensão. As figuras geométricas tradicionais têm dimensão bem determinada. Pela definição de Euclides, um ponto tem

dimensão 0 ou adimensional; linhas, dimensão 1 ou unidimensional; superfícies, 2 ou bidimensional e sólidos, dimensão 3 ou tridimensional. Uma característica importante dessas dimensões é que elas não dependem do tamanho da figura. Por exemplo, uma linha tem dimensão unidimensional seja ela uma curva ou uma reta. A dimensão de uma figura assim caracterizada é chamada dimensão topológica.

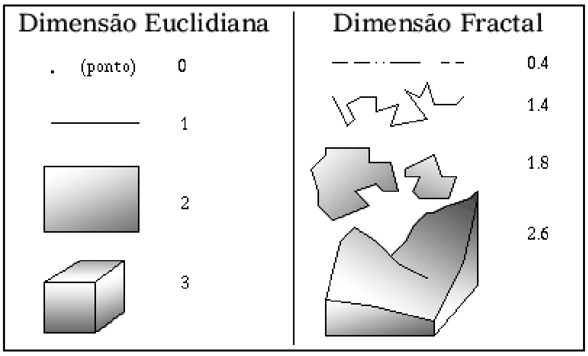

FIGURA 46 - DIMENSÕES EUCLIDIANA E FRACTAL
FONTE: http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php

Conforme Arsie (2007), a dimensão fractal, denominada por Mandelbrot, refere-se à dimensão espacial, isto é, está relacionada com o nível de ocupação do espaço pela forma e não o espaço em si onde a figura é inserida (figura 46). Quanto maior a irregularidade, maior a Dimensão Fractal. Essa distinção na definição de dimensão de figuras faz com que a Dimensão fractal assuma valores fracionários, que não é encontrado na Geometria de Euclides. Calculando sua dimensão, podemos ter uma idéia da complexidade destas figuras e fazer estudo de diversas situações como o de sistemas caóticos (como exemplo, padrão de formação de nuvens), caracterização de figuras, análise e reconhecimento de padrões em imagens.

Devido as suas diversas aplicações, existem vários métodos para calcular a dimensão fractal. Os métodos que envolvem o conceito de dimensão espacial referem-se ao espaço preenchido pela figura, diferentemente da dimensão topológica. No cálculo da dimensão fractal, alguns objetos apresentam como resultado um número fracionário. Nem sempre a dimensão espacial de um fractal é um número fracionário, mas é uma característica que apenas os fractais possuem. Segundo Serra e Karas (1997), se a dimensão é fracionária, certamente a figura é um fractal, porém a recíproca não é sempre verdadeira, e cada figura tem sua dimensão própria. Mais adiante, veremos um exemplo em que um fractal apresenta dimensão inteira.

A seguir vamos apresentar um dos métodos descritos em Arsie (2007), para se calcular a dimensão destas figuras: Dimensão de Homotetia ou de Auto – similaridade estrita.

Tomemos um segmento de reta. Este pode ser dividido em n partes e cada segmento será semelhante ao todo, mas reduzidos numa razão r. Teremos em cada um dos segmentos exatamente 1/r do tamanho do segmento original, e sendo cada um multiplicado por r produzirá exatamente o segmento todo. Ou seja: $n = 1/r^1$.

Se tivermos um quadrado e o dividirmos em n partes, estas serão $1/r^2$ do tamanho original e teremos r^2 partes semelhantes. Assim: $n = 1/r^2$.

Da mesma forma, um cubo pode ser dividido em n partes, e cada uma será $1/r^3$ do volume original. E teremos $n = 1/r^3$.

Podemos perceber que o expoente indica a dimensão relacionada em cada caso. Sabendo que a dimensão espacial coincide com a dimensão topológica das figuras tradicionais e que a reta tem dimensão 1, o quadrado dimensão 2, e o cubo dimensão 3, podemos afirmar que: $n = 1/r^D$, onde D é a dimensão espacial da figura, r a razão de semelhança e n o número de divisões da figura.

Da expressão: $n = 1/r^D$, vamos aplicar função log em ambos os membros da igualdade obtendo:

$\log n = \log (1/r^D)$ e usando propriedades do logaritmo:

$\log n = \log 1 - \log r^D$, $\log 1 = 0$ e novamente usando propriedades do logaritmo:

$\log n = - D.\log r$

Finalmente obtemos a relação: **$D = - \log n / \log r$**

Como o conceito de dimensão espacial é uma extensão ao conceito de dimensão topológica, se a figura possui auto-similaridade, sua dimensão é determinada pela relação acima.

A seguir vamos apresentar alguns exemplos sobre o cálculo da dimensão fractal. Para comparação iniciamos por um quadrado e em seguida, alguns fractais geométricos:

a. Quadrado

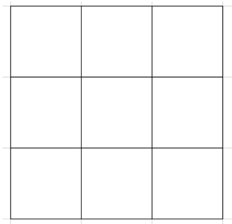

FIGURA 47 - QUADRADO DIVIDIDO EM NOVE PARTES
FONTE: A autora (2011)

$n = 9$ e $r = ⅓$

$D = - \log 9 / \log ⅓$

$D = 2$

Vemos neste exemplo que a dimensão espacial coincide com a dimensão topológica.

b. Conjunto de Cantor

Barbosa (2002) afirma que George Cantor (1845 – 1918) foi um matemático nascido na Rússia e que adotou nacionalidade alemã e dedicou-se especialmente à fundamentação da matemática, principalmente sobre a Teoria dos Conjuntos. Em 1883 publicou um trabalho que atualmente é conhecido por Conjunto de Cantor, ou Poeira de Cantor. Tal conjunto e o calculo de sua dimensão está descrito a seguir.

Sua lei de formação é muito simples: Tomamos o intervalo [0,1], dividimos esse intervalo em três partes iguais. Em seguida removemos a parte central, ou seja, o intervalo (⅓,⅔), restando [0, ⅓]U[⅔]. Repetimos o processo a cada um dos segmentos, removendo-lhes o terço médio, e assim sucessivamente. O processo é repetido fazendo-se o número de etapas n tende ao infinito. O conjunto dos pontos que não foram retirados é o conjunto de Cantor:

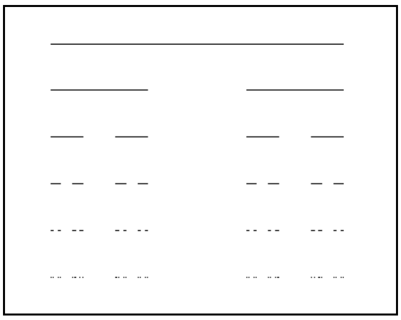

FIGURA 48 - CONJUNTO DE CANTOR
FONTE: Murr (2007)

n = 2

r = ⅓

D = - log 2 / log ⅓

D ≈ 0, 63

Observamos que a dimensão do Conjunto de Cantor é uma dimensão fracionária e é maior que sua dimensão topológica, a qual é 0. Este conjunto é mais que um ponto, porém menos que uma reta, logo sua dimensão é maior que 0 e menor que 1.

c. Curva de Peano

Giusepe Peano (1858 – 1932), segundo Barbosa (2002) foi um matemático italiano que publicou em 1890 sua famosa curva, denominada Curva de Peano, como resultado do aprofundamento das noções de continuidade e dimensão.

Vamos calcular agora a dimensão fractal da Curva de Peano.

Dado um segmento, divide-se em 3 partes. Sobre o terço médio constrói-se um retângulo bissectado pelo traço, de modo a formar dois quadrados com o traço que lhes deu origem. Repetindo sucessivamente este processo em cada um dos nove segmentos resultantes, vamos obter a Curva de Peano.

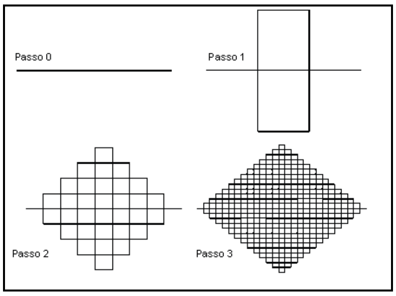

FIGURA 49 - CURVA DE PEANO
FONTE: Murr (2007)

n = 9

r = ⅓

D = - log 9/ log ⅓

D = 2

Neste exemplo vemos que a dimensão deste fractal é um número inteiro. Ao contrário do que muitos acreditam, nem sempre um fractal possui dimensão fracionária, que é maior que sua dimensão topológica, a qual é 1.

d. Curva de Koch

Segundo Barbosa (2002) pouco se conhece a respeito de Helge Von Koch, que foi um matemático polonês. Porém sabe-se que entre 1904 e 1906 publicou um trabalho sobre uma curva que leva o seu nome: a Curva de Koch.

Vejamos como é construída e o cálculo de sua dimensão:

Considera-se inicialmente um segmento de reta. Em seguida, divide-o em três partes iguais e sobre o terço central constrói-se um triângulo equilátero sem considerar a sua base. E assim sucessivamente.

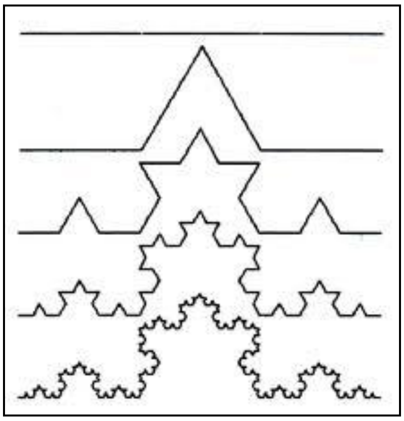

FIGURA 50 - CURVA DE KOCH
Fonte: Murr (2007)

$n = 4$

$r = \frac{1}{3}$

$D = -\log 4 / \log \frac{1}{3}$

$D \approx 1{,}262$

4.2.1. A Geometria Fractal e seu ensino

Sobre a inserção da Geometria dos Fractais no Ensino Médio, Sallum (2005,p.1) afirma que:

> A introdução de fractais no ensino médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma idéia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas.

A utilização dos Fractais no processo de ensino de Geometria pode auxiliar na compreensão de conteúdos que ficaram defasados; possibilita a criação de novas situações de aprendizagem, pois os alunos poderão aplicar o conhecimento adquirido em sua vida escolar, descartando cada vez mais a cópia e promovendo a produção, via experimentação, de conhecimento, favorecendo o “aprender a aprender”; possibilita sanar as deficiências da Geometria Euclidiana, que consegue explicar formas construídas pelo homem, mas não as formas da Natureza.

Em relação a isto, Gouvea (2005) afirma que:

> A alternativa de utilizar os Fractais no processo do ensino de Geometria pode alavancar o estudo de conteúdos que não foram apreendidos. Os Fractais são formas geométricas de extrema beleza, que possibilitam a criação de situações de aprendizagem que propiciam atividades, nas quais os alunos aplicam processos fundamentais para o desenvolvimento do conhecimento.

A apresentação de novas formas de abordar conteúdos torna as aulas de Matemática mais motivadoras e produtivas. Nesse sentido, devemos favorecer para que os alunos saiam da escola, não sabendo apenas calcular e escrever, mas também sabendo questionar, reconhecer, relacionar, criar, e principalmente, ver o mundo sob diversos pontos de vista.

Em relação aos Fractais nas aulas de Matemática**,** Barbosa (2002) acredita que o ensino da Geometria Fractal se faz importante pelas seguintes razões:

a. É possível fazer conexões com várias áreas do conhecimento;

b. A Geometria Euclidiana não dá conta das formas da natureza, que necessitam de uma outra Geometria capaz de modelar estas formas e assim possibilita o desenvolvimento de muitos projetos e atividades relacionadas com outras disciplinas, ajudando na compreensão de fenômenos que ocorrem em diferentes ambientes;

c. A tecnologia está presente em praticamente todas as escolas. Muitos fractais podem ser estudados em ambientes computacionais, promovendo sua difusão e acesso.

d. Promove a curiosidade e a sensação de surpresa diante da “desordem ordenada”.

e. O apelo estético dos fractais desperta o interesse por seu estudo. Permite as relações diretas com a arte, entendendo que esta envolve ao mesmo tempo emoção, habilidade e criatividade.

Ainda para Barbosa (2002, p.13) a própria Matemática:

> (...) fornece ao matemático, ao professor, e é bom que ofereça ao educando, prazeres oriundos de várias formas de pensar e ver, ou de suas próprias ações. Muitas vezes eles emergem de superação de dificuldades; assim é, por exemplo, o estado prazeroso emergente da simples busca com sucesso das raízes na resolução de uma equação ou de uma situação-problema numérica ou geométrica cuja solução leva a encontrar apenas alguns números ou determinados pontos de um plano.

De acordo com estes princípios, a Geometria Fractal possui um amplo campo de aplicação dos conceitos matemáticos em suas diversas áreas, tais como Álgebra, Aritmética, Geometria Plana e Espacial e Progressões.

Segundo Nunes (2010, p. 74):

> A exploração da geometria fractal, em contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar; impulsiona a utilização da matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos; ajuda na compreensão dos conceitos de perímetro, área e volume; promove a pesquisa de padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos.

Assim, esta área da Geometria torna-se uma metodologia de ensino, pois possibilita a abordagem e aplicação de vários conceitos, diversificando assim a prática do professor na sala de aula. Propor uma aula com situações novas, onde o aluno possa descobrir e fazer relações entre o que visualiza e o que estuda.

> (...) para os fractais, em especial para a geometria fractal, faz-se necessário ao educador conseguir captar o educando com o transparecer de sua própria vibração, e talvez evidenciando o êxtase na complementação na beleza de seus visuais, conduzindo-o ao prazer pelas informações e conhecimentos culturais da vasta variedade de fractais. (BARBOSA, p. 14, 2002).

Além do campo extenso de aplicações dos fractais é necessário que o professor perceba a potencialidade que existe nesta área da Geometria, podendo assim trabalhar conceitos de simetria, relacionando obras de Arte com Matemática.

5. A EXPRESSÃO GRÁFICA NO ENSINO

Esta pesquisa busca relacionar o ensino das Geometrias não Euclidianas com a Expressão Gráfica, possibilitando uma reflexão sobre seu ensino nas escolas públicas do Estado do Paraná, tendo como ferramenta elementos gráficos que motivem o seu aprendizado e a visualização dos seus conceitos, explorando as informações que são transmitidas por meio das imagens.

Lévy (1997), já questionava o uso das imagens (representações gráficas) para comunicar uma ideia, um conceito ou um pensamento, por exemplo, no sentido de colocá-las em sintonia com o texto impresso clássico, pois vivemos uma era visual e desta forma, a transformação da imagem em uma tecnologia intelectual, capaz de transmitir conhecimento, deveria ser automática.

O autor ainda alerta que:

> Não se trata de recorrer à imagem para ilustrar ou enfeitar o texto clássico, mas sim de inaugurar uma escrita completamente nova: um instrumento de conhecimento e de pensamento que seja, também, intrinsecamente, imagem animada (LÉVY, 1997, p. 14).

Segundo Lévy (1997), o objetivo não é abandonar a escrita para enfatizar a ascensão audiovisual, mas torná-la uma aliada, diversificando a sua linguagem, multiplicando o seu poder de comunicação, contribuindo para a invenção de uma cultura mais crítica e imaginativa.

Peralez (2006), cita diferentes formas para representar o conhecimento, dentre elas, cita, por exemplo, a verbal, a escrita, a matemática, a pedagógica e a gráfica. Exceto a representação verbal, as demais fazem uso de algum tipo de representação gráfica (imagem) para transmitir o conhecimento.

Quanto à imagem “enfeitar” o texto, Sandroni e Machado (1987, p. 38) afirma que, “entende-se ilustração como a representação gráfica de uma ideia. É comum pensar-se que a imagem está apenas ligada ao texto. Ela pode ser um elemento decorativo no livro, pode ser fiel ao texto, mas pode ir além do texto”.

Lévy (1997), lembra a era pré-histórica, na qual os homens se comunicavam por meio de pequenos entalhes em ossos, desenhos nas paredes das cavernas e grutas, tatuagens e ritmos coloridos e essas representações ficavam mais complexas ao longo dos tempos. Antigamente a imagem se destacava na comunicação e nos dias de hoje privilegiou-se a escrita, mas esta distinção, na escala histórica, aparece muito recentemente.

5.1. IMAGINAÇÃO E AQUISIÇÃO DE CONHECIMENTO

Lévy (1983), citado por Machado (2000), considera que a capacidade cognitiva humana compreende três faculdades: a de perceber, imaginar e manipular. Estas faculdades permitem dar conta de todo o conhecimento humano. Caracterizamos a percepção por sua rapidez na interpretação daquilo que chega aos nossos sentidos. É a nossa habilidade de cognição elementar. Em relação à imaginação, que é articulada de imediato com a percepção:

> A faculdade de imaginar, ou fazer simulações mentais do mundo exterior, é um tipo particular de percepção, desencadeada por estímulos internos. Ela nos permite antecipar as consequências dos nossos atos. A imaginação é a condição da escolha ou da decisão deliberada: o que aconteceria se fizéssemos isto ou aquilo? Graças a esta faculdade, nós tiramos partido de nossas experiências anteriores. A capacidade de simular o ambiente e suas reações tem, certamente, um papel fundamental para todos os organismos capazes de aprendizagem (p. 58).

A imaginação está relacionada com a capacidade de extrapolar, de transcender aquilo que é sensível, de fazer projeções de um objeto material, ou uma ferramenta que se possa construir, ou ainda um instrumento conceitual para se ter sua compreensão. Segundo Fogaça (2006), compreender é situar algo dentro da habilidade de percepção. Está relacionado à construção de uma realidade física e aquilo que é compreendido fica distinto daquilo que ainda não é. A percepção também implica uma ação física e mental sobre o objeto ou fenômeno a ser compreendido. Se o conseguimos representar, o guardamos na memória. A percepção e a imaginação não podem ser dissociadas.

Lévy (1997, p. 96), afirma que cada pessoa "constrói representações internas de certos domínios de ação e de conhecimento de uma forma esquemática ou figurada. Utilizamos estas representações para evocar recordações, raciocinar ou tomar decisões".

Para Moreira (1996), as representações mentais, que ele chama também de *internas,* são modos de "re-presentar" internamente o mundo externo. As pessoas fazem a construção de representações mentais, ou seja, internas deste mundo, pois não o captam diretamente.

Neste sentido, Bronowski (1998), complementa afirmando que a imaginação é uma qualidade comum dentro da ciência e da arte, nos atingindo de formas diferentes. O homem tem o dom de recriar o mundo através da imaginação. A palavra torna-se veículo desta imaginação, e é usada também para transmitir, elaborar e manipular suas ideias, bem como para reflexão pessoal e tomada de decisões. A imaginação, nas palavras do autor, é “o hábito humano de produzir imagens mentais” (p. 26).

Para Lévy (1997), a compreensão de uma proposição ou de uma ideia se trata também de fazer correspondências a modelos mentais. O melhor modo de compreender, por exemplo, a frase: “o gato come o rato”, é fazer a representação da cena ou o conjunto de cenas que ela evoca e que se dá por modelos mentais. Desta forma, a comunicação é o desencadeamento da simulação de um modelo mental para quem está tentando compreender a frase, pois:

> As línguas têm necessidade duma sintaxe porque só trabalham a partir de elementos simbólicos. Vindo suprir um déficit simbólico, a gramática acrescenta-lhes a dimensão da imagem, permite que as palavras representem cenas (LEVY, 1997, p. 65).

Como temos a possibilidade de criar modelos mentais, podemos nos lembrar de coisas que não estão mais presentes, projetá-las em alguma situação e as imagens criadas em nosso pensamento nos afetam de maneira particular. Precisamos reimaginar por nós mesmos, recriar outra vez para nós e assim compreender algo. Estas imagens que criamos estimulam a nossa imaginação.

Até aqui falamos em imagens e modelos mentais. Antes de prosseguir, convém destacar uma diferença entre eles: “as imagens mentais são correlatos perceptuais dos modelos. Pode haver várias imagens mentais do mesmo modelo” (LÉVY, 1997, p. 99).

Moreira (1996, p.3), em relação a isso, afirma que:

> *Imagens* são representações bastante específicas que retêm muitos dos aspectos perceptivos de determinados objetos ou eventos, vistos de um ângulo particular, com detalhes de uma certa instância do objeto ou evento. *Modelos mentais* são representações analógicas, um tanto quanto abstraídas, de conceitos, objetos ou eventos que são espacial e temporalmente análogos a impressões sensoriais, mas que podem ser

> vistos de qualquer ângulo (e aí temos imagens!) e que, em geral, não retêm aspectos distintivos de uma dada instância de um objeto ou evento.

Uma imagem é uma visão do modelo. E a imagem mental não pode estar limitada a uma simples percepção, e também não pode se considerada como uma ilustração ou suporte para o pensamento, mas ela própria é o pensamento e assim, compreende um saber ou uma intenção. Segundo o autor, um modelo está ligado a um conjunto de objetos, com todas as suas propriedades e as leis que regem as suas interações. O modelo significa um nível mais elementar que a imagem. Quando ultrapassamos um grau de complexidade, o modelo pode ser expresso por várias imagens ou seqüências delas.

Moreira (1996, p. 3), complementa que: "Um modelo mental é uma representação interna de informações que corresponde analogamente com aquilo que está sendo representado". E não existe um único modelo mental para representar algum fato ou conceito.

Para Moreira (1996), o modelo mental de determinado conceito deve conseguir representar o essencial, como também a amplitude deste conceito, isto é, o essencial é representado pelas propriedades características do estado de coisas que ele descreve e a amplitude desse conceito é representada pelo conjunto de estados de coisas possíveis que o conceito descreve. O autor exemplifica:

> O modelo mental de avião, por exemplo, possuiria distintas versões conforme os diferentes usos que se pudesse fazer de um avião: reconhecê-lo, construí-lo, pilotá-lo, embarcar nele, falar sobre ele. O modelo variaria também segundo outras dimensões: a competência aeronáutica do sujeito, sua idade, sua cultura, etc. (...). Cada versão, no entanto, deveria incluir o núcleo central que identificaria o modelo como sendo de avião. Deveria também incluir proposições e procedimentos de manipulação diversificados, visto que, conforme o uso, são outros os aspectos do modelo que são acionados (...) (p. 5).

Segundo Moreira (1996), os modelos mentais representam o que realmente vem à mente de uma pessoa sobre determinado fato ou conceito e o que guia o uso que podem fazer das coisas.

De acordo com Lévy (1997), a tentativa de compreender uma situação equivale primeiramente a lembrar ou construir certo número de modelos mentais e somente depois simular estes modelos, de modo a observar no que podem se transformar em diversas ocasiões e então verificar se eles se encaixam com a experiência que temos e finalmente, fazer a seleção do melhor modelo referente à situação deparada.

Segundo Vogt (2006), em decorrência da situação atual, a ciência sofre de uma séria perda de crédito, esbarrando em um crescente desinteresse e a exigência que se faz é de uma mudança brusca na prática e também na profissão científica. Não se pode mais acreditar que a ciência está distante da arte, da literatura e da filosofia, como se pudesse ser compreendida à parte de sua história. Isto se tornou uma rotina nas escolas, o que prejudica a compreensão de conceitos ligados à ciência.

Para exemplificar esta ideia, Bronowski (1998) usa um poema de William Empson, entitulado *To an Old Lady* (Para uma velha dama).

> **Para uma velha dama** (William Empson)
>
> A maturidade é tudo, no seu planeta que esfria.
> Respeite – a, não a julgue extinta
> Nem me despache um foguete. Os deuses duram
> Muito mais do que o sol; perdem calor um de cada vez.
>
> A partir desta terra sem nome divino
> Não é possível ajudá-la com um salto.
> Estranhos, poríamos fim ao velho palácio:
> As abelhas assassinam a nova rainha de que tanto
> Necessitam.
>
> Não. Espiemos pelo telescópio, ela e a paisagem,
> Enquanto durar seu ritual;
> Enquanto seus templos se afundam nas areias
> Que em ondas recobrem as torres em ruínas.
>
> Resta ainda a glória:
> Detalhes sociais sem um futuro,
> A dedicação às cortinas e ao bridge,
> O trágico fervor quando diz boa noite às empregadas.
>
> Não a desarticula a precessão dos anos,
> Ela segue a bússola segura de seu norte;
> Confiante, não tem limites na sua esfera,
> O que lhe falta continua sob controle.
>
> Minha noite está repleta de estrelas bem mais distantes,
> É estranho que também ela seja intangível,
> Nosso sol, que é o mesmo, nos impede de vê – la:
> Só as trevas a tornam invisível (BRONOWSKI, 1998, pg. 44).

A linguagem deste poema corresponde a uma época científica. Palavras como planeta, foguete, telescópio, bússola, esfera nos aproximam desta ideia, pois nos aparecem como palavras técnicas. Após algumas leituras começamos a entendê-las como imagens vívidas que se encaixam ao poema. Sua dificuldade se encontra nas ideias derivadas da ciência e não na terminologia científica. Estranhamos por que algumas coisas não nos são familiares e desta forma não conseguimos recriar em nossa imaginação.

Bronowski (1998) cita um verso em específico: “confiante, não tem limite na sua esfera”. Esta metáfora tem como base a Matemática, onde a superfície pode ser ilimitada e a sua extensão é finita. A velha dama pode passear livremente por toda a extensão do planeta, como se fosse infinita. A partir do poema, conseguimos criar uma imagem e fazer a associação da ideia presente na Matemática, para compreender o que é superfície de uma esfera.

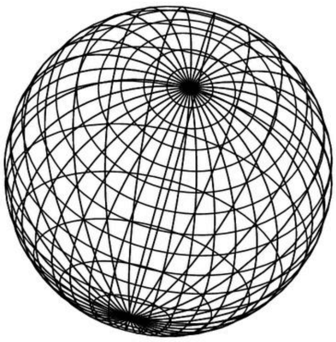

FIGURA 51 - ESFERA
FONTE: http://neuroniomatematico.blogspot.com/2008_02_01_archive.html

Pois, segundo Bronowski (1998, p. 65),

> A matemática é uma linguagem: a linguagem em que, em primeiro lugar, discutimos as partes do mundo real que podem ser descritas por números ou relações de ordem semelhante. Mas a atividade de traduzir fatos nessa linguagem provoca, nos que tem tal habilidade, um prazer especial, ao descobrir que a linguagem em sim mesma é mais rica do que seu conteúdo; o que ela traduz passa a ser menos importante do que a lógica e o estilo de tradução; daí nasce a matemática como uma literatura científica.

Quando ouvimos um poema, nossa imaginação é convidada a se libertar, mas quando o que nos chegam aos ouvidos é parte de uma teoria matemática, ficamos travados e não conseguimos criar nenhuma imagem que faça alguma associação com que estamos ouvindo. No entanto, se nossos sentidos forem aguçados, se partirmos de um lugar que é um pouco mais familiar, estaremos mais seguros para esta liberdade do imaginar.

França (2008) cita uma frase de Poincaré (1854 – 1912): “o matemático que não for também um poeta jamais será um matemático criativo (p. 65)”. É preciso a criatividade em imaginar situações que estão distantes da realidade e transformá-las em imagens para se expressar. Este é um desafio tanto para os artistas como para os matemáticos: expressar o que está diante de nós e foge da nossa compreensão. Como exemplo, Kepler (1561 – 1630) tinha como seu invisível as órbitas dos planetas que imaginava circulares. Só depois que se desapegou das formas circulares que conseguiu imaginar outras formas, e então concluiu que os planetas descreviam órbitas elípticas.

Segundo Sodré Junior citado por Derdik (2007) muitos astrônomos faziam esta experiência do imaginar e até representavam na areia algumas formas geométricas como linhas e círculos, procurando entender o movimento planetário. Afirma que:

> Uma ciência como a astronomia, fundada na observação e não na experimentação, necessita dos recursos de representação que só o desenho – entendido aqui como figura ou ilustração capaz de sintetizar certo conjunto de informações – propicia (...) o desenho/imagem é a forma natural de registrar a observação astronômica (SODRÉ JR in DERDIK, 2007, p. 231).

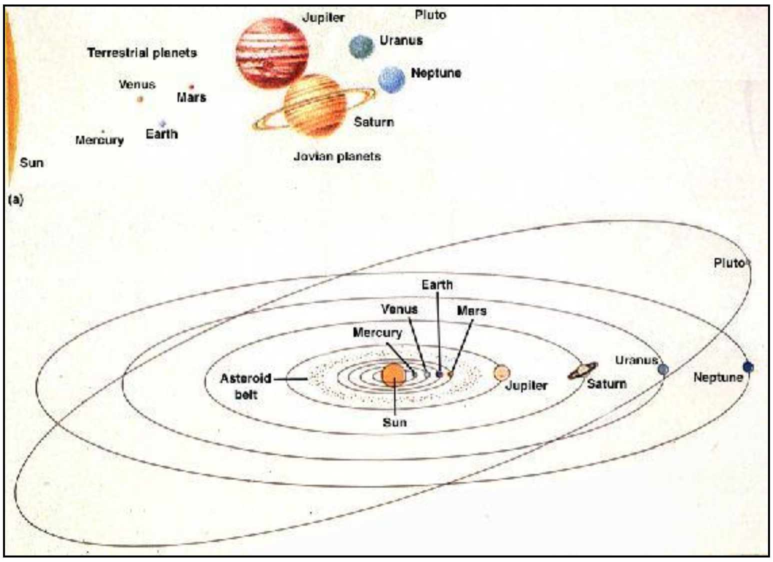

FIGURA 52 - ÓRBITA DOS PLANETAS
FONTE: http://www.pgie.ufrgs.br/portalead/oei/solar/solar.htm

5.2. REPRESENTAÇÕES

Para Moreira (1996), não aprendemos o mundo diretamente, mas através de representações mentais e que estas têm uma relação direta com as representações externas em geral e em particular com as imagens, que podem mediar os processos de aquisição do conhecimento.

Lévy (1983), citado por Machado (2000) afirma que pela nossa capacidade de manipulação podemos interagir com parcelas do mundo, reordená-las, operá-las, nos permitindo uma aproximação entre o trabalho manual e o intelectual e desta forma, fazer a representação de alguma coisa. Assim sendo, a representação constitui a dimensão fundamental destes processos cognitivos, pois com elas pode-se efetuar com mais facilidade algumas operações. Machado (2000, p. 60) ressalta que: "os modos de representação, como signos de escrita, tabelas, quadros, diagramas, mapas, visam simbolizar, de uma forma imediatamente perceptível, dados numéricos ou difíceis de serem apreendidos diretamente".

De acordo com Machado (2000), a representação, nos seus diferentes cenários, chama a "atenção para seu modo característico de articulação, onde pontificam as imagens, as construções metafóricas" (p. 62). A manipulação e a representação facilitam a percepção.

A manipulação sugere a realização de um experimento. Muitos alunos são instados a desenhar/representar sem manipular, ver, analisar, classificar. É importante transitar entre a construção e a percepção. Esta passagem depende também de conhecimentos prévios dos alunos e das conexões que conseguem fazer.

> Não há sentimentos, ideias ou raciocínios que não sejam representados, informados, ou apoiados por imagens, esquemas, um discurso interior. A coisa a exprimir, já está traduzida em signos, mesclada de linguagem, encenada, figurada por ícones (LEVY, 1997, p. 34).

O autor ainda afirma que a escolha duma estrutura gramatical influi na construção de determinados modelos mentais e das associações que podem ser feitas, mas a situação em que se encontra o aluno, por exemplo, a sua história, o universo que partilham contribui da mesma forma para a produção destes modelos mentais e da sua compreensão.

Sendo assim, Chalmers (1993), também afirma que a experimentação e as conclusões que são feitas dependem de sua experiência passada, do seu conhecimento anterior e de suas expectativas. Por isso, as experiências visuais que temos nunca são idênticas ao que o outro pode ver e assim, a representação de cada um é diferente. “Há mais coisas no ato de enxergar do que o que chega aos olhos” (CHALMERS, 1993, p. 48). A imagem da retina pode ser a mesma, porém a interpretação que é feita é distinta para cada um. Isto interfere na compreensão de algum conceito que se pretende estudar. Todos imaginam alguma coisa e tem expectativas diferentes, então é preciso “aprender a ver”. O professor, quando ensina, precisa também fazer esta orientação.

Chalmers (1993) ilustra a situação usando figuras da “gestalt”[3]:

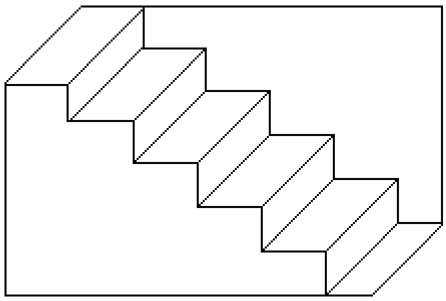

FIGURA 53 – ESCADA
FONTE: Chalmers (1993)

Quando olhamos pela primeira vez a imagem acima podemos perceber os degraus da escada com a superfície superior visível, mas esta não é a única forma de vê-la. A superfície inferior dos degraus pode também ser vista. Se a observarmos por um tempo, o que se vê muda frequentemente, mesmo involuntariamente. A imagem formada pela retina nunca muda, mas a nossa forma de ver vai além. Depende da nossa experiência perceptiva.

Podemos apresentar outras imagens para ilustrar aos nossos alunos a ideia de que podemos imaginar coisas diferentes, mas depois de certo tempo nossos “olhos” podem ser treinados para compreender o que estamos percebendo.

[3] É uma teoria da psicologia iniciada no final do século XIX na Áustria e Alemanha que possibilitou o estudo da percepção.

A figura 54 mostra a representação de um vaso (em preto) ou dois rostos (em branco) como exemplo. De imediato podemos não perceber o que a figura nos mostra, mas depois de certo tempo, será possível.

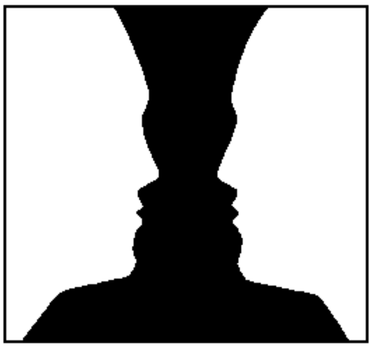

FIGURA 54 - EXEMPLO GESTALT
FONTE: http://www.chasqueweb.ufrgs.br/~slomp/gestalt/gestalt-poligrafo.pdf

De acordo com Fogaça (2006) a compreensão não ocorre pela cópia direta dada pelos órgãos dos sentidos, como afirmavam os empiristas. Desta forma, as aulas expositivas e descritivas pouco contribuem para a apreensão dos conceitos. Para a construção de o conhecimento ser efetiva é necessário permiti-la por meio de representações do objeto, pela construção mental dada pela imaginação que se tem quando se consegue entender do que se trata.

Conforme Bronowski (1998), a ciência é uma forma de imaginação. E toda atividade imaginativa é uma atividade criativa e que traz prazer de ser feita. Porém, o que se tem observado nas escolas não é bem isso. O processo do raciocínio científico está desinteressante, pois não se acompanham mais os procedimentos que levaram à descoberta. Os alunos não revivem mais os passos pelos quais uma ideia foi criada. O trabalho criativo na ciência só existe se há empenho de recriá-lo para nós mesmos e assim entendermos a profundidade e a beleza que as descobertas expressam. É necessário fazer desenhos, ilustrações, representações para auxiliar o aluno a dirigir seu pensamento em seu próprio ritmo e tentar percorrer o caminho que levou àquela experiência ou descoberta. Conforme Sandroni e Machado (1987), antes mesmo da expressão por meio das palavras, as crianças são sensíveis às imagens, conforme destacamos no início.

Lévy (1997), cita como exemplo a palavra faca. Com ela algumas imagens são formuladas em nosso pensamento como o próprio objeto – faca -, o processo de cortar, um dos talheres etc. Assim, o número de domínios cognitivos motivados pela interpretação de uma única palavra é infinito e pode evocar infinitas imagens da realidade designada. O autor complementa com outro exemplo sobre a descrição de um itinerário de uma cidade desconhecida: cada pessoa tem de um mesmo lugar, a sua representação esquemática, que é diferente do outro. Se os modelos da cidade que o informador tem e do viajante diferem muito, é provável que o viajante não reconheça o lugar.

Lévy (1997) afirma que a partir de experiências de psicologia cognitiva, quando os dados de um problema são apresentados de uma forma figurativa, seja por fotografias, gráficos, ou mesmo com algo concreto, os alunos conseguem resolver um numero maior de problemas do que quando são colocados diante de enunciados puramente verbais ou escritos. Assim, as imagens e modelos mentais permitem ao aluno efetuar cálculos, fazer simulações, inferências e comparações, sem precisar recorrer a operações lógicas formais.

Lévy (1997) cita mais exemplos nos quais se percebe a importância de uma linguagem por meio de imagens:

> A duração e todas as grandezas contínuas podem se representadas por verticais ou horizontais, como nos gráficos que servem para sintetizar os dados quantitativos; as intersecções entre classes podem representar-se por recobrimentos de superfícies, como nos diagramas de Venn, etc. Pontos sobre uma linha (ou em certas áreas) podem simbolizar indivíduos dispostos numa dimensão (ou conjunto). A imagem é, aqui, uma notação, um apoio visual, para o desenvolvimento de um raciocínio (LÉVY, 1997, p. 113).

E qualquer raciocínio envolve a simulação de modelos mentais sobre o que se pretende compreender. Nossos alunos precisam ser instigados a construírem modelos para a assimilação de conceitos, ideias, proposições. Motivar os alunos que só existe verdadeira compreensão se for possível imaginar com o que se pareceria o mundo se ela fosse uma verdade.

Lévy (1997), afirma que as pessoas precisam de exemplos ou metáforas para entender um conceito abstrato, pois as definições não são suficientes por si só. E assim, as imagens servem de apoio à compreensão, para facilitar sua apreensão.

Desta forma, Lévy (1997) ressalta algumas vantagens entre a imagem e a escrita:

> A imagem é percebida mais rapidamente que o texto; a memorização da imagem é, a maior parte das vezes, melhor do que as representações verbais; a maior parte dos raciocínios espontâneos envolvem mais a simulação de modelos mentais, frequentemente imagéticos, do que cálculos

> (lógicos) sobre cadeia de caracteres (...); enfim, as representações icônicas são independentes das línguas (não há problemas de tradução) (LEVY, 1997, p. 156).

Um questionamento parece bem plausível: porque não empregar a imagem ao invés de apenas um sistema de escrita? A imagem é utilizada em muitas áreas do conhecimento como um apoio à compreensão de muitos conceitos destas áreas, não para ilustrar apenas, mas para dar uma nova forma de comunicar, uma nova linguagem que se relaciona com a escrita. Destacamos aqui a Matemática, que muito se alimentou dos progressos conceituais da síntese das imagens, especialmente por meio das Geometrias. Posteriormente vamos exemplificar melhor a importância da expressão gráfica nesta área. Antes convém destacar algumas dificuldades e alternativas para uma representação por meio de imagens e na compreensão de conceitos científicos.

Ptolomeu no século II d.C. escreveu uma obra que fundamenta o pensamento astronômico por aproximadamente 1500 anos – O Almagesto - totalmente ilustrado e que Ptolomeu apresenta modelos geométricos “com os quais os movimentos e posições dos planetas poderiam ser vistos em qualquer instante do futuro” (SODRÉ JR in DERDIK, 2007, p. 231). A maioria das figuras são de Desenho Geométrico e contém entre eles, triângulos, segmentos de arcos, circunferências e também, esferas com círculos meridianos ou triângulos esféricos, que são representações utilizadas na Geometria esférica, uma das geometrias não euclidianas. Estes desenhos auxiliam na compreensão de teoremas relacionados à Trigonometria Plana e Esférica.

Não apenas esta obra citada acima, mas muitos livros de Astronomia utilizam desenhos para ajudar no entendimento de problemas abstratos ou para representar objetos.

A seguir, uma ilustração de traços modernos que está no Almagesto:

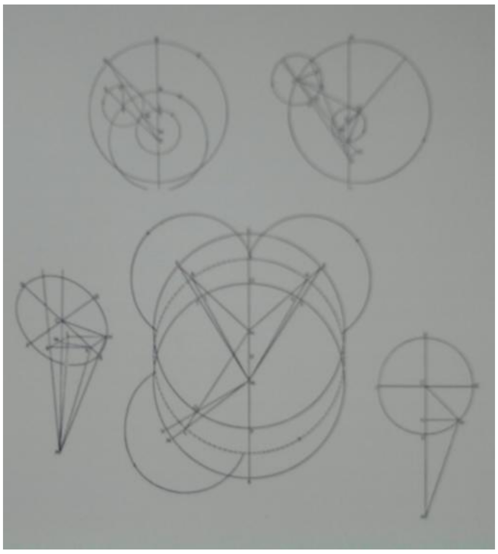

FIGURA 55 - UMA ILUSTRAÇÃO DO ALMAGESTO
FONTE: Derdik (2007)

Galileu Galilei foi o primeiro homem a apontar um telescópio para o céu. Com ele descobriu as luas de Júpiter. Em seu estudo, faz registros utilizando desenhos para analisar a posição destas luas em relação ao planeta.

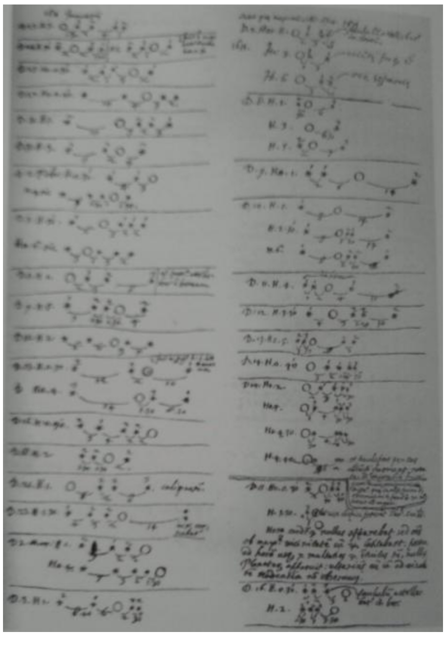

FIGURA 56 - CADERNOS DE OBSERVAÇÃO DE GALILEI.
FONTE: Derdik (2007)

Na arte da representação, grande destaque merece Leonardo da Vinci, que manifestou um leque vasto de interesses, como a Engenharia, Arquitetura, Mecânica, Botânica, Anatomia, Fisiologia, Química, Geologia, Física, Pintura, Astronomia. De acordo com Derdyk (2010), Leonardo representa a passagem da Idade Média para o Renascimento indo a direção à investigação cientifica como forma de reconhecimento, interpretação e compreensão da natureza.

No Renascimento o desenho é visto como linguagem para a arte, ciência e técnica, ganhando vida plena na figura de Leonardo da Vinci. Diversos de seus cadernos de anotações estão repletos de desenhos sobre todas as suas áreas de interesse.

Derdyk (2010, p. 137) afirma que Leonardo da Vinci:

> Desenhou como técnico, como cientista, desenhou como artista. Desenhou imaginando, desenhou observando, desenhou planejando e projetando, desenhou lembrando, desenhou inventando e assim o desenho ampliou os seus modos de pensar e atuar no mundo.

Em todos os seus estudos aliava o desenho com a escrita, registrando suas observações, conclusões, invenções, acreditando que a escrita está intimamente associado com a Expressão Gráfica. Aliava também a "observação, a memória e a imaginação para dar conta de suas hipóteses sobre o mundo dos fenômenos, tornando-se fontes inesgotáveis para a gênese de suas criações" (DERDYK, 2010, p. 137). Na figura abaixo podemos observar as imagens associadas aos seus escritos.

FIGURA 57 - O FETO POR LEONARDO DA VINCI
FONTE: Hemenway (2010)

O desenho, no Renascimento, tem sua expressão máxima, assumindo um importante papel para a compreensão da ciência e ainda interrelacionando a tecnologia com a arte a partir também da imaginação e da observação.

Sondré Junior in Derdik (2007) afirma que uma das funções do desenho é garantir a permanência da observação e na análise destas observações que o desenho se revela. Constitui-se numa ferramenta da imaginação que busca capturar alguma realidade que ainda está desconhecida, guia os olhos procurando regularidades ou ajuda a comparar o comportamento de diversas variáveis, por exemplo. É o primeiro passo para a visualização de uma ideia e assim, são como referenciais.

Ao longo dos tempos os motivos para desenhar mudaram, pois também mudaram os modelos que adotamos para representar ou descrever o Universo. Várias formas de desenhar são criadas para expressar novas ideias e que apesar da forma de fazer ser diferente, o desenho mantém sua essência, pois busca representar a realidade e fazê-la entender. É como se fosse o limiar entre a imaginação e a realidade, construída a partir de sinais gráficos.

5. 3. A EXPRESSÃO GRÁFICA NA ESCOLA

Quais são as habilidades que devem ser desenvolvidas pela escola? Existem várias e muitas delas são tão óbvias que não necessitam ser mencionadas. Mas, sem dúvida, a inteligência pictórica, entendida a partir do posicionamento de Machado (2000) é a que permite o desenvolvimento da Expressão Gráfica do aluno que apresenta e representa o seu pensamento, as suas ideias e o seu aprendizado.

Podemos perceber que, antecipando a linguagem escrita, a criança se expressa graficamente por meio de desenhos. Em relação a isto:

> Antes mesmo que a linguagem escrita lhe seja acessível, os recursos pictóricos tornam-se elementos fundamentais na comunicação e expressão de sentimentos, funcionando como um canal muito especial, através do qual as individualidades se revelam – ou são construídas -, expressando ainda, muitas vezes, características gerais da personalidade, ou mesmo sintomas dos mais variados desequilíbrios psíquicos (MACHADO, 2000, p. 105).

Machado (2000) chama de inteligência pictórica a capacidade de representação por meio do desenho. O autor afirma que a expressão pictórica é associada de modo natural a manifestações artísticas de distintas naturezas e que ao longo de toda a vida, esta forma de se expressar se constitui num elemento importante, porém é subestimado ou sujeito à linguagem escrita e articulada de forma complementar com a inteligência lógico – matemática.

Isto pode provocar dificuldades na capacidade de desenhar de pessoas adultas. O adulto pode entrar em choque quando lhe é solicitado a desenhar um objeto simples como uma cadeira e sua visão efetiva colidir com a sua representação.

As escolas há muito tempo passaram a priorizar linguagem escrita e abandonar a linguagem representativa do cotidiano dos alunos. Contudo, Machado (2000, p. 133) adverte que: “entretanto, a representação esquemática pode vir a tornar-se um instrumento extremamente interessante para a compreensão da dinâmica dos processos cognitivos”. O aluno poderá por si próprio fazer as conexões e relações entre o que está estudando e sintetizar os conceitos envolvidos de modo que futuramente possa se remeter ao conhecimento que foi adquirindo, proporcionando a dinâmica destas conexões.

Para Bronowski (1998) a ciência não é uma atividade que está distante da imaginação. O autor afirma que:

> Prejudicamos a educação das crianças quando habituamos a separar a razão da imaginação, apenas pela conveniência do horário escolar. Porque a imaginação não se limita às explosões da fantasia, ela é sempre a manipulação mental do que está ausente dos sentidos, mediante o uso de imagens, palavras ou outro símbolos (BRONOWSKI, 1998, p. 38).

A imaginação é sempre um processo experimental. Isto pode ser percebido desde a infância, nas brincadeiras que as crianças simulam situações como brincar de casamento, de escola, de construir casas. Estas brincadeiras são importantes para o desenvolvimento infantil, pois as crianças a partir delas, testam o futuro. Para Lévy (1997), a simulação é efetivamente um auxilio à imaginação. A palavra “experimento” representa a palavra certa do que a criança faz.

Bronowski (1998, p. 39) afirma: “e essa mesma palavra, fundamental para a ciência, descreve exatamente a ação do adulto quando está fazendo alguma coisa original”. Por exemplo, um físico faz a experimentação de situações materiais para entender propriedades que ele não conhece por completo.

Beveridge (1980, p. 4) escreve: “Muitos dos grandes cientistas, entre eles Einstein, usaram *símbolos visuais* ao invés de símbolos verbais, ao tentar resolver um problema”. Se os adultos afirmam a importância de utilizar este modo de expressão por meio de diferentes símbolos e códigos visuais, por que não incentivar nas crianças esta forma de comunicação?

De acordo com Derdik (2007) o desenho na escola tem a qualidade de expandir a linguagem dos pensamentos. A escrita foi elaborada ao longo dos tempos por meio de registros visuais em direção à formalização do conhecimento. O desenho do signo, aos poucos foi se desencarnando da imagem – figura para adquirir um valor fonético e universal. Mas primeiramente o desenho foi concebido como a extensão do pensamento.

A constatação da recorrência da palavra desenho nos mais diversos campos do conhecimento como poesia, filosofia, ciências, política, economia, tecnologia, explicita os significados e experiências humanas que estão realmente embutidos no ato de desenhar.

Desenho é um termo que pode assumir diversos significados: traço, registro, projeto, meio de expressão. Pode ser entendido como uma tradução gráfica de estruturas que encadeiam um pensar, denunciando um modo de ver o mundo. Abre a possibilidade de refletir. Esta reflexão torna-se um registro a partir de alguns instrumentos e suportes.

> O desenho possui uma natureza especifica, particular em sua forma de comunicar uma ideia, uma imagem, um signo por meio de determinados suportes: papel, cartolina, lousa, muro, chão, areia, madeira, pano, utilizando determinados instrumentos: lápis, cera, carvão, giz, pincel, pastel (...) (DERDYK, 2010, p. 23).

O uso do instrumento e do suporte depende de quem desenha e o que pretende representar. Porém, a representação não se limita ao lápis e papel, podendo se manifestar por outros sinais, como as impressões digitais. Para Derdyk (2010) o desenho se constitui numa ferramenta de comunicação e expressão muito abrangentes, tanto para a arte, quanto para a ciência e a técnica.

A Natureza também possui a sua manifestação do desenho e Derdyk (2010) cita como exemplos a nervura das plantas, as rugas do rosto, as configurações das galáxias e a disposição das conchas na praia. Dando a ideia de que a representação não tem limites de uma folha ou uma tela.

FIGURA 58 - FOLHA PENINÉRVEA
FONTE: Dia a dia Educação

O ato de desenhar é uma busca da aproximação com o mundo, é conhecer e apropriar-se deste conhecimento, conforme afirma Derdyk (2010). Esta ação está presente em muitas atividades, como ilustrações de livros, representação de conceitos matemáticos, modelos de carros, projetos arquitetônicos e outras mais simples e de urgência, como para indicar caminhos numa cidade, disposição dos móveis na sala. “O desenho é uma atividade perceptiva, algo que não se completa, mas que nos convida, sugere, evoca” (DERDYK, 2010, p. 41).

O desenho é fundamental para os artistas, engenheiros, arquitetos e para outros, se não o é, pelo menos tem muita utilidade. As ideias, as explicações, ficam mais claras se acompanhadas de uma representação gráfica. Quando desenhamos nos apropriamos do que é desenhado, a partir de sua observação e manipulação, conseguimos chegar à compreensão.

Derdyk (2010) confirma que o que enfatizamos anteriormente: “desenhar é uma atividade lúdica, reunindo, como em todo jogo, os aspectos operacional e imaginário” (DERDYK, 2010, p. 67). É preciso projetar, idealizar, imaginar as situações para então registrá-las. A capacidade de imaginar é extremamente importante para todo conhecimento, inclusive o cientifico. “a imaginação possui uma natureza visionária, detectando a intencionalidade contida na ação humana” (DERDYK, 2010, p. 122). O desenho estimula a imaginação e constitui-se num pensamento visual.

No próximo capítulo serão discutidas metodologias de ensino das Geometrias não Euclidianas, visando a relação com a Expressão Gráfica, como ferramenta para tentar diminuir as dificuldades de aprendizagem deste conteúdo, priorizando a visualização e a construção de imagens mentais dos seus conceitos mais básicos, para que o aluno crie modelos mentais ao estudar as Geometrias não Euclidianas.

6. METODOLOGIAS DE ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Segundo Paraná (2008), as Geometrias não Euclidianas devem ser contempladas numa proposta metodológica e relacionadas com outros conteúdos matemáticos. Assim, procuro fazer esta abordagem apresentando algumas metodologias de ensino, desenvolvidas por diferentes autores como Franco (2008), Cabariti (2004), Gouvea (2005), Andrade (2011), Kodama (2006), Coutinho (2001) entre outros, para cada uma das Geometrias discutidas neste trabalho. Após, farei uma análise destas abordagens, cujo foco será estudar sobre o seu ensino, discutindo alternativas que relacionam a Expressão Gráfica como um suporte didático para o estudo dessas novas Geometrias.

A partir deste momento, apresento as metodologias escolhidas para a análise deste trabalho, iniciando com metodologias que envolvem o ensino da Geometria Hiperbólica, passando então para metodologias relativas as Geometrias Elíptica e Projetiva e para finalizar apresento algumas metodologias de Geometria Fractal.

6.1. GEOMETRIA HIPERBÓLICA

A Geometria Hiperbólica, conforme apresentado nos capítulos anteriores, foi a primeira Geometria a ser definida como uma Geometria não Euclidiana e no entanto é a menos explorada no ensino das novas geometrias. Encontram-se na literatura várias atividades propostas para o ensino das Geometrias Esférica, Fractal e Projetiva. Com relação à Geometria Hiperbólica, temos poucas atividades e a maioria utiliza ambientes informatizados para fazer sua exploração, como as propostas em Rocha (2009), Cabariti (2004) e Lovis (2009).

As atividades que serão apresentadas correspodem a atividades que foram desenvolvidas para serem aplicadas com o auxílio de softwares educacionais.

6.1.1. Atividade 1 – Geometria Hiperbólica

Cabariti (2004) apresenta uma sequência de atividades para a compreensão da Geometria Hiperbólica utilizando o software Cabri-Geomètre. A primeira atividade selecionada, tem como objetivo caracterizar e construir quadriláteros na Geometria Hiperbólica, lembrando dos primeiros estudos de Saccheri.

> O jesuíta Girolano Saccheri (1667-1733) em sua tentativa de provar o 5º Postulado de Euclides criou um quadrilátero que ficou conhecido como Quadrilátero de Saccheri. Este quadrilátero tem dois ângulos retos e os dois lados perpendiculares à base, congruentes entre si. Seja ABCD um quadrilátero de Saccheri, AB é o lado da base, AD e BC são os lados congruentes, enquanto que DC é o lado topo do quadrilátero. (CABARITI, 2004, P. 63)

FIGURA 59 - QUADRILÁTERO DE SACCHERI
FONTE: Cabariti (2004)

> Construa este quadrilátero no modelo do disco de Poincaré. O que você percebe sobre os outros dois ângulos. Justifique sua resposta. (CABARITI, 2004, p. 64)

Segundo Cabariti (2004) espera-se apenas que professores e/ou alunos consigam perceber e justificar que nesse quadrilátero os ângulos da base são retos e os dois lados são congruentes e que os outros dois ângulos são agudos e congruentes. Demonstrações completas são dispensadas, pois envolvem conceitos de Geometria Hiperbólica que muitos podem desconhecer, por isso espera-se apenas a justificativa da congruência dos ângulos.

A figura a seguir mostra a resolução feita no software Cabri Gèométre.

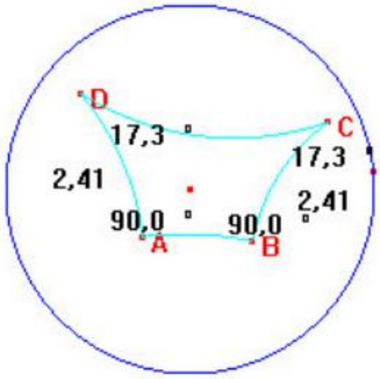

FIGURA 60 - QUADRILÁTERO DE SACCHERI NA GEOMETRIA HIPERBÓLICA
FONTE: Cabariti (2004)

6.1.2. Atividade 2 – Geometria Hiperbólica

Outra atividade selecionada da sequência de Cabariti (2004), trata da construção de um paralelogramo no modelo do disco de Poincaré: “Construa um paralelogramo-h no modelo do disco de Poincaré. Você sentiu alguma dificuldade em fazer essa construção? Se a resposta for positiva, explique o porquê.”(p.72).

O objetivo desta atividade é verificar que a construção de um paralelogramo é independente do quinto postulado de Euclides. Lembrando que este postulado é também chamado de postulado das paralelas, que afirma que dados uma reta e um ponto fora dela é possível traçar, por este ponto, uma única reta. Esta atividade permite fazer a exploração das propriedades do paralelogramo e chegar à prova que não depende do quinto postulado.

A figura 61 representa exemplos de construções de paralelogramos hiperbólicos no modelo do disco de Poincaré.

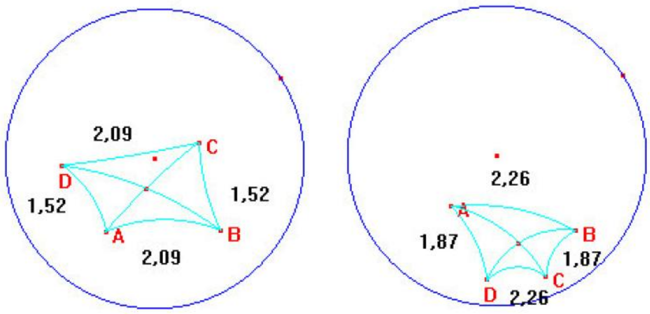

FIGURA 61 - PARALELOGRAMOS NA GEOMETRIA HIPERBÓLICA
Fonte: Cabariti (2004)

A autora lembra que, para esta construção deve – se utilizar a propriedade de que as diagonais de um paralelogramo se interceptam em seus pontos médios.

6.1.3. Atividade 3 – Geometria Hiperbólica

Rocha (2009) apresenta algumas atividades de exploração das propriedades da Geometria Hiperbólica, utilizando um software de Geometria Dinâmica (Cinderella). Entre estas atividades destacamos a seguinte:

> Explore dinamicamente as figuras e observe seu comportamento:
> 1. Como são as retas no plano euclidiano? E no plano hiperbólico?
> 2. E os segmentos de retas?
> 3. E os ângulos? Há divergências nas suas medidas? (ROCHA, 2009, p. 99).

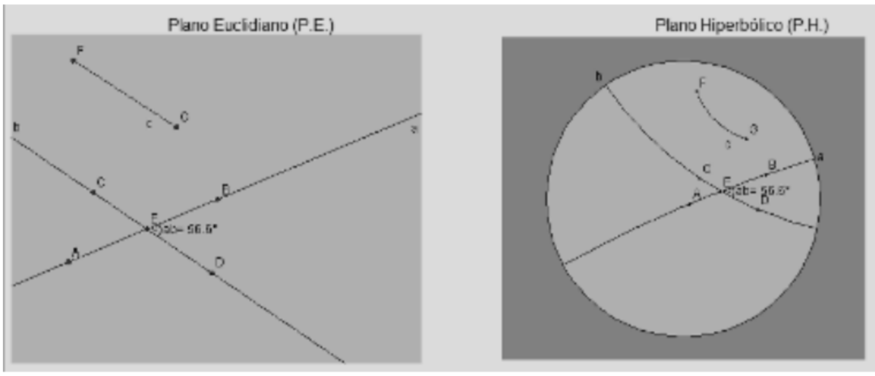

FIGURA 62 - ATIVIDADE 3 – GEOMETRIA HIPERBÓLICA
Fonte: Rocha (2009)

Segundo Rocha (2009), com o auxílio do software é possível movimentar os elementos de um plano, visualizando ao mesmo tempo os movimentos no outro plano e percebendo o comportamento destes elementos nos dois planos e analisando suas propriedades. O objetivo é explorar o disco de Poincaré e fazer com que o aluno efetue as conversões necessárias para trabalhar com as duas geometrias.

6.1.4. Atividade 4 – Geometria Hiperbólica

> A Geometria Euclidiana ao assumir o seu famoso quinto Postulado impõe que a soma dos ângulos de qualquer triângulo seja igual a 180º. Na Geometria Hiperbólica esta soma é sempre menor do que aquele valor. Faça uma representação gráfica que ilustre este fato. (COUTINHO, 2001, p. 46).

Esta atividade permite ao aluno explorar uma das propriedades da Geometria Hiperbólica sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Os alunos podem apresentar a seguinte figura como uma ilustração desta situação:

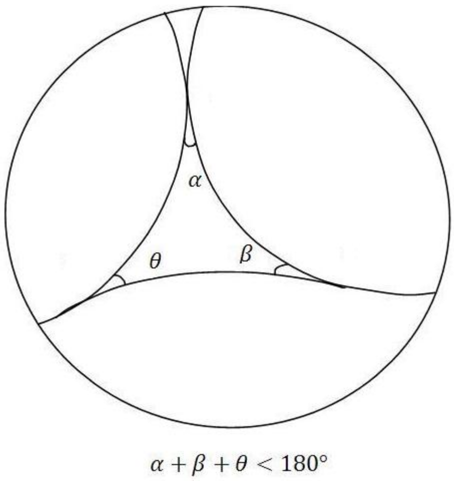

FIGURA 63 – REPRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 4
Fonte: Coutinho (2011)

6.2. GEOMETRIA ELÍPTICA

Muitos pesquisadores fazem a associação da Geometria Elíptica com o globo terrestre que, conforme a escala de representação pode ser considerado como uma esfera. Franco e Delai (2011), apresentam uma proposta de implementação do ensino de Geometria Elíptica no Ensino Médio. A seguir, apresento algumas das atividades propostas pelos autores para iniciar o estudo da Geometria Esférica. Os autores apresentam algumas imagens para representar e ilustrar as situações descritas em cada atividade:

6.2.1. Atividade 1 – Geometria Elíptica

> Suponhamos que um navio parte de um ponto da linha do equador e navega mil quilômetros no sentido norte, em seguida gira 90º e navega mais mil quilômetros para o leste, depois gira 90º e navega mais mil quilômetros no sentido sul. Ao final desse trajeto qual foi o caminho percorrido e qual o deslocamento? (FRANCO e DELAI, 2011, p.18).

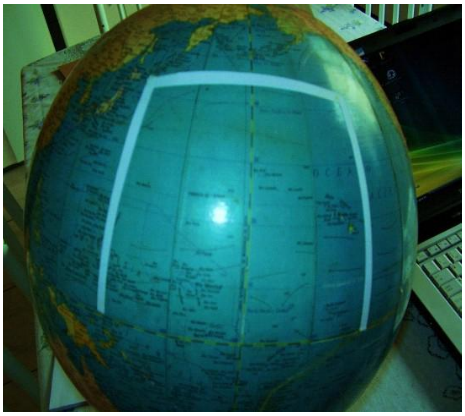

FIGURA 64 - REPRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 1
Fonte: Franco e Delai (2011)

Esta atividade permite fazer uma comparação com a Geometria Euclidiana com a Geometria Esférica e perceber algumas diferenças entre as duas. A figura formada num plano euclidiano não será a mesma figura formada num plano esférico e isto pode ajudar o aluno a entender alguns conceitos que estão envolvidos com a Geometria Esférica.

6.2.2. Atividade 2 – Geometria Elíptica

“Se conseguíssemos esticar uma corda de 500 quilômetros em cima do mar, para que ela ficasse em nível, será que formaria uma reta euclidiana?” (FRANCO e DELAI, 2011, p.19).

FIGURA 65 - REPRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 2
Fonte: Franco e Delai (2001)

Com esta atividade o aluno entenderá a diferença de uma reta no plano euclidiano e a “reta” no plano esférico.

6.2.3. Atividade 3 – Geometria Elíptica

> Ao tomarmos um círculo euclidiano de raio 1000 quilômetros, como esse círculo ficaria se fosse colocado sobre a terra? O que ocorre com as áreas e os perímetros, se compararmos antes e depois da colagem? (FRANCO e DELAI, 2011, p.19).

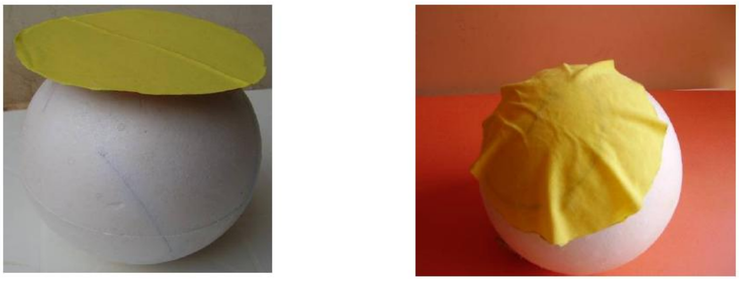

FIGURA 66 - REPRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 3
Fonte: Franco e Delai (2011)

Os autores apresentam mais uma atividade que pode ajudar a iniciar os estudos da Geometria de Riemann, permitindo ao aluno visualizar conceitos básicos desta outra Geometria, explorando área e perímetro em comparação com a Geometria tradicional.

6.2.4. Atividade 4 – Geometria Elíptica

"Ao desenharmos um triângulo na superfície de uma esfera, o que podemos dizer sobre a soma das medidas de seus ângulos internos? (FRANCO e DELAI, 2011, p.19).

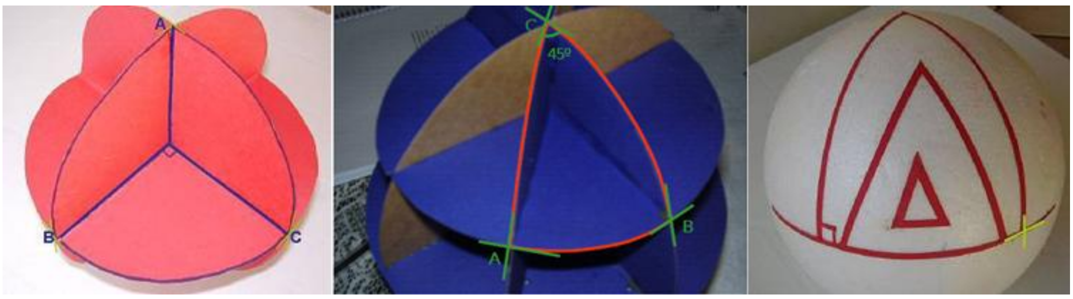

FIGURA 67 - REPRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 4
Fonte: Franco e Delai (2011)

Uma das propriedades mais importantes desta Geometria é em relação à soma dos ângulos de um triângulo. O entendimento desta propriedade pode ser facilitado por meio desta atividade que permite sua visualização e exploração por meio de modelos concretos.

6.2.5. Atividade 5 – Geometria Elíptica

A atividade a seguir tem por finalidade fazer mais uma comparação com a Geometria Tradicional. Ao analisar a figura, o aluno percebe que a reta euclidiana não representa a realidade diante da situação descrita pela atividade.

> Imaginemos que um avião vai de São Paulo a New York, percorre aproximadamente oito mil quilômetros. Se ao invés de percorrer a trajetória como uma geodésica, o avião a percorresse como uma linha reta euclidiana, o que aconteceria com esse avião? (FRANCO e DELAI, 2011, p.19).

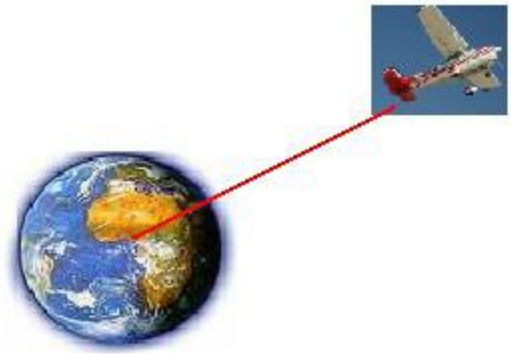

FIGURA 68 - REPRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 5
Fonte: Franco e Delai (2011)

Estas atividades têm como objetivo introduzir conceitos de Geometria Esférica, bem como indicar algumas diferenças com a Geometria Euclidiana. Conceitos de retas, círculos, área e perímetros da Geometria Euclidiana, soma dos ângulos de um triângulo, triângulo esférico, geodésicas, são abordados.

6.2.6. Atividade 6 – Geometria Elíptica

A atividade apresentada a seguir foi selecionada de Gouvea (2005, p. 7) que apresenta um estudo da Geometria Esférica utilizando o software Cinderella. A atividade corresponde à construção de um octaedro esférico[4].

O objetivo desta atividade é dar início à abordagem do triângulo esférico e suas propriedades, entre elas a soma dos ângulos internos, que neste triângulo é

[4] Um octaedro esférico é construído a partir de uma esfera dividida em oito partes iguais

superior à 180º. Segundo Gouvea (2005), os alunos foram motivados a medir os ângulos utilizando o software Cinderella para comprovar tal propriedade.

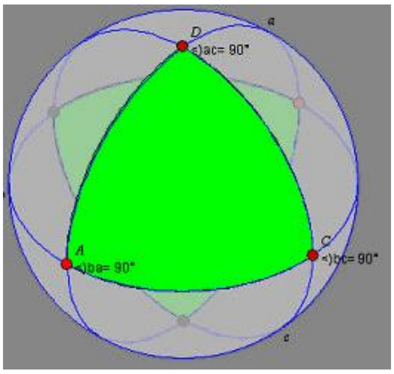

FIGURA 69 - REPRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 6
FONTE: Gouvea (2005)

6. 3. GEOMETRIA PROJETIVA

Como a Geometria Projetiva surgiu a partir da necessidade de criar uma teoria para a representação correta das imagens suscitadas da nossa visão dos objetos do mundo exterior, especialmente a partir de regras já praticadas pelos pintores renascentistas, não é de se estranhar que muitas aplicações desta Geometria estejam relacionadas com obras de Arte, que exploram os conceitos de linha do horizonte, ponto de fuga e perspectiva, por exemplo. Desta forma são encontradas muitas atividades com este foco, porém existem outras aplicações, como mostraremos em uma das atividades selecionadas.

6.3.1. Atividade 1 – Geometria Projetiva

Para se iniciar a exploração dos conceitos de Geometria Projetiva Kodama (2006) apresenta duas sequências de atividades em seu trabalho e dentre elas propõe a atividade a seguir:

> Coloque dois palitos de churrasco paralelos entre si e, mantendo o paralelismo entre eles, coloque-os em posições diferentes sobre uma face paralela ao plano de projeção. Para cada posição observe e compare os segmentos correspondentes às sombras dos palitos. Para cada posição verifique se os segmentos correspondentes às sombras dos palitos são paralelos. De que forma você fez esta verificação? Justifique. (KODAMA, 2006, p. 35).

Segundo o autor, o objetivo desta atividade é fazer com que os alunos percebam se existe conservação do paralelismo mesmo ao mudar a posição dos palitos. Desta forma, estabelece-se a relação entre o conceito de retas paralelas e plano de projeção.

Kodama (2006, p. 36) apresenta a seguinte imagem para ilustrar a proposta desta atividade:

FIGURA 70 - PROJEÇÃO DOS PALITOS
FONTE: Kodama (2006)

Kodama (2006) apresenta na segunda sequência a mesma atividade enunciada anteriormente, porém os palitos ficarão sobre uma superfície que não é paralela ao plano de projeção. Neste caso, o paralelismo se mantém.

FIGURA 71 - PROJEÇÃO 2 DOS PALITOS
FONTE: Kodama (2006)

6.3.2. Atividade 2 – Geometria Projetiva

A segunda atividade também foi selecionada de Kodama (2006) e trata da construção da perspectiva cavaleira de figuras planas que estão situadas em planos perpendiculares ao plano de projeção. Esta atividade é utilizada para a compreensão da representação de sólidos geométricos em perspectiva cavaleira, como prismas e pirâmides.

“Os alunos foram divididos em grupos e cada grupo recebeu uma peça poligonal plana de acrílico e foi pedido a eles que um dos lados da peça seja paralelo ao plano horizontal e a peça perpendicular ao plano de projeção.” (KODAMA, 2006, p. 43).

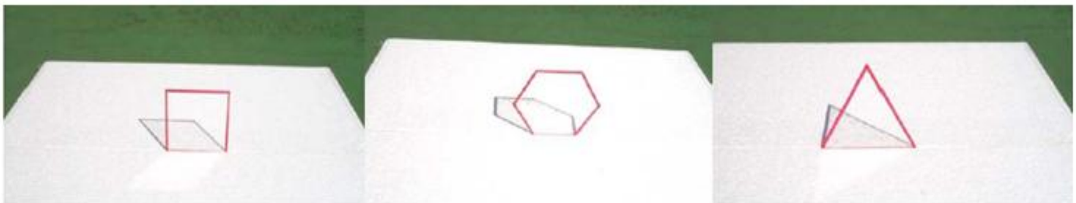

FIGURA 72 - PROJEÇÃO DE PEÇAS POLIGONAIS
FONTE: Kodama (2006)

Espera-se desta atividade que os alunos notem que a projeção cavaleira de um quadrado é um paralelogramo, de um hexágono regular, a projeção é um hexágono que pode não ser regular e a projeção do triângulo equilátero, um triângulo que pode ser escaleno. Esta atividade propicia a conexão entre o conteúdo estudado e a Geometria plana.

6.3.3. Atividade 3 – Geometria Projetiva

Franco (2008), apresenta algumas atividades para a inserção da Geometria Projetiva na sala de aula. Entre elas destaquei duas atividades.

A seguinte atividade consiste em resolver uma situação que pode ser encontrada no cotidiano, como determinar o lugar correto da fixação de uma torre de energia.

“Entre duas torres A e D de energia deve-se colocar mais uma torre I. Como determinar o lugar da torre I se entre as torres A e D existem duas casas?” (FRANCO, 2008, p. 5)

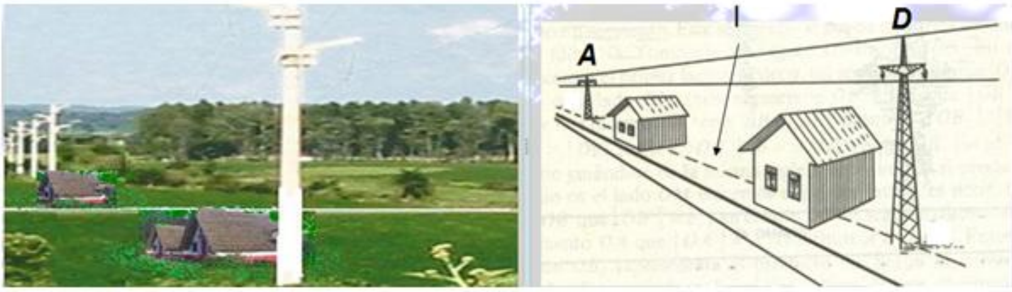

FIGURA 73 - ATIVIDADE TORRES
FONTE: Franco (2008)

Com esta atividade é possível explorar conceitos de Geometria Plana como paralelismo, projeção, perspectiva, homotetia e semelhança de triângulos, bem como verificar validade e diferenças em relação as Geometrias Projetiva e Plana.

6.3.4. Atividade 4 – Geometria Projetiva

Segundo Franco e Watermann (2009), primeiramente foi pedido aos alunos que desenhassem uma auto estrada, sem ter nenhuma noção de perspectiva. A figura 74 mostra um desenho feito por um aluno, confirmando a necessidade deste estudo.

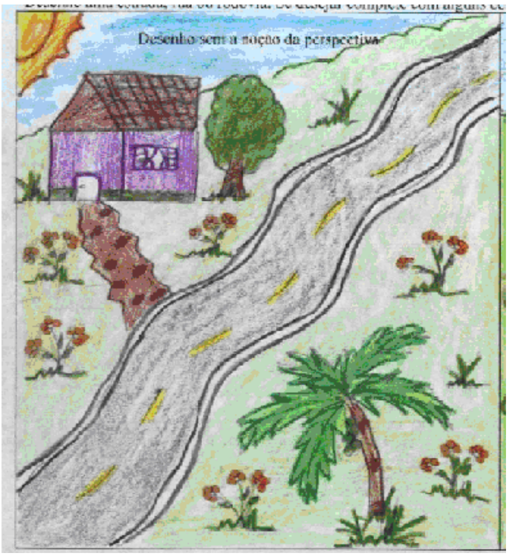

FIGURA 74 - DESENHO SEM NOÇÃO DE PERSPECTIVA
FONTE: Franco e Waterman (2009).

Após explicação dos principais conceitos de Geometria Projetiva, pediu-se aos alunos que desenhassem uma nova figura de auto estrada, usando agora as noções de perspectiva que aprenderam. O resultado é mostrado na figura seguinte:

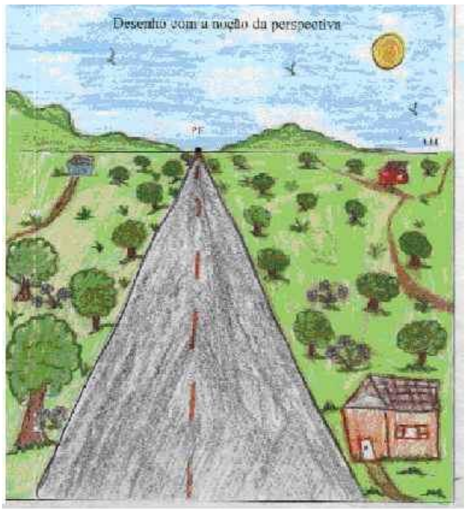

FIGURA 75 - DESENHO COM NOÇÃO DE PERSPECTIVA
FONTE: Franco e Waterman (2009).

De acordo com os autores, observa-se que nos desenhos apresentados as linhas paralelas do objeto real, quando transferidas para um plano, perdem a noção de paralelas e os alunos conseguem entender e mostrar por meio de imagens que na Geometria Projetiva as linhas paralelas nem sempre existem. Esta atividade é utilizada para introduzir os conceitos da Geometria Projetiva.

6.3.5. Atividade 5 – Geometria Projetiva

A atividade a seguir é proposta por Reis e Trovon (2010, p. 291), para se trabalhar com os conceitos de ponto de fuga, linha do horizonte e perspectiva, de acordo com orientação das Diretrizes Estaduais.

FIGURA 76 - ATIVIDADE DE GEOMETRIA PROJETIVA
FONTE: Reis e Trovon (2010)

Os autores introduzem o tema a partir de obras, especialmente, do Renascimento, como dito anteriormente, cujo período os artistas passaram a se preocupar com as representações das formas como elas eram vistas. Na figura 84, mostrada abaixo, o ponto de fuga pode ser observado ao fundo da obra, no centro do arco. Na atividade anterior (figura 76), é possível perceber novamente a preocupação em mostrar a aplicação destes conceitos, fazendo uso de obras de arte.

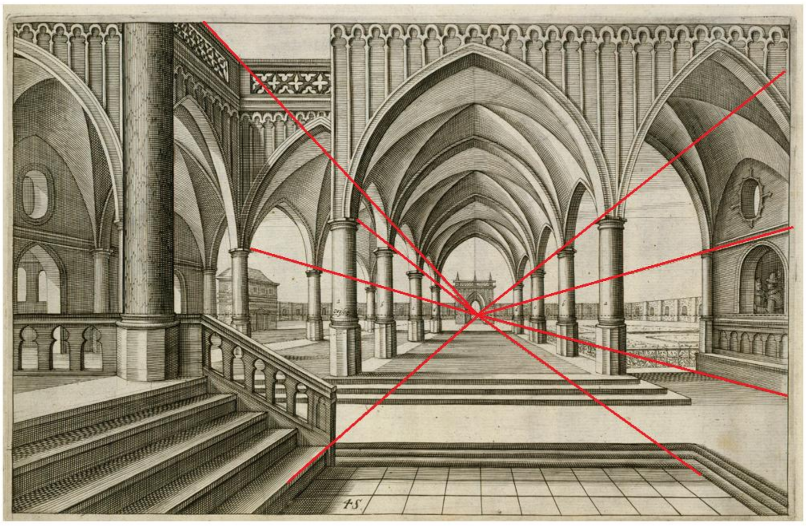

FIGURA 77 - OBRA DE VREDEMAN DE VRIES
FONTE: Reis e Trovon (2010)

6.4. GEOMETRIA FRACTAL

Dentre as Geometrias não Euclidianas estudadas neste trabalho, a Geometria Fractal é a que possui um maior número de metodologias para a inserção do seu ensino nas aulas de Matemática, conforme pode ser observado em Carvalho (2005), Barbosa (2002), Franco e Vejan (2010), Arsie (2007), Camargo (2008), Murr (2007), Sallum (2005), Gouvea (2005).

A seguir, descreverei quatro atividades que foram selecionadas dentre as encontradas na literatura.

6.4.1. Atividade 1 – Geometria Fractal

A primeira atividade a ser mostrada pode ser encontrada em Carvalho (2005) que apresenta um fractal que pode ser explorado por meio da figura plana de um quadrado. Carvalho (2005) afirma que uma boa apropriação do seu conceito, bem como em relação à sua área, pode permitir ao aluno que se utilize dessa ferramenta em muitas situações que necessite de seu emprego.

> Um fractal é uma figura geométrica que pode ser obtida através de processos iterativos. Observe o principio de criação de um fractal com as iterações abaixo. Na primeira iteração o quadrado tem lado igual a 4. Na segunda, os quatro novos quadrados agrupados em cada lado da figura anterior possuem, cada um, metade do lado da iteração 1. Na terceira, cada novo quadrado tem a metade do lado da iteração aterior. Qual a área da figura formada na iteração 3? (CARVALHO, 2005, p. 38).

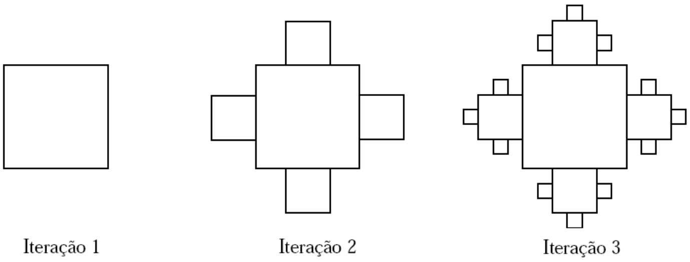

FIGURA 78 - ATIVIDADE 1 FRACTAL
FONTE: Carvalho (2005)

Carvalho (2005) aponta que o objetivo desta atividade é verificar o entendimento do conceito de área e sua utilização em processos iterativos por meio da exploração do quadrado, fazendo assim a relação dos fractais com o conteúdo de Geometria Plana.

6.4.2. Atividade 2 – Geometria Fractal

O fractal apresentado foi construído utilizando a computação gráfica. Esta é uma área que explorou a Geometria Fractal, permitindo a construção das mais diversas imagens fractais.

> A computação gráfica é uma área que se encontra em franca expansão. O que muita gente não sabe é que algumas das imagens mais belas e complexas são feitas por processos simples que se repetem várias vezes. Veja as etapas de criação dos ramos. De acordo com a construção responda: a) Qual a expressão que relaciona o número de passos com a quantidade de segmentos? b) Quantos segmentos serão obtidos no passo 4? c) O que acontece com o comprimento dos novos segmentos formados a cada novo passo? (CARVALHO, 2005, p. 40)

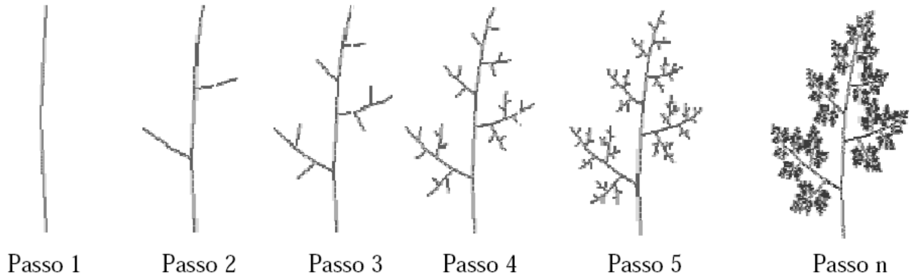

FIGURA 79 - ATIVIDADE 2 FRACTAL ALEATÓRIO
FONTE: Carvalho (2005)

Carvalho (2005) afirma que a finalidade desta atividade é identificar o padrão do processo iterativo e a capacidade de transformá-lo em equação que representa a situação. Com esta atividade é possível explorar o uso de tabelas para a apresentação de resultados, bem como fazer a relação com os conteúdos matemáticos sobre Função Exponencial e Progressão Geométrica.

6.4.3. Atividade 3 – Geometria Fractal

A terceira atividade foi retirada de Franco e Vejan (2010). Os autores favorecem a exploração do conceito de fractal por meio da manipulação de materiais concretos.

> Construção: 1. Considere o triminó não-reto, construído por 3 quadrados, que serão fractal em nível 1. 2. O aluno deverá substituir cada peça quadrada por um triminó L , teremos assim o Fractal em nível 2. 3. Novamente o aluno deverá trocar cada quadrado por um triminó, obtendo assim o Fractal ao nível 3. Agora é sua vez: Construa o Fractal Triminó ao Nível 4. - Quantas peças foram usadas? - Para construir um Fractal Triminó ao Nível 5, quantas peças serão necessárias? - E para construir um Fractal Triminó ao Nível n? - Agora você é capaz de descobrir que conteúdo da matemática está relacionado com esta atividade? - Qual o perímetro em cada nível? Considere cada peça quadrada com 2,5 cm de lado. (FRANCO e VEJAN, 2010, p. 12).

FIGURA 80 - ATIVIDADE 3 FRACTAL TRIMINÓ
Fonte: Franco e Vejan (2010)

Franco e Vejan (2010) apontam que o objetivo é reconhecer uma sequência, entender um processo iterativo, organizar dados em tabelas, calcular perímetro e potenciação. Sendo assim é possível fazer conexão com os seguintes conteúdos matemáticos: Perímetro, Potenciação, Sequências.

6.4.4. Atividade 4 – Geometria Fractal

Barbosa (2002) apresenta uma série de atividades da Geometria Fractal para a sala de aula. Dentre estas atividades, estão algumas mostrando a construção de fractais com recursos computacionais. Estas atividades permitem a relação com o conteúdos dos Números Complexos.

Ele escolhe o programa Nfract para gerar os fractais. Este programa implementa um polinômio de variável complexa de 7º grau, calcula e produz as imagens fractais geradas por ele. O autor mostra como gerar o fractal Conjunto de Julia, como uma variação do Conjunto de Mandelbrot, gerado pela função: $Z_n = Z^2_{n+1} + C$. assim, escolhe-se uma valor para C e o torna fixo para toda a imagem.

O livro de Barbosa (2002) acompanha um CD-Rom com o software Nfract e que também apresenta a animação de alguns fractais.

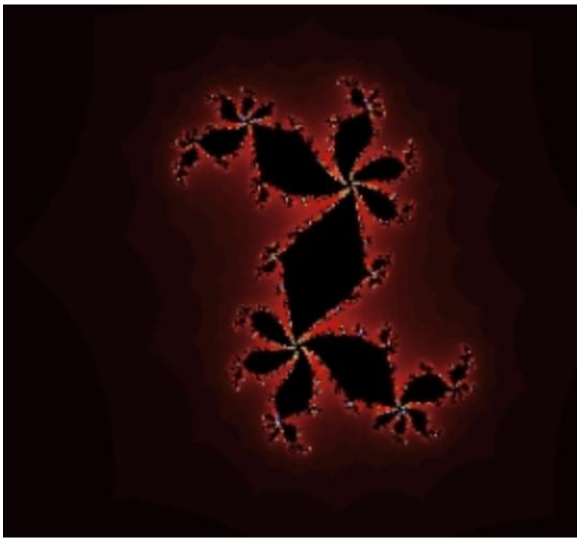

FIGURA 81 - CONJUNTO DE JULIA
FONTE: Barbosa (2002)

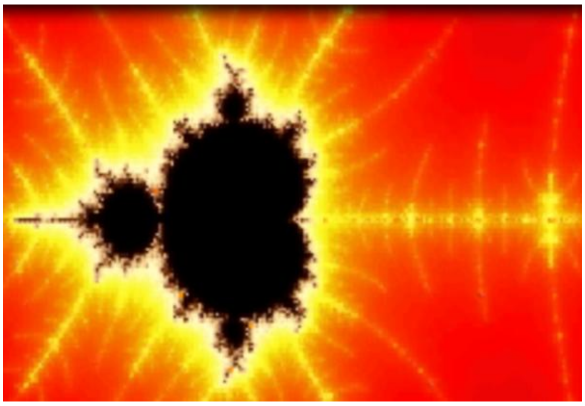

FIGURA 82 - CONJUNTO DE MANDELBROT
FONTE: Barbosa (2002)

Assim é possível mostrar a beleza dos fractais, como também suas principais características como a complexidade infinita, auto semelhança e sua lei de formação.

7. ANÁLISES E REFLEXÕES

De acordo com Marar in Derdik (2007), em Matemática, a representação gráfica ou o desenho, ganha destaque com Descartes, que criou uma ligação entre a linguagem algébrica e a geométrica. O desenho representa ideias que são descritas algebricamente e vice-versa e desta forma a representação gráfica se aproxima da linguagem matemática.

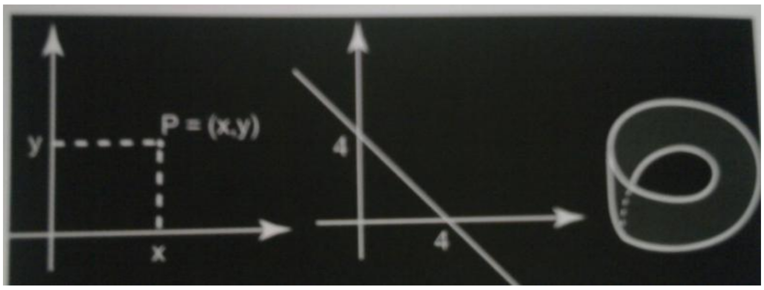

FIGURA 83 - GRÁFICOS
FONTE: Derdik (2010)

Assim, a primeira figura representa um par ordenado de coordenadas quaisquer. A segunda, a equação $x + y = 4$, ou seja, todos os pares ordenados cuja soma é quatro. O último já nos faz ir além do desenho, provando nossa imaginação, pois busca transferir para um desenho as ideias espaciais e imaginativos de um novo mundo, como o que está presente na Faixa de Möebius. Ao desenhar tentamos capturar sua essência.

Utilizamos a Representação Gráfica em Matemática para condensar o entendimento, pois suporta também a capacidade de generalização presente nos conceitos matemáticos. Marar in Derdik (2007) afirma que a sofisticação da gramática de Descartes tem se confirmado nos dias de hoje a respeito das ideias sobre o desenho e o será ainda mais com o advento da computação gráfica. E outros sistemas de coordenadas, mais gerais que os cartesianos, serão igualmente populares, e entre eles está as coordenadas de Gauss.

Isto nos remete à descoberta das Geometrias não Euclidianas, que se constituem numa nova visão de mundo. A Faixa de Möebius, criada em 1858 é um exemplo de superfície não orientada e que possui apenas um lado. É usada para representar a ideia de uma das Geometrias não Euclidianas e motivar a imaginação de representações que estas novas Geometrias podem ter.

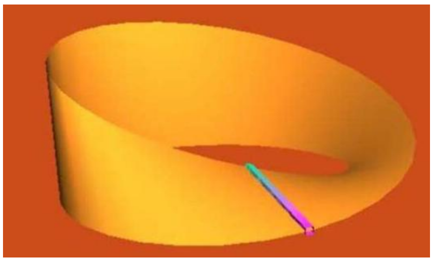

FIGURA 84 - FAIXA DE MOEBIUS
FONTE: Dia a dia Educação

Pois quando falamos em Geometria, já fazemos algumas associações mentais que nos remetam a este conteúdo. Imaginamos, segundo Bronowski (1998), as figuras que estão ligadas à Geometria, recriando o conhecimento que temos.

Antes de prosseguir, é importante que se tenha clara a distinção entre figura e imagem:

> Ao nos referirmos a uma entidade geométrica, como por exemplo, uma circunferência, diremos que se trata de uma figura. A figura possui as propriedades e características que a geometria lhe atribui. Nessas condições, a circunferência é uma curva unidimensional, com comprimento, mas sem espessura. O desenho da circunferência feito com o compasso no papel é uma imagem da circunferência. Por mais fina que seja a curva traçada pelo compasso, ela tem alguma espessura, caso contrário seria invisível (SERRA e KARAS, 1997, p. 5-6).

Assim sendo, poderemos usar como sinônimo de imagem a palavra representação.

De acordo com Garbi (2006) já estamos acostumados a fazer a representação de entes euclidianos sobre uma folha de papel, que consegue chegar próximo da nossa imaginação do que vem a ser o plano euclidiano. Quando queremos representar entes euclidianos como triângulos, círculos, retas, quadriláteros, os desenhos feitos no papel tendem a respeitar as dimensões das figuras da Geometria, embora saibamos que aquilo que está no papel simboliza estas ideias abstratas.

Se o que queremos representar é tridimensional, como esferas, cubos, pirâmides, fazemos representações bidimensionais sobre o papel destes entes espaciais. Porém, nestas representações são introduzidas distorções nos ângulos e distâncias, mas fomos acostumados com elas e quando vemos figuras tridimensionais no papel já fazemos a associação da ideia abstrata daquele ente geométrico espacial.

Entretanto, quando se trata das Geometrias não Euclidianas, as distorções são inevitáveis e não tão familiares. Um exemplo disto é a representação da reta, que pode ser desenhada como as retas euclidianas e em outros momentos são desenhadas como linhas curvas. Isto pode provocar um choque para quem inicia o estudo destas geometrias, pois já se tem um modelo que se associa na imaginação de que todas as retas são iguais.

Garbi (2006) afirma que as representações de entes da Geometria não Euclidiana sempre serão distorcidas e é necessário se acostumar com este fato. Garbi (2006) cita um exemplo:

> A descoberta de Beltrami segundo a qual um setor do horociclo pode ser representado isometricamente sobre a pseudoesfera significa apenas que uma figura idealizada pertencente àquele setor pode ser desenhada sobre a pseudoesfera preservando-se ângulos e distancias. Assim, um triangulo do plano hiperbólico terá seus lados representados por geodésicas sobre a pseudoesfera, mas tais geodésicas são meras representações que não podem ser confundidas com as retas hiperbólicas (GARBI, 2006, p. 260).

Segundo Kaleff (2004) muitos conceitos matemáticos que temos são formados por meio de nossa imaginação a partir de representações mentais, na forma de imagens e que estão relacionadas com o mundo físico que nos rodeia. Para que se possam transmitir estes conceitos a outras pessoas é preciso que sejam representados por símbolos, desenhos ou ícones, por exemplo. Além disso, essas representações visuais de noções matemáticas abstratas pode não estar visualmente perceptíveis com aquilo que se queira representar, como as letras que são utilizadas para expressar alguma ideia matemática.

É importante ressaltar que a interferência das imagens visuais perdurou por mais de dois milênios até a descoberta dos modelos das Geometrias não Euclidianas.

> Estes modelos foram os primeiros conjuntos de regras matemáticas passíveis de uma representação gráfica na forma de desenhos que não correspondiam ao esperado pela percepção visual e pelo senso comum. Desta forma, a importância de se trabalhar as Geometrias não Euclidianas até mesmo na escola e, principalmente no âmbito da licenciatura, reside no fato de se poder trazer o visualmente inesperado para a sala de aula. De se poder trazer desenhos relacionados a palavras habitualmente consideradas com outros significados, ou seja, de se unir aspectos geométricos aparentemente antagônicos quando apresentados em diferentes linguagens (KALEFF, 2004, p. 33).

De acordo com Kaleff (2004), existem vários exemplos de modelos de Geometrias não Euclidianas que admitem a observação de aspectos ligados tanto a concepção formalista quanto a imagística. A autora exemplifica que os desenhos de circunferências podem representar retas e “retas” que se encontram pode ser a representação de linhas paralelas. Isto pode ter uma aparência visual inesperada ou apresentam as distorções, conforme Garbi (2006) e citado anteriormente.

Kaleff (2004) alerta para que sejam repensadas as dificuldades relacionadas às representações euclidianas e desta forma, não prejudicar a representação de modelos não – euclidianos. E ainda que as concepções formalistas e imagísticas não são antagônicas, mas complementares objetivando levar o aluno para além das concepções geométricas fundamentais e isto também não quer dizer que não existirá mais dificuldades na formação e será preciso entender estas dificuldades, respeitá-las e encontrar mais caminhos para saná-las.

Em relação a isto, D’Amore (2007, p. 126) explica que:

> O estudante, no tempo, constrói um conceito e faz dele uma imagem (...); essa imagem pode ter sido validada e reforçada no decorrer do currículo escolar por provas, experiências repetidas, figuras, exercícios resolvidos e aceitos como corretos pelo professor. Mas pode acontecer que, mais cedo ou mais tarde, tal imagem se revele inadequada com relação a outra imagem inesperada do mesmo conceito, proposta, por exemplo, pelo professor ou por outros, contrastando com a imagem inicial que os estudante acreditava ser definitiva.

Como exemplo, observemos as figuras a seguir:

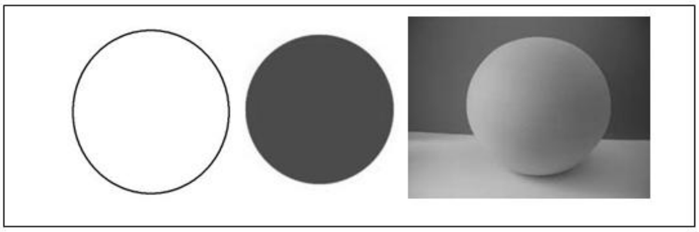

FIGURA 85 - DIFERENÇA ENTRE CIRCUNFERÊNCIA, CÍRCULO E ESFERA
FONTE: Autora (2011)

Se o professor não deixou clara a diferença entre os entes geométricos representados na figura 85, provavelmente haverá confusão para o aluno quando estiver iniciando o estudo das Geometrias não Euclidianas. Ora, se o aluno tinha como representação a primeira imagem como sendo a de um círculo e a segunda, como a representação de uma bola, certamente ficará difícil de perceber a terceira dimensão e trabalhar com a Geometria Esférica.

Segundo Kaleff (2004) isto indica a existência de uma lista de obstáculos cognitivos, especialmente àquelas expressadas na forma de expressões euclidianas, seja elas apresentadas na linguagem natural como na linguagem gráfica, como em desenhos, gráficos e diagramas (com características euclidianas). Assim, o uso de representações gráficas, habitualmente utilizadas para desenhar figuras euclidianas, influencia de maneira negativa a construção de novos conceitos.

Kaleff (2004) afirma que, vários projetos são realizados e discutidos, em especial na UFF, destinados a melhorar o ensino e aprendizagem da Geometria Escolar, os quais têm por objetivo dar ênfase ao desenvolvimento de habilidades iniciais à apropriação de conceitos euclidianos e não euclidianos.

Esta pesquisa buscou discutir as metodologias do ensino das Geometrias não Euclidianas no Ensino Médio, associando a Expressão Gráfica como participativa na interpretação e apropriação dos conceitos. Assim, identificamos a partir das Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná, quais as geometrias que deveriam ser ensinadas no Ensino Médio, explicando um pouco do histórico de cada uma, mostrando suas relações, bem como o que se tem feito a respeito do seu ensino nas escolas. Apresentamos atividades que possam ser aplicadas em conjunto com os conteúdos propostos no currículo de matemática, proporcionando sua inserção gradual.

O ensino das Geometrias não Euclidianas ainda não está concretizado nas escolas e com a preocupação do seu ensino, buscamos trabalhar a partir da Expressão Gráfica, para motivar o seu estudo, facilitar a sua compreensão e a visualização dos conceitos e propriedades das Geometrias consideradas neste trabalho.

Para as diversas metodologias pesquisadas, sempre há referência a alguma imagem para auxiliar na compreensão dos conceitos, seja como ilustração, explicação e/ou como solução.

Segundo Medina et al. (2011), a Expressão Gráfica utiliza diferentes tecnologias de representação, tornando-se um recurso didático no processo de ensino e aprendizagem. Neste trabalho, apresentamos diversas formas de Expressão Gráfica no ensino das Geometrias não Euclidianas, entre elas: fotografias, desenhos, modelos tridimensionais, imagens geradas por computador.

Nosso trabalho também está em relacionar estas imagens ao conteúdo, e assim Medina et al. (2011, p.2), alerta que:

> Vivemos hoje imersos em um mundo de imagens e para compreendê-lo melhor se faz necessário saber interpretar tais imagens, ou seja, realizar uma leitura crítica do que a imagem está transmitindo. Tão importante quanto à leitura de uma imagem é o processo de construção (ou de seleção) da imagem: o educador precisa saber como produzir (ou como selecionar) uma imagem e extrair dela toda a informação necessária à sua compreensão.

Este cuidado é muito importante no ensino das Geometrias não Euclidianas, pois por se tratar de um conteúdo que ainda não é totalmente ensinado nas escolas, tanto professores quanto alunos têm dificuldades de visualizar seus conceitos e propriedades e necessitam de uma representação para nos remeter à ideia do conteúdo, facilitar seu entendimento e até transmitir uma informação. De acordo com Medina et al (2011, p. 5), “as representações visíveis através do desenho exprimem e comunicam conhecimento, pois relacionam o saber e o significado de um determinado conceito.”

Como dito anteriormente, utilizamos as representações gráficas em Matemática para condensar o entendimento, pois suporta também a capacidade de generalização presente nos conceitos matemáticos. Isto acontece também com as Geometrias não Euclidianas, que se constituem numa nova visão de mundo. Necessitamos de modelos para representar a ideia das Geometrias não Euclidianas e motivar a imaginação de representações que estas novas Geometrias podem ter.

Desta forma, as primeiras metodologias apresentadas referem-se à Geometria Hiperbólica e se utilizam muito de ambientes informatizados, gerando um dos tipos de Representação Gráfica. E assim foram trabalhados os conceitos de retas paralelas e perpendiculares, ângulos, polígonos, que pertencem à Geometria Euclidiana. Desta forma, é possível ensinar os dois conteúdos simultaneamente, pois permite ao aluno realizar comparações entre as duas geometrias e fixar as propriedades decorrentes de cada uma.

Assim, o professor terá liberdade também de trabalhar com outras imagens, por exemplo, relacionadas às propriedades da Geometria Euclidiana, apresentando a representação do paralelogramo nesta Geometria e explorar suas propriedades.

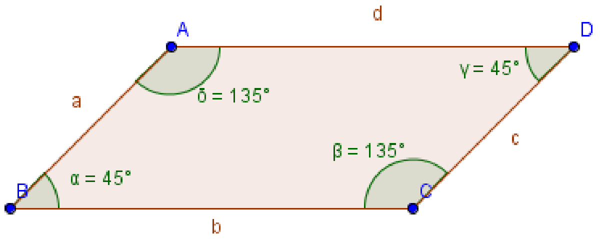

FIGURA 86 - PARALELOGRAMO
FONTE: Autora (2011)

Os alunos podem também fazer a construção deste paralelogramo e comparar com aquele usando a Geometria Hiperbólica, verificar seus ângulos e sua soma, seus lados, ponto médio, encontro das diagonais entre outros elementos. Como citamos ambientes informatizados para muitas das atividades em Geometria Hiperbólica, é possível usar o software GeoGebra, que é um software de Geometria e Álgebra livre e que já está instalado no laboratório de informática das escolas públicas do Paraná. A figura 86 foi construída utilizando este programa.

Como vimos também em Berro (2008), podemos relacionar a Geometria Hiperbólica com outros conteúdos matemáticos, como o Infinito e Progressão Geométrica, bem como fazer a conexão com a Arte por meio das obras de Escher. Desta forma, apresentamos mais um tipo de imagem, diferente das imagens computadorizadas, que pode contribuir para a motivação do estudo desta Geometria e despertar o interesse do aluno pela Arte.

FIGURA 87 - CÍRCULO LIMITE DE ESCHER
FONTE: Alencar (2010)

Segundo Alencar (2010), Poincaré criou um "mapa" que auxilia na visualização do plano hiperbólico. Esse mapa foi usado por Escher em algumas de suas gravuras, chamadas de Círculos Limites, de 1958.

O modelo de Poincaré, segundo a autora:

> é do tipo que os matemáticos chamam de "mapa conforme". Nesse tipo de mapa, os ângulos são mantidos invariantes pela transformação. Isto é, se duas "retas" do espaço hiperbólico se cruzam e formam um ângulo qualquer, as representações dessas duas retas no mapa também se cruzam formando o mesmo ângulo. (ALENCAR, 2010, p. 1).

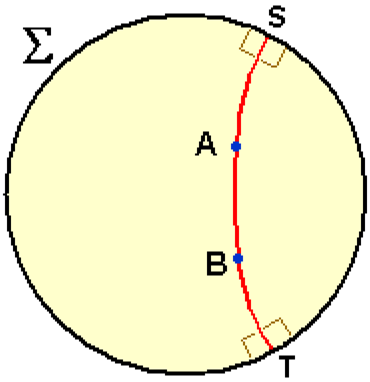

FIGURA 88 - RETA NO DISCO DE POINCARÉ
FONTE: Alencar (2010)

Por dois pontos quaisquer, A e B, passa uma única "reta". No disco S essa "reta" é um segmento de círculo cujas extremidades são perpendiculares à circunferência do disco nos pontos S e T. Esses pontos S e T apenas simbolizam algo que está infinitamente distante no plano hiperbólico. Portanto, a "reta" que passa por A e B e que, para nós, parece ser curta e limitada, é, na verdade, infinita dos dois lados. E é esta a ideia dos Círculos Limites de Escher, que podem ser explorados para trabalhar com estes conceitos.

Para o ensino da Geometria Elíptica, foram utilizadas as imagens que, em sua maioria são fotografias de modelos tridimensionais que transmitem a ideia das propriedades que são trabalhadas. Percebemos a criação de vários modelos tridimensionais concretos para ilustrar os conceitos iniciais da Geometria Elíptica e sua associação direta com a Geografia, que fornece muitos elementos para o entendimento desta Geometria e estão relacionados com conhecimentos prévios que os alunos já trazem.

Podemos, assim, abordar os conteúdos de Geografia como: latitude, longitude, pólos, paralelos terrestres, meridianos, equador, relacionados com os conteúdos matemáticos, como trigonometria, geometria plana e espacial.

Segundo Franco e Thomas (2011), estas atividades permitiram que houvesse uma ampliação na visão de mundo na compreensão e descrição de representações geométricas e geográficas. Desta forma, o uso de representações gráficas contribuiu para a visualização dos conceitos envolvidos, facilitando seu entendimento.

Para se introduzir este conteúdo na sala de aula, podemos fazer a conexão com a Literatura, por exemplo, a partir do poema "A velha dama", citado anteriormente e fazer com que os alunos usem sua imaginação, fazendo suas próprias conexões, seus modelos mentais antes do professor direcionar para o conteúdo a ser trabalhado. O professor pode explorar também recordações que os alunos têm de sua própria infância, como filmes e desenhos que assistiram e estão relacionados com conceitos que serão abordados, como o espaço em que vivemos. A figura a seguir pode ilustrar esta ideia:

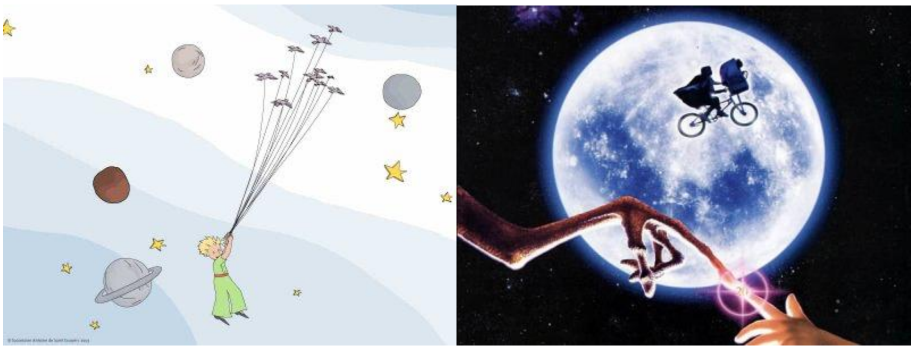

FIGURA 89 - DESENHO PEQUENO PRÍNCIPE E FILME ET

Um dos versos do poema pode ser a ligação para se abordar a Geometria Esférica: "confiante, não tem limite na sua esfera". Esta metáfora tem como base a Matemática, onde a superfície pode ser ilimitada e a sua extensão é finita. E assim, outras imagens podem ser apresentadas para ajudar na visualização dos conceitos:

FIGURA 90 - REPRESENTAÇÃO DE DIFERENTES CAMINHOS NA SUPERFÍCIE DA TERRA
FONTE: Autora (2011)

Este pode ser um ponto de partida para compreender esta Geometria. Ela está ligada a forma do nosso planeta, e assim pode-se usar a imaginação para fazer a introdução deste assunto por meio de ideias que nos são mais familiares e podem ajudar a visualizar como o Universo é imenso e que a Geometria de Euclides não basta para explicá-la.

Em relação à Geometria Projetiva, Franco e Watermann (2009, p. 3) afirmam que "a Geometria Projetiva fornece a indispensável base teórica para o entendimento da perspectiva utilizada pelos renascentistas". Reis e Trovon (2010) confirmam que foi a partir do Renascimento que os artistas passaram a ter a preocupação com os registros das formas humanas e da natureza, como eram realmente vistas.

Tendo esta relação com o Renascimento, é possível ensinar Geometria Projetiva por meio das obras deste período, fazendo assim uma conexão com a Arte. As últimas atividades fizeram esta exploração, enquanto que as primeiras trabalharam focando as propriedades desta Geometria, permitindo que se faça a comparação com a Geometria Euclidiana e perceber que uma Geometria não exclui a outra, mas que ambas se completam, pois há propriedades da Geometria tradicional que são necessárias para entender a outra. Assim, os seguintes conteúdos foram abordados: perspectiva, linha do horizonte, pontos de fuga, paralelismo, ângulos, entre outros da Geometria Plana.

Percebemos também a importância do uso da representação gráfica para fazer esta percepção, para o estudo das propriedades, bem como para fazer a conexão com a Arte, sugerida por vários autores, pois auxilia na compreensão e apreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, permitindo ao aluno criar modelos mentais condizentes com a realidade, inclusive fixando melhor os conceitos da Geometria de Euclides.

Outras atividades que podem ser exploradas e se utilizam de imagens são atividades de campo, onde os alunos podem sair dos portões da escola e tirar fotografias. A partir delas iniciar o estudo dos conceitos da Geometria Projetiva. Como exemplo, temos a imagem a seguir:

FIGURA 91 - LINHAS DE FUGA
FONTE: Autora (2011)

Sobre os fractais, além das imagens apresentadas anteriormente, as propriedades podem ser trabalhadas a partir de fenômenos naturais, assim como objetos da natureza para exemplificar algumas de suas propriedades. Levar uma couve-flor para uma aula de Matemática pode instigar os alunos a procurar saber o que isto tem a ver com o conteúdo.

FIGURA 92 - COUVE - FLOR
FONTE: Dia a Dia Educação

Muitas figuras fractais são geradas por computador, chamados de fractais aleatórios, como vimos anteriormente. Porém, existem outros, os chamados fractais geométricos que são construídos a partir de propriedades da Geometria Euclidiana e que podemos usar régua e compasso para sua construção.

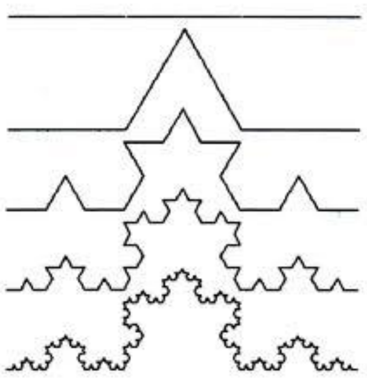

FIGURA 93 - CURVA DE KOCH
Fonte: Murr (2007)

Os fractais podem ser trabalhados juntamente com o conteúdo de Sequências, Progressões Geométricas, Triângulo de Pascal e Logaritmos. Além de explorar os conceitos de Geometria Plana, com as construções com régua e compasso.

Outras alternativas são os fractais tridimensionais, como o Triminó, já mostrado. Com objetos concretos, os alunos podem criar seus fractais.

Segundo Medina et al. (2011, p. 7),

> A linguagem gráfica se manifesta através de diferentes categorias de imagens: fotografias, desenhos, esquemas, gráficos, tirinhas entre outras. A compreensão da informação contida em uma imagem depende do observador, pois ele traz consigo um determinado conhecimento sobre o conteúdo, que depende de toda sua trajetória e de sua cultura. Esta compreensão se produz quando interpretamos as relações contidas nas representações externas com as representações internas.

Desta forma, as atividades apresentadas levam em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e isto pode ser percebido pelas conexões que são citadas durante este trabalho. Procuramos mostrar como a abordagem do conteúdo Geometrias não Euclidianas pode ser feito levando este fato em consideração, ao mesmo tempo que exploramos o uso da representação gráfica para facilitar o estudo, o interesse e a compreensão deste conteúdo.

A escolha de alguma forma de representação gráfica para transmitir o conhecimento acerca destas Geometrias é essencial, já que quando se trata das Geometrias não Euclidianas, as distorções são inevitáveis e não tão familiares. Um exemplo disto é a representação da reta, que na Geometria Euclidiana pode ser desenhada como uma linha reta e nas Geometrias Elíptica ou Hiperbólica é desenhada como linha curva.

Para que isso fosse possível, partimos de um estudo da Geometria de Euclides, já que o termo “não euclidianas” foi criado pelo fato desta Geometria contrariar um dos postulados euclidianos. Justificando nosso trabalho pela proposta de inserção das Geometrias não Euclidianas feita pelas Diretrizes Curriculares da Educação Básica para a disciplina de Matemática, identificamos quais são as Geometrias consideradas não Euclidianas por este documento, apresentamos um breve histórico de cada uma, fizemos um estudo sobre Expressão Gráfica e sua importância para o estudo destas Geometrias, discutindo metodologias de ensino, argumentando como e por que é possível sua inserção nas aulas de Matemática.

Nesta pesquisa propomos também que a inserção das Geometrias não Euclidianas ocorra paralelamente a outros conteúdos, pois muitos professores manifestam que a carga horária da disciplina de Matemática está muito reduzida, especialmente no Ensino Médio. Apontamos formas de introduzir estes conceitos, relacionando a outros conteúdos matemáticos, promovendo assim as conexões necessárias para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

A antiga biblioteca de Alexandria. Disponível em http://dgdalmeida.blogspot.com/2009/06/antiga-biblioteca-de-alexandria-ideia.html. Acesso dia 21/04/2011.

ALENCAR, M.E.G. **O disco de Poincaré e as gravuras de Escher**. Disponível em <http://www.searadaciencia.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica6.htm>. Acesso dia 12/09/2010.

ANDRADE, M.L.T.D. **Geometria Esférica: uma sequencia didática para a aprendizagem de conceitos elementares no ensino Básico.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2011. Disponível em < http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/maria_lucia_torelli.pdf> Acesso dia 24/06/2011.

ANDRADE, P. F. A. **De Euclides a Poincaré**. Disponível em <http://www.mat.ufc.br/gmat/livros/euclides.pdf>. Acesso 09/11/2010.

ARSIE, K.C. **Dimensão espacial**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2007. Disponível em < http://people.ufpr.br/ewkaras/ic/ karla08.pdf>. Acesso dia 02/11/2010.

ÁVILA, G. **Euclides, geometria e fundamentos**. Revista do Professor de Matemática, SBM, São Paulo, nº 45, p. 1-9, 2001.

AVILA, G. **Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura em geral.** São Paulo: Blucher, 2010.

AUFFINGER, A.C.T.C.; VALENTIM, F. J. S**. Introdução à Geometria Projetiva. 2003.** Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2003. Disponível em: <http://virtual.lncc.br/~rodrigo/cursos/CG/01_Apostilas/outros/geometria_projetiva_ufes.pdf>. Acesso em 11/09/2010.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal - para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BARCO, L. **Programa Arte e Matemática**. TV Cultura, 2001. Disponível em < http://www2.tvcultura.com.br/artematematica/home.html>. Acesso dia 10/12/2011.

BERLINGHOFF, W. P.;GOUVEA, F. Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas.** Trad. Elza Gomide e Helena castro. São Paulo: Blucher, 2010.

BERRO, R. T. **Relações entre Arte e Matemática: um estudo da obra de Mauritus Cornelis Escher.** Dissertação de Mestrado. Itatiba: Universidade de São Francisco, 2008.

BEVERIDGE, W. I. B. **Sementes da descoberta científica.** São Paulo: Edusp (tradução), 1980.

BRONOWSKI, J. **O olho visionário**. Brasília: UnB, 1998.

CABARITI, E. **Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC/SP, 2004.

CAMARGO, K. C. A. **Geometria fractal: possibilidades para o Ensino Médio.** Monografia. Curitiba: Editora da UFPR, 2008.

CARVALHO, H.C. **Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades para o ensino de matemática.** Dissertação de Mestrado. Belém: NPADC-UFPa, 2005.

CHALMERS, A. **O que é ciência, afinal?** Trad. Raul Fiker. São Paulo: Brasiliense, 1993.

COUTINHO, L. **Convite às Geometrias Não-Euclidianas.** Rio de Janeiro: 2 ed. Interciência, 2001.

COURANT, R; ROBBINS, H. **Que é Matemática?** São Paulo: Editora Ciencia Moderna, 2000.

DELAI, S; FRANCO, V.S. **Geometrias não Euclidianas**. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/236-4.pdf>. Acesso dia 09/11/2010

DANTE, L.R. **Matemática Volume Único.** São Paulo: Editora Ática, 2008.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática.** Tradução Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DERDYK, E. (Org). **Disegno, desenho, desígnio.** São Paulo: Editora Senac, 2007.

DERDYK, E. **Formas de pensar o desenho: desenvolvimento do grafismo infantil.** Porto Alegre: Zouk Editora: 2010.

EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual: 1992.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora UnicamP, 2004.

FAGUNDES, H.V. **Modelos Cosmológicos e a Aceleração do Universo.** Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista. Disponivel em <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172002000200 022&script= sci _arttext>. Acesso dia 08/03/2011.

FOGAÇA, M. **Imagens mentais e compreensão de conceitos científicos.** Disponível em <http://www.nilsonmachado.net/lca11.pdf>. Acesso dia 03/04/2011. 2006.

FRANÇA, L. **Imagens e números: interseções entre as histórias da arte e da matemática**. São Cristóvão: Editora UFS, Aracaju: Fundação Oviedo Teixeira, 2008.

FRANCO, V. S. **Curso de Geometria não-euclidiana.** Maringá, PR: 2008. 1 CD-ROM.

FRANCO, V. S.; WATERMANN, I. **Geometria Projetiva no Laboratório de ensino de Matemática.** 2009. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2192-.pdf?HPSESSID=2010012508181580>. Acesso em 11-09-2010.

FRANCO, V. S.; DELAI, S. **Geometrias não Euclidianas**. 2010. Disponível em < http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_sidinei_delai.pdf>. Acesso em 08/02/2011.

FRANCO, V. S.; RISSI, M. R**. Topologia: uma proposta metodológica para o ensino fundamental**. 2008. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2210-8.pdf>. Acesso dia 25/01/2011.

FRANCO, V.S.; THOMAS, M.L. **Geometria não euclidiana/Geometria Esférica**. 2011. Disponível em < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/233-4.pdf >. Acesso dia 25/01/2011.

FRANCO, V.S; VEJAN, M. P. **Geometria não euclidiana / geometria dos fractais**. Disponível em < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2207-8.pdf>. Acesso dia 08/02/2011.

GARBI, G.G. **A Rainha das Ciências, Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

GOUVEA, F. R. **Que contribuições pode trazer para o ensino – aprendizagem de Geometria um estudo de Fractais Geométricos através de caleidoscópios e softwares de Geometria Dinâmica?** Dissertação de Mestrado. São Paulo: UNESP, 2005.

GOUVEA, F.R. **Uma abordagem de Ensino – aprendizagem da Geometria Esférica através do computador.** Artigo. Centro Universitário Paulistano – Unipaulista, São Paulo, 2006.

HEMENWAY, P. **O código secreto: a fórmula misteriosa que governa a arte, a natureza e a ciência.** Evergreen, 2010.

JUVENIL, A. **Elementos da Perspectiva.** Disponível em <www.sobrearte.com.br/projetiva/elementos_da_perspectiva.php>. Acesso em 20/02/2012.

KALEFF, A. M. **Sobre o Poder de Algumas Palavras e Imagens Quando se Busca Avançar Além das Noções Euclidianas Mais Comuns**. Boletim GEPEM 45. Rio de Janeiro, 26-42, 2004.

KALEFF, A.M.; ROBAINA, D.T.; NASCIMENTO, R.S. **Geometrias não-Euclidianas: do caminhar nas cidades ao funcionamento do GPS.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IX., 2009, Belo Horizonte. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/minicursos.html>. Acesso em 02/12/2011.

KODAMA, Y. **O estudo da Perspectiva Cavaleira.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUCSP, 2006.

LANCON, D. Jr. **An Introduction to the Works of Euclid with na Emphasis on the Elements.** Math & science, 11-33, 2003. Disponível em <htpp://www.obkb.com/dcljr/euclid.html>. Acesso em 23/05/2011.

LEVY, P. **Ideografia dinâmica: para uma imaginação artificial?** Trad. Manuela Guimarães. Lisboa: Instituo Piaget, 1997.

LOVIS, K. A. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores.** Dissertação de Mestrado. Maringá: UEM, 2009.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática, as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente.** São Paulo: Cortez, 2000.

MEDINA, S.S.S.; LIBLIK, A.M.P.; MEDEIROS, Z. F. Imagens no Ensino de Matemática. In: **Actas del 3er Congreso Uruguayo de Educación Matemática**. Montevideo: Semur, 2011

MEDINA, S.S.S.; ARIAS, P.; ARMESTO, J**. Imagens tridimensionais no processo de ensino-aprendizagem.** In Anais do II Congreso Internacional de Docência Universitária. Vigo: Andavira Editora, 2011.

MLODINOW, L. **A janela de Euclides. 2. ed.** São Paulo**:** Geração Editorial, 2004.

MOREIRA, M.A. **A área de Ensino de Ciências e Matemática na CAPES: Panorama 2001/2002 e critérios de qualidade**. Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências, Artigos de Ensino, Porto Alegre, n°1, vol 2, p. 36-59, 2002.

MOREIRA, M.A. **Modelos Mentais.** Investigações em Ensino de Ciências, Porto Alegre, v. 1, n. 3, pp. 193-232, 1996. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/modelosmentaisport.pdf>. Acesso dia 03/05/2011.

MURR, C. et al.: **Fractais: propriedades e construções**. Prodocência – UFPR: Curitiba, 2007.

NARDI, R. **Documento de Área 2009.** Disponível em www.capes.gov.br/images/stories/dowload/avaliacao/ENSINO_CM_21dez09.pdf. Acesso dia 10/04/2011.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática Pura - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006. Disponível em <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Acesso em: 19 de agosto de 2010

OLIVA, W. M. **A independência do axioma das paralelas e as Geometrias não-Euclidianas**. Revista do Professor de Matemática, SBM, São Paulo, nº 2, p. 28-31, 1983.

O sistema solar – astronomia planetária. Disponível em <http://www.pgie.ufrgs.br/portalead/oei/solar/solar.htm>. Acesso em 29/10/2010.

PARANÁ. Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática. Curitiba: SEED, 2008.

PATAKI, I. **Geometria Esférica para formação de professores: uma proposta interdisciplinar**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUCSP, 2003.

PERALEZ, F. J. **Uso (y abuso) de la imagem em la enseñanza de las ciencias.** Enseñanza de las Ciencias, Granada, nº24 (1), p. 13-30, 2006.

REIS, A. **Geometria Hiperbólica: uma abordagem geral.** Disponível em <http://www.scribd.com/doc/39963656/GeometriaS>. Acesso dia 02-12-2010.

REIS, L., TROVON, A. **Aplicando a Matemática.** São Paulo: Casa Publicadora Brasileira, 2010. PNLD.

ROCHA, M. V. **Uma proposta de ensino para o estudo da geometria hiperbólica em ambiente de geometria dinâmica.** Dissertação de mestrado. São Paulo: PUCSP, 2009.

SALLUM, É. M. **Fractais no ensino médio.** Revista do Professor de Matemática, SBM, São Paulo, nº 57, p. 1-8, maio/ago. 2005.

SANDRONI, L; MACHADO, L. R. **A criança e o livro**. São Paulo: Ática, 1987.

SANTOS, W. **Geometria I**. Disponível em < www.im.ufrj.br/~walcy/GEOMETRIA_I.ppt> Acesso dia 21/04/2011.

SERRA, C. Penteado; KARAS, E. W. **Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos**. Curitiba: Champagnat, 1997.

SLOMPO, P.F. **A teoria da Gestalt**. Disponível em <http://www.chasqueweb.ufrgs.br/~slomp/gestalt/gestalt-poligrafo.pdf>. Acesso dia 30/11/2010.

STRUIK, Dirk. **História Concisa das Matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1992.

TENORIO, R. M. (org). **Aprendendo pelas raízes: alguns caminhos da matemática na história.** Salvador: Centro Editorial e didático da UFB, 1995.

VOGT, C. (org). **Cultura Cientifica, Desafios.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo: Fapesp, 2006.