

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
 DEPARTAMENTO DE EXPRESSÃO GRÁFICA  
 DISCIPLINA: Geometria Descritiva I  
 CURSO: Engenharia Química  
 AUTORES: Luzia Vidal de Souza  
 Deise Maria Bertholdi Costa  
 Paulo Henrique Siqueira

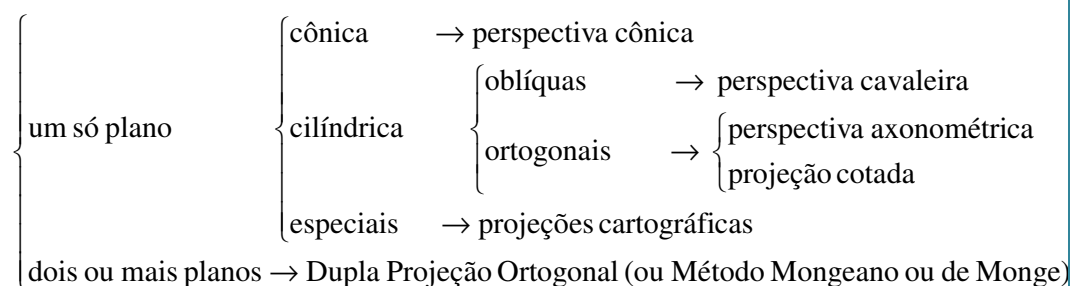
### INTRODUÇÃO - GEOMETRIA DESCRITIVA

A Geometria Descritiva é utilizada para representar os objetos do espaço tridimensional no espaço bidimensional, mediante a utilização de projeções e resolver os problemas relativos a esses objetos através da Geometria Plana e do Desenho Geométrico.

#### MÉTODOS DE REPRESENTAÇÃO

- Dupla Projeção Ortogonal ou Geometria Descritiva (Monge)
- Projeção Cotada (Büache)
- Projeção Central (Cousinery)
- Projeção Axonométrica (Polke)

#### PROJEÇÕES



GEOMETRIA DESCRITIVA

## SISTEMAS DE PROJEÇÃO

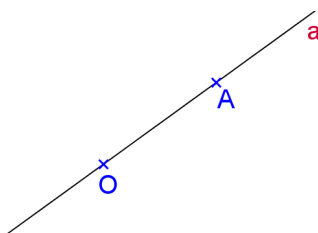
---

### 1. Operações fundamentais no desenho projetivo

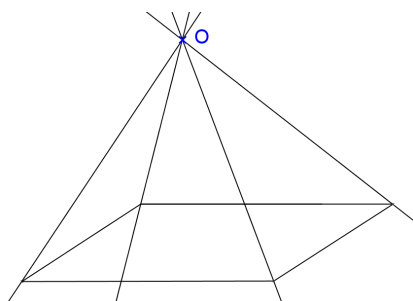
As operações fundamentais no desenho projetivo são Projetar e Cortar.

#### Conceito de projetar

- a) Projetar um ponto A a partir de um outro ponto O, distinto de A, significa determinar a reta pertencente aos dois pontos. A reta OA é denominada projetante do ponto A, e o ponto O é denominado de centro de projeção.



- b) Projetar um objeto a partir de um ponto significa determinar as projetantes de todos os pontos desse objeto. Quando se quer projetar um sólido, normalmente são projetados somente os elementos necessários e suficientes que o determinam.

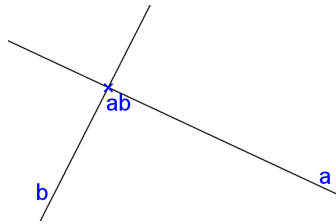


*Realidade Virtual:* [paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/](http://paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/)

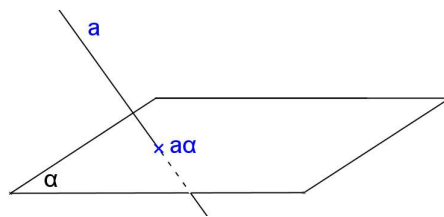
*Realidade Aumentada:* [paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/ra.html](http://paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/ra.html)

**Conceito de cortar**

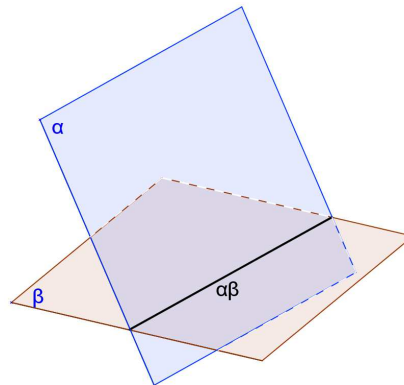
a) Cortar uma reta  $a$  por outra  $b$ , significa obter o ponto  $(ab)$  comum às duas retas. O ponto considerado pode ser próprio ou impróprio, conforme as retas sejam concorrentes ou paralelas.



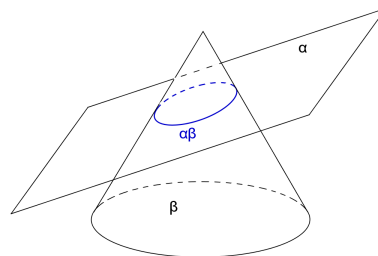
b) Cortar um plano  $\alpha$  por uma reta  $a$ , ou uma reta  $r$  por um plano  $\alpha$ , significa obter o ponto  $r^\alpha$  comum à reta e ao plano.



c) Cortar um plano  $\alpha$  outro  $\beta$  significa encontrar a reta  $\alpha\beta$  comum a ambos os planos.



d) Cortar um objeto por um plano significa encontrar a seção plana produzida por este plano no sólido considerado.



Observação: o ponto ou a reta ou a curva quando determinados por cortes chamam-se traços.

### Conceito de projeção cônica (ou central)

Considere um plano  $\pi'$  e um ponto fixo  $O$  não pertencente ao plano considerado. Denomina-se projeção central ou cônica, no plano  $\pi'$ , de um ponto  $A$ , distinto de  $O$ , ao traço  $A'$ , produzido sobre o plano, pela reta projetante do ponto  $A$ .

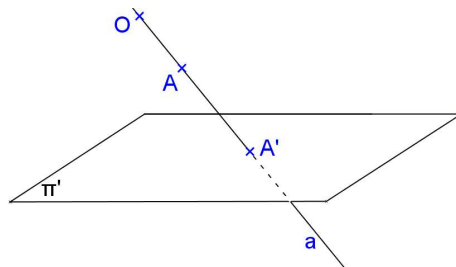


FIGURA 7 – PROJEÇÃO CÔNICA DO PONTO A

O plano  $\pi'$  é denominado plano de projeção e o ponto  $O$  é denominado centro, polo ou vértice de projeção.

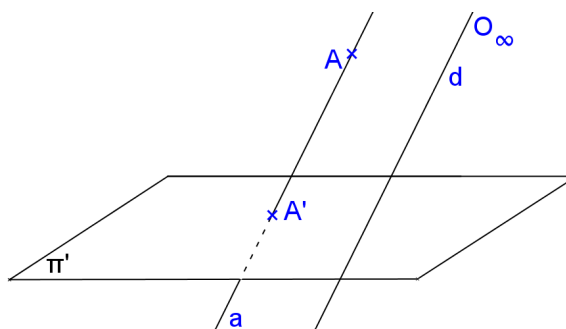
A projeção central ou cônica é também denominada perspectiva cônica, ou perspectiva linear exata do ponto  $A$ .

#### Observações:

- Plano de projeção  $\neq$  plano projetante.
- O sistema é chamado de projeção cônica, pois as projetantes descrevem uma superfície cônica.

### Conceito de projeção cilíndrica (oblíqua ou ortogonal)

Denomina-se projeção cilíndrica de um ponto  $A$ , no plano  $\pi'$  a partir de  $O_\infty$ , ao traço  $A'$  produzido sobre  $\pi'$ , pela reta projetante do ponto  $A$ .



Observações: Dado o ponto  $A$ ,  $A'$  é único, porém dado somente  $A'$  sabe-se que o ponto  $A$  pertence à reta projetante;

- O sistema é denominado projeção cilíndrica, pois as projetantes descrevem uma superfície cilíndrica;
- Os pontos do plano de projeção coincidem com suas projeções;
- Se a direção das projetantes for oblíqua ao plano de projeções tem-se o sistema de projeção Cilíndrica Oblíqua;
- Se a direção das projetantes for perpendicular ao plano de projeções tem-se o Sistema de Projeção Cilíndrica Ortogonal.

## 2. Propriedades das projeções cilíndricas (oblíquas ou ortogonais)

Propriedade 1: A projeção cilíndrica de uma reta não paralela à direção das projetantes é uma reta (Figura A). A projeção cilíndrica de uma reta paralela à direção das projetantes é um ponto (Figura B).

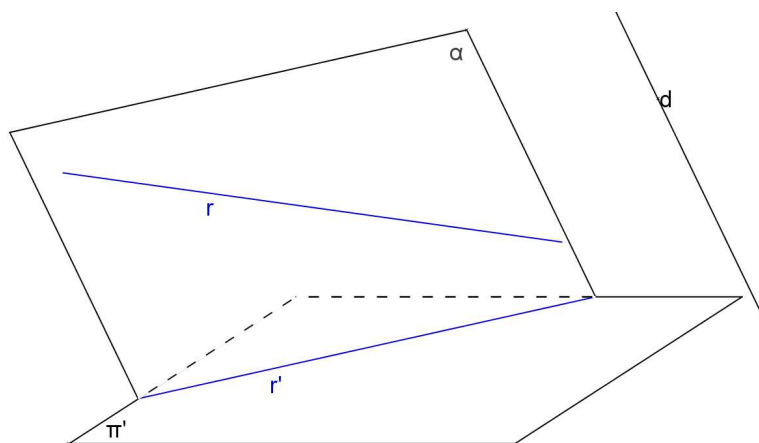


FIGURA A – PROJEÇÃO CILÍNDRICA DA RETA  $r$

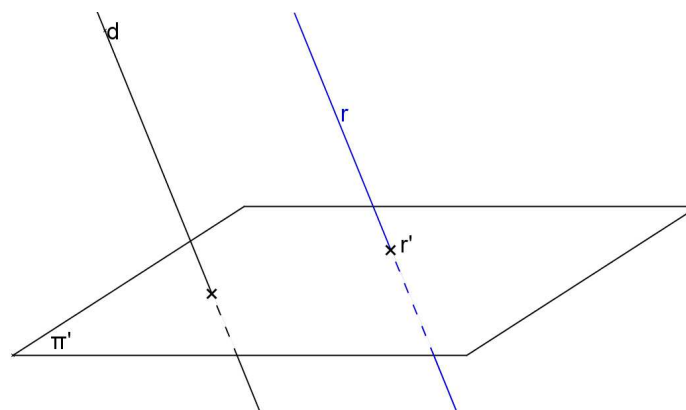


FIGURA B – PROJEÇÃO CILÍNDRICA DA RETA  $r$

**Observações:**

- a) Se a projeção cilíndrica de uma reta é uma reta, então a reta objetiva não é paralela a direção das projetantes;
- b) Se a projeção cilíndrica de uma reta é um ponto, então a reta é paralela à direção das projetantes;
- c) Se uma reta é perpendicular ao plano de projeção, sua projeção cilíndrica-ortogonal sobre o mesmo será o seu traço no plano de projeção considerado. Reciprocamente, se a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano reduzir-se a um ponto, então a reta será perpendicular ao plano de projeção, ou o que é equivalente, a reta será paralela à direção das projetantes.
- d) Uma reta  $r$ , não paralela à direção das projetantes, e sua projeção cilíndrica  $r'$  são coplanares; logo, pode ocorrer entre a reta e sua projeção uma das seguintes condições:
  - $r$  e  $r'$  são concorrentes, neste caso a reta corta o plano de projeção (Figura 9);
  - $r$  e  $r'$  são paralelas, neste caso a reta será paralela ao plano de projeção;
  - $r$  e  $r'$  são coincidentes, neste caso a reta estará contida no plano de projeção.

**Propriedade 2:** Se duas retas  $r$  e  $s$  são paralelas, então as suas projeções cilíndricas ou são paralelas (Figura A), ou são coincidentes (Figura B) ou são pontuais (Figura C).

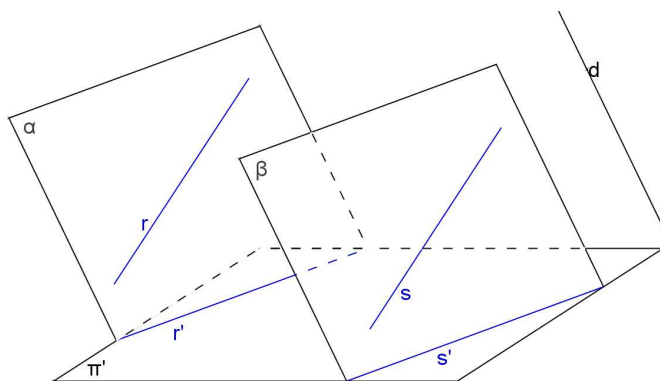


FIGURA A – PROJEÇÕES PARALELAS

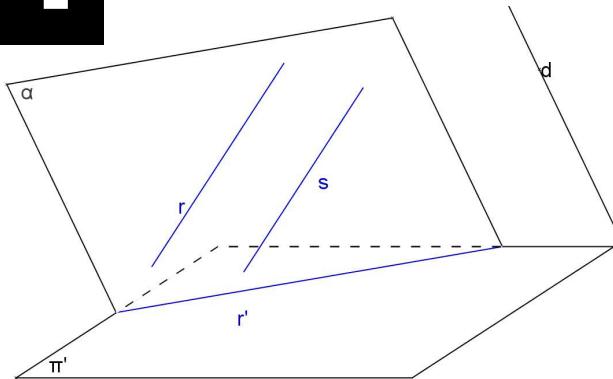


FIGURA B – PROJEÇÕES COINCIDENTES

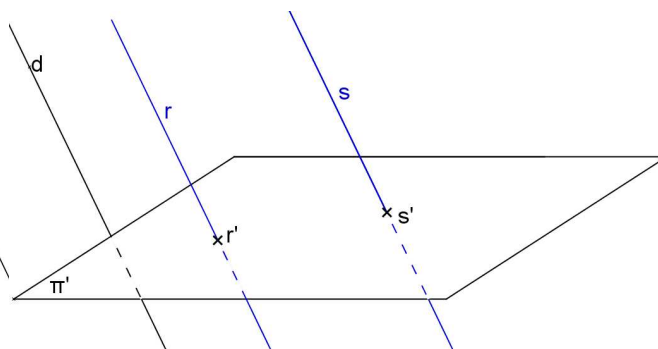


FIGURA C – PROJEÇÕES PONTUAIS

**Observação:** A recíproca da propriedade 2 não é verdadeira (Figura D). Ou seja, se  $t'//s'$  não implica que  $t//s$ .

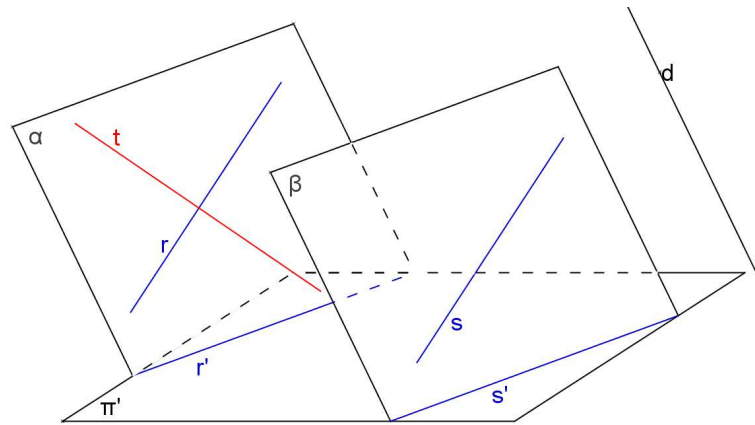
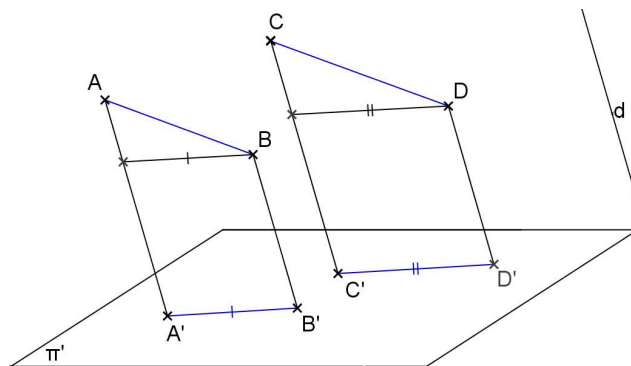


FIGURA D – CONTRA EXEMPLO DA RECÍPROCA DA PROPRIEDADE 2

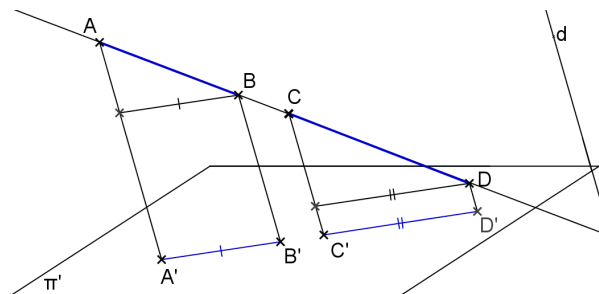
**Propriedade 3:** Se dois segmentos são paralelos ou são colineares, então a razão entre eles no espaço conserva-se na projeção cilíndrica, desde que a direção dos segmentos não seja paralela à direção das projetantes (Figura 15).

$$\text{Se } \begin{cases} \overline{AB} // \overline{CD} \\ \text{ou} \\ \text{colineares} \end{cases} \text{ e não paralelos a } d \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

a)  $AB//CD$

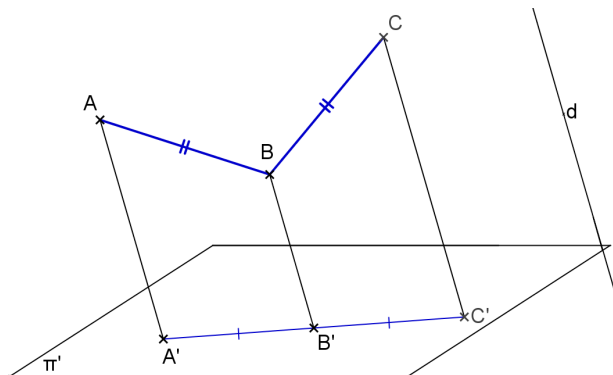


b)  $AB$  e  $CD$  colineares

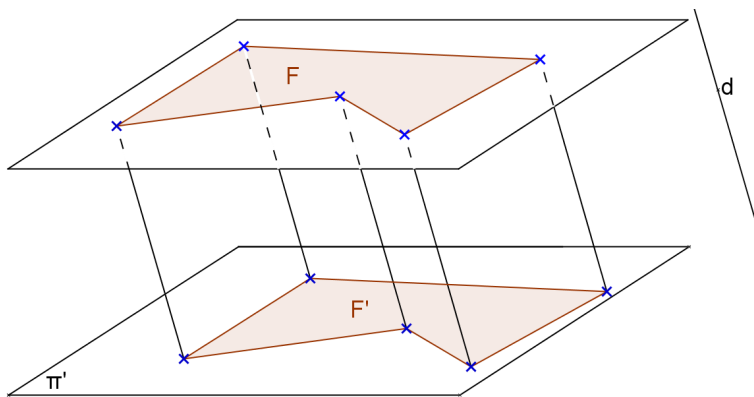


Consequência: Se M é ponto médio do segmento AB então M' é ponto médio da projeção do segmento AB (A'B').

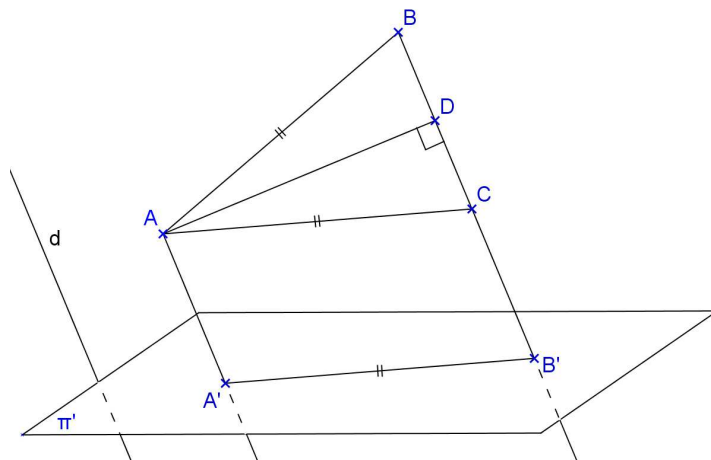
Observação: A recíproca não é verdadeira. Ou seja, se  $AB/CD=A'B'/C'D'$  não implica que  $AB//CD$  ou colineares.



Propriedade 4: Se uma figura está contida num plano paralelo ao plano de projeção, então essa figura será congruente à sua projeção cilíndrica, isto é, a projeção cilíndrica desta figura está em verdadeira grandeza (V.G.).

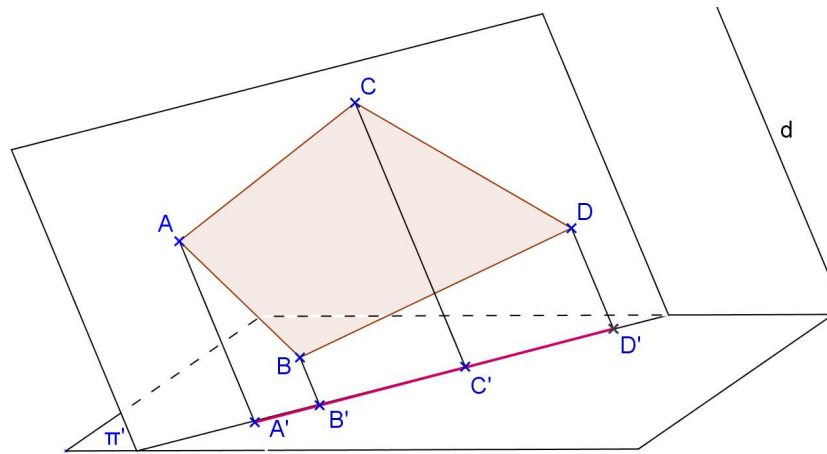


Observação: A recíproca não é verdadeira em projeção oblíqua, porém é verdadeira em projeção ortogonal.





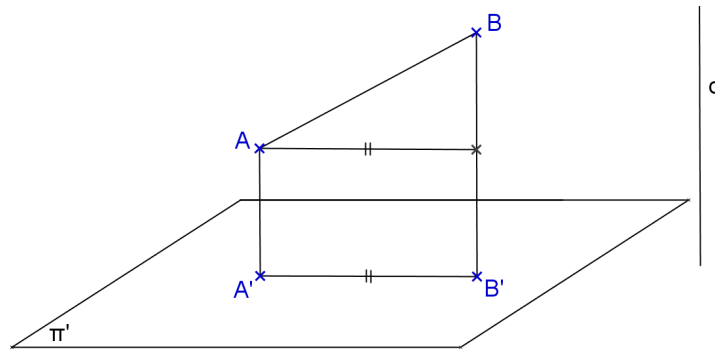
Propriedade 5: Qualquer figura contida num plano paralelo a direção das projetantes tem para projeção um segmento que está contido no traço do plano dessa figura sobre o plano de projeção.



Observação: A recíproca da Propriedade 5 é verdadeira.

### 3. Propriedades das projeções cilíndricas ortogonais

Propriedade 6: Se um segmento é oblíquo ao plano de projeção  $\pi'$ , então sua projeção ortogonal é menor que a sua verdadeira grandeza.



Observação: A recíproca da Propriedade 6 é verdadeira.

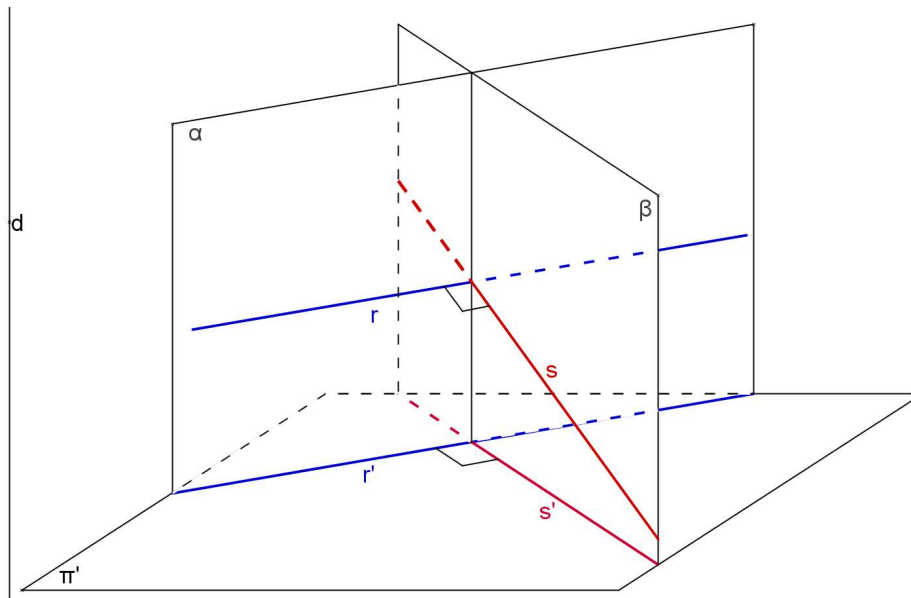
Propriedade 7: Se duas retas são perpendiculares ou ortogonais entre si, sendo uma delas paralela ou pertencente ao plano de projeção e a outra não perpendicular a esse plano, então as projeções ortogonais dessas retas são perpendiculares entre si (Figura 22).

Resumindo:

$$r \perp s \text{ ou } r \perp s' \quad (1)$$

$$\text{Se } r // \pi' \text{ ou } r \subset \pi' \quad (2) \Rightarrow r' \perp s' \quad (4)$$

$$s \perp \pi' \quad (3)$$



Observação: As recíprocas da propriedade 7 são verdadeiras. São elas:

$$\text{Recíproca 1: } (2) + (3) + (4) \Rightarrow (1)$$

$$\text{Recíproca 2: } (1) + (4) \Rightarrow (2) + (3)$$

**Exercícios**

Considere um sistema de projeção cilíndrica com somente um plano de projeção  $\pi'$ . Escrever ao lado de cada exercício as propriedades geométricas e as propriedades das projeções cilíndricas utilizadas.

1. Representar o ponto médio M do segmento dado AB.

a)

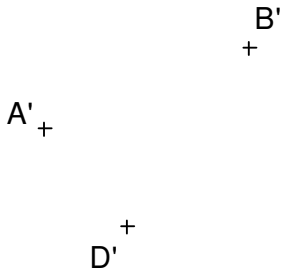


b)

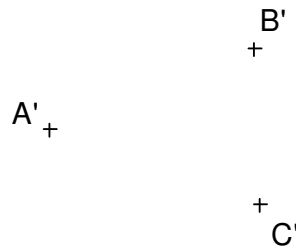


2. Representar o paralelogramo ABCD sendo dados os três vértices.

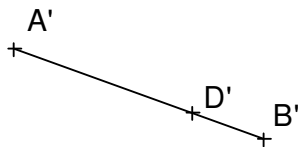
a)



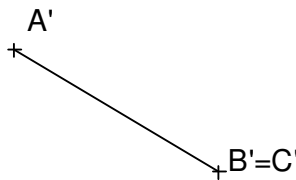
b)



c)

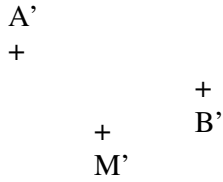


d)

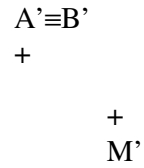


3. Representar o paralelogramo ABCD sendo dados os pontos A e B e o ponto M de interseção das diagonais.

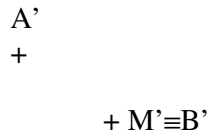
a)



b)

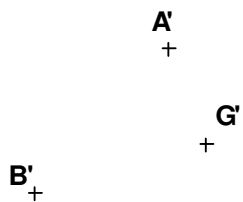


c)

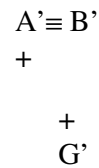


4. Representar o triângulo ABC sendo dados os vértices A e B e o baricentro G.

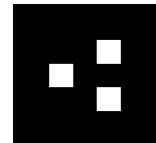
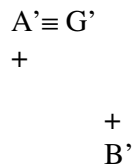
a)



b)

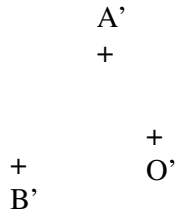


c)

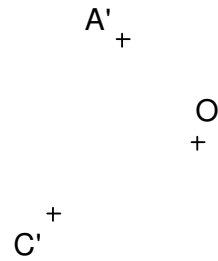


5. Representar o hexágono regular ABCDEF sendo dados dois vértices e o centro O da circunferência circunscrita.

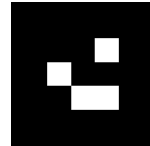
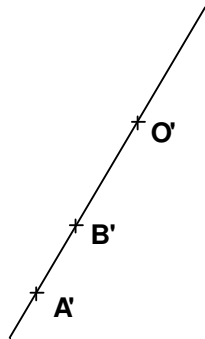
a)



b)

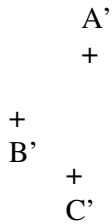


c)

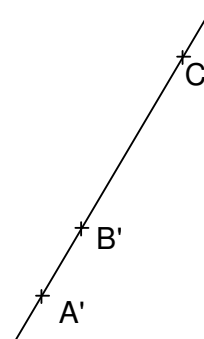


6. Representar o hexágono regular ABCDEF sendo dados A, B e C

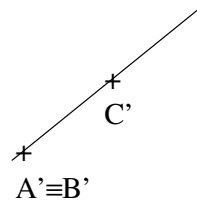
a)



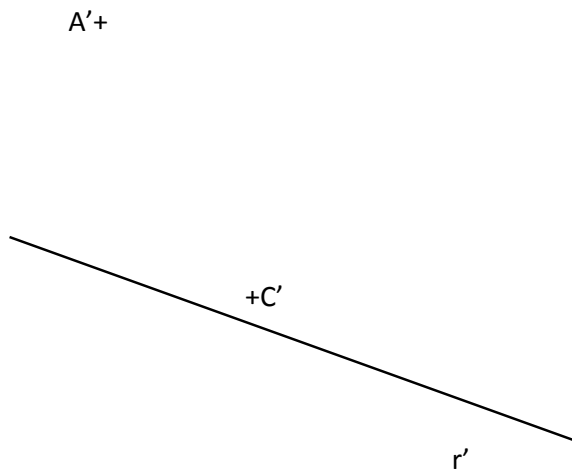
b)



c)



7. Represente a projeção cilíndrica ortogonal de um losango ABCD, sabendo-se que a diagonal AC está paralela a  $\pi'$ , dada a projeção da reta r que é o lugar geométrico do ponto B.



8. Represente a projeção cilíndrica ortogonal de um retângulo ABCD, dadas as projeções dos vértices A e C, sabendo-se que o lado AB é paralelo a  $\pi'$  e mede 3cm.

A'+

+C'

9. Represente a projeção do paralelepípedo ABCDEFGH sendo dadas as projeções de A, B, C e E.

E'+

C'+

A'+

B'+

10. Represente as projeções cilíndricas do prisma ABCDEF-GHIJKL de base hexagonal, dadas as projeções dos vértices A, B, D e H.

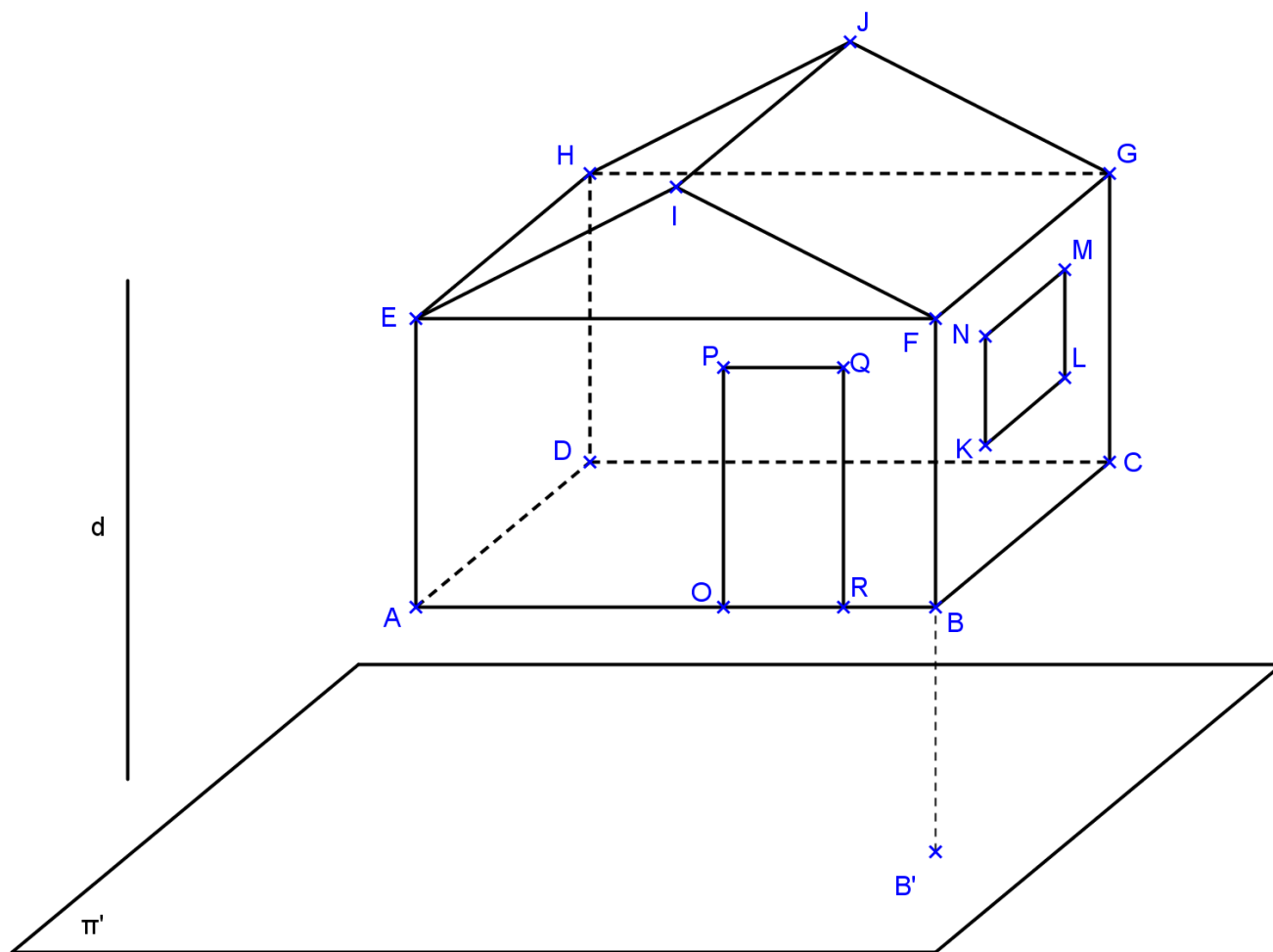
x H'

x D'

A' x

B' x

11. Usando as propriedades de projeções cilíndricas, termine as projeções da casa no plano  $\pi'$  dado abaixo, usando a direção de projeções  $d$ . Considere que a base ABCD é paralela a  $\pi'$ .



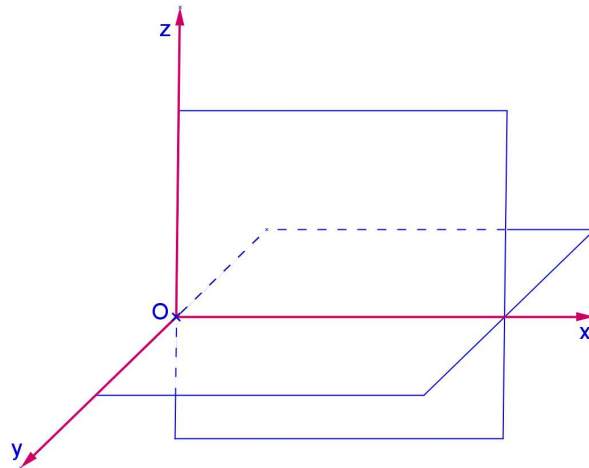
Os segmentos AB, AE, HJ e JG ficam projetados em verdadeira grandeza em  $\pi'$ ? Por que?



## O MÉTODO DAS DUPLAS PROJEÇÕES ORTOGONAIS

### 1. Representação do ponto

Consideremos  $\pi'$  e  $\pi''$  dois planos perpendiculares entre si, denominados *Planos Fundamentais de Referência* (PFR) ou *Planos de Fundamentais de Projeção* (PFP).



Denominamos:

- $\pi'$  - 1º PFR ou 1º PFP ou Plano Horizontal de Projeção.
- $\pi''$  - 2º PFR ou 2º PFP ou Plano Vertical de Projeção.

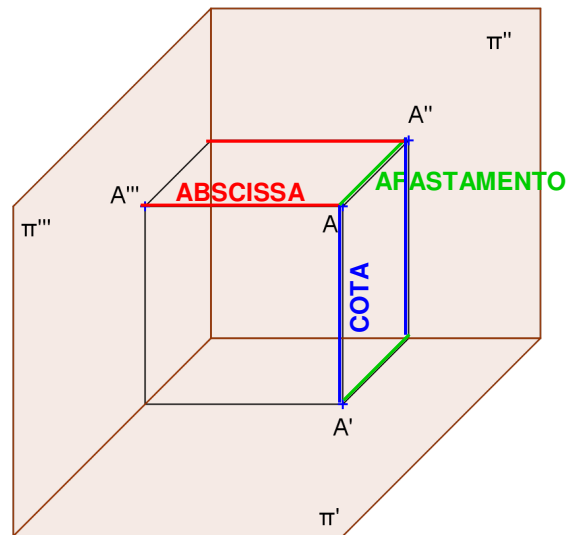
Linha de terra é a interseção de  $\pi'$  e  $\pi''$ , que divide  $\pi'$  nas partes: anterior e posterior e  $\pi''$  em superior e inferior.

Estes dois planos dividem o espaço em 4 porções, chamadas de *diedros*:

- 1º diedro – entre a parte anterior de  $\pi'$  e a superior de  $\pi''$
- 2º diedro – entre a parte posterior de  $\pi'$  e a superior de  $\pi''$
- 3º diedro – entre a parte posterior de  $\pi'$  e a inferior de  $\pi''$
- 4º diedro – entre a parte anterior de  $\pi'$  e a inferior de  $\pi''$

Consideremos um 3º PFR (ou 3º PFP ou 3º PDP ou Plano Lateral de Projeção)  $\pi'''$  que contém os eixos y e z. Estes 3 planos dividem o espaço em octantes.

Consideremos um ponto  $A$  no espaço, as projeções desse ponto sobre os planos de projeção são representadas por  $A'$ ,  $A''$  e  $A'''$  respectivamente sobre os planos  $\pi'$ ,  $\pi''$  e  $\pi'''$ .



As distâncias de  $A$  até os planos de projeção são:

- **Cota** – distância de  $A$  até  $\pi'$  = segmento  $AA'$
- **Afastamento** – distância de  $A$  até  $\pi''$  = segmento  $AA''$
- **Abscissa** – distância de  $A$  até  $\pi'''$  = segmento  $AA'''$

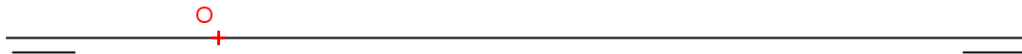
Estas distâncias também nos fornecem as coordenadas  $(x,y,z)$  do ponto  $A$ :

$x$  = abscissa

$y$  = afastamento

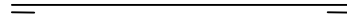
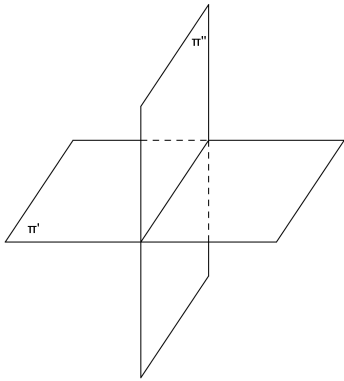
$z$  = cota

Fixamos um dos PFR e rebatemos os outros sobre o primeiro escolhido, temos a representação plana do ponto, chamada de épura do ponto  $A$ :

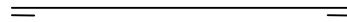
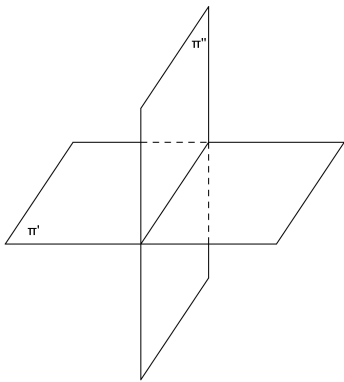


**1.1 Pontos pertencentes aos diedros:**

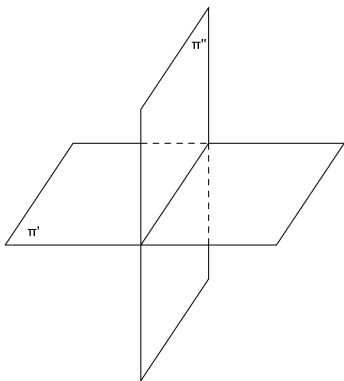
a) A pertence ao 1º diedro



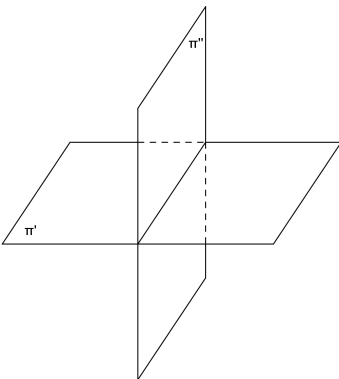
b) B pertence ao 2º diedro



c) C pertence ao 3º diedro

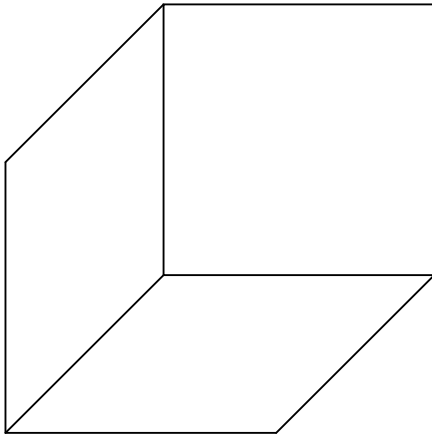


d) D pertence ao 4º diedro

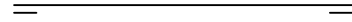


**1.2 Pontos pertencentes aos PFR**

Espaço



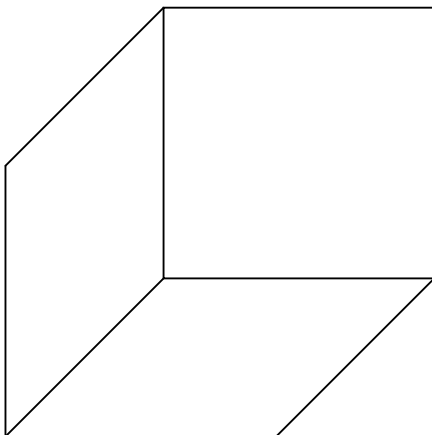
Épura:



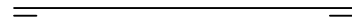
- a)  $\pi'$  é o lugar geométrico (LG) dos pontos de \_\_\_\_\_ nulas. Se  $A \in \pi' \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \in LT$ .
- b)  $\pi''$  é o lugar geométrico (LG) dos pontos de \_\_\_\_\_ nulos. Se  $B \in \pi'' \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \in LT$ .
- c)  $\pi'''$  é o lugar geométrico (LG) dos pontos de \_\_\_\_\_ nulas. Se  $C \in \pi''' \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \in \underline{\hspace{2cm}}$ .

**1.3 Pontos pertencentes aos eixos:**

Espaço



Épura:



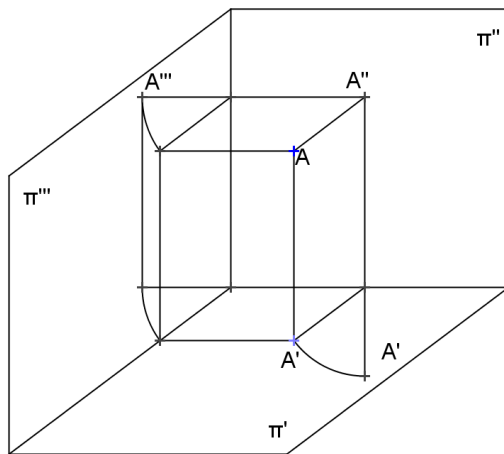
- A LT (eixo x) é o LG dos pontos de \_\_\_\_\_ nulas. Se  $A \in LT \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ .
- O eixo y é o LG dos pontos de \_\_\_\_\_ nulos. Se  $B \in y \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ .
- O eixo z é o LG dos pontos de \_\_\_\_\_ nulas. Se  $C \in z \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ .

**1.4 Obtenção da 3ª projeção:**

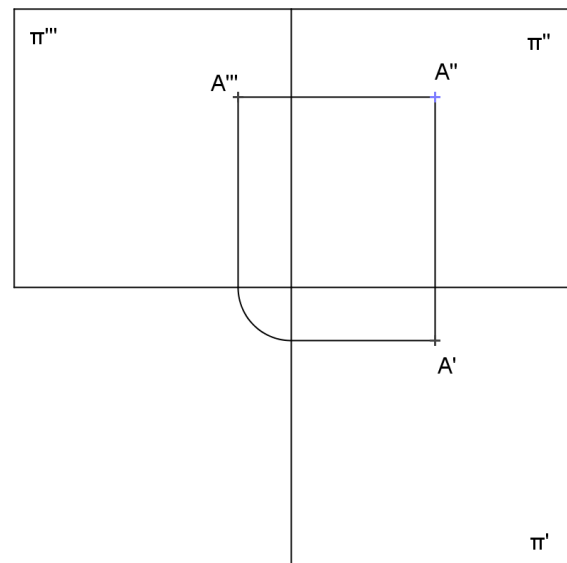
Para obtermos a representação do ponto na 3ª projeção, podemos rebater o 3º PFP sobre o 1º ou 2º PFP.

Consideremos o 2º PFP fixo. Ao rebatermos o 3º plano sobre o 2º, a 3ª projeção do ponto descreverá um arco de circunferência com centro no eixo z e raio o seu afastamento. Este arco está contido num plano paralelo a  $\pi'$  e, portanto está em VG na 1ª projeção. A 3ª projeção rebatida do ponto pertence a uma reta que passa pela segunda projeção do ponto e é paralela a linha de terra.

Espaço



Épura



Épura:



**Exercícios**

A unidade utilizada é o milímetro.

1. Representar a 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e a 3<sup>a</sup> projeções dos pontos dados.

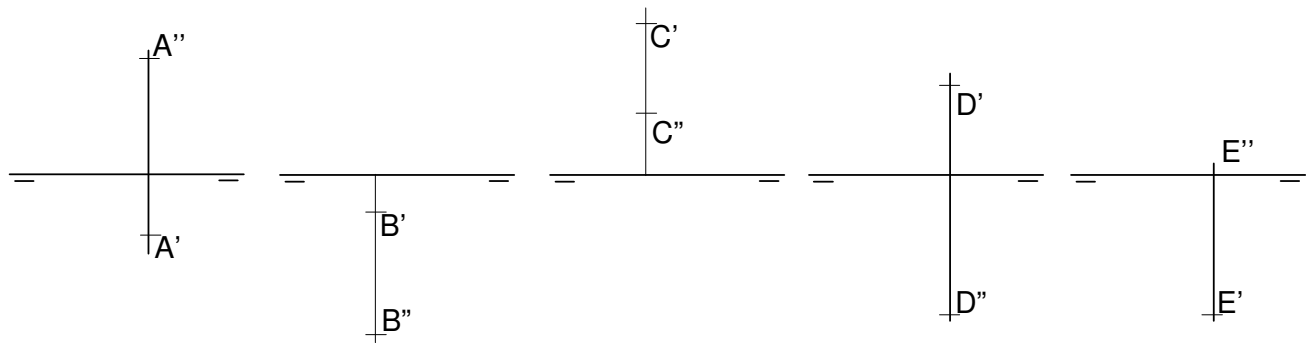
a) A(20,30,40)

b) B(20,-10,40)

c) C(30,-20,-40)

d) D(40,30,-20)

2. Localizar os pontos dados nos diedros.



A ∈ \_\_\_\_\_

B ∈ \_\_\_\_\_

C ∈ \_\_\_\_\_

D ∈ \_\_\_\_\_

E ∈ \_\_\_\_\_

3. Representar os pontos dados. Identificar a posição do ponto em relação aos diedros ou aos planos de projeção.

A(20,30,10) ∈ \_\_\_\_\_

B(50,-20,40) ∈ \_\_\_\_\_

C(30,-40,-20) ∈ \_\_\_\_\_

D(40,50,-10) ∈ \_\_\_\_\_

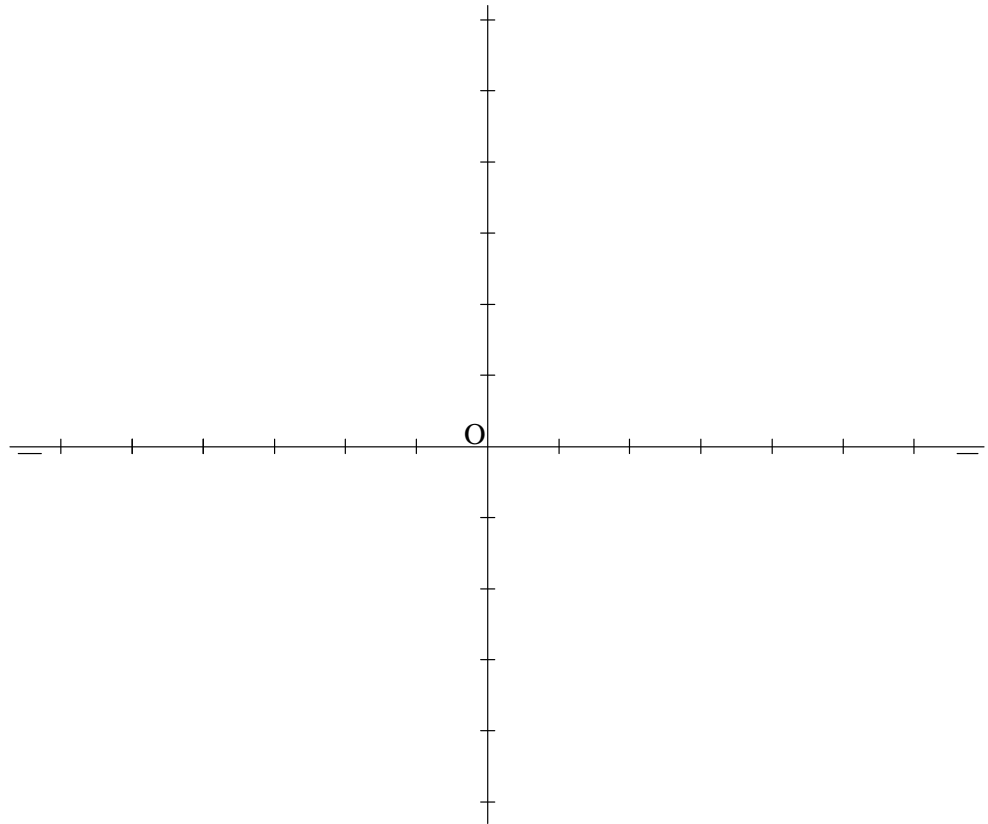
E(10,0,30) ∈ \_\_\_\_\_

F(60,20,0) ∈ \_\_\_\_\_

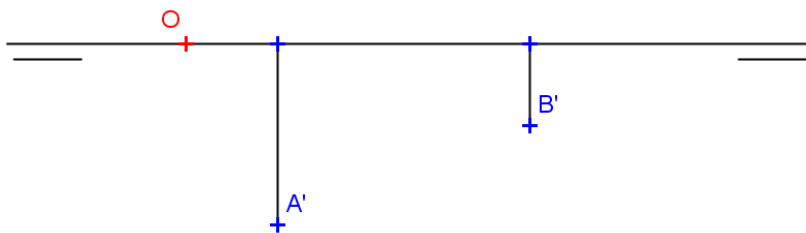
G(15,0,-40) ∈ \_\_\_\_\_

4. Representar os pontos dados e obter as terceiras projeções.

- a) A(20,50,20)
- b) B(40,-10,-20)
- c) C(50,-20,10)
- d) D(60,30,-40)
- e) E(10,40,?)  $\in \pi'$
- f) F(-10,-20,-30)
- g) G(-40,30,-10)
- h) H(-10,-20,0)



5. Representar um quadrado contido em  $\pi'$  sendo dados A e B.





6. Representar um quadrado contido num plano  $\alpha$  paralelo a  $\pi'$  sendo dados A e B.

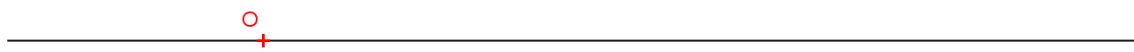
A(20,20,10) B(40,30,?)



7. Representar o paralelogramo ABCD, sendo dados os vértices A e B, e o ponto M de interseção das diagonais.

a) A(10,30,30) B(30,10,10) M(40,15,20)

b) A(10,20,-30), B(-20,30,-10) e M(20,10,30)



8. Representar um hexágono regular ABCDEF, contido em  $\pi''$  sendo dados dois vértices.

a) A(20,?,20) e B(40,?,10)

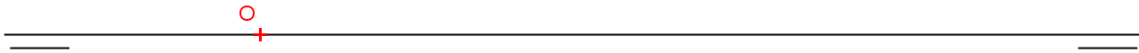


b) A(30,?,50) e C(60,?,30)



9. Representar o triângulo ABC sendo dados M, N e P, pontos médios dos lados.

a)  $M(20,50,30)$   $N(40,20,20)$   $P(60,30,10)$

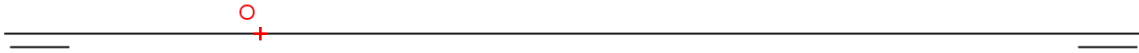


10. Representar o triângulo ABC sendo dados os vértices A e B e o baricentro G.

$A(30,10,20)$   $B(20,50,40)$   $G(50,30,30)$ .



11. Representar um quadrado contido em  $\pi'$  sendo dados  $A(20,40,?)$  e sabendo-se que o lado  $AB$  mede 30 e é paralelo à  $LT$ .



12. Representar os pontos  $A$  e  $B$  de  $\pi'$  conhecendo  $A(10,30,?)$  e  $B(x,50,?)$  sabendo-se que  $AB=30$ .

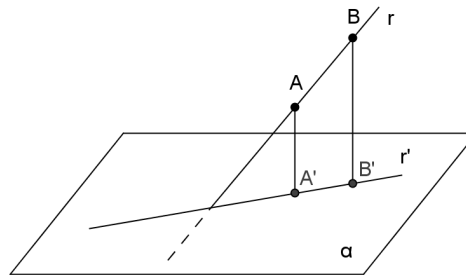
**REPRESENTAÇÃO DA RETA**

A representação da reta na dupla projeção ortogonal leva em consideração as propriedades das projeções.

Lembrando que a primeira propriedade das projeções cilíndricas diz que:

Se  $r$  é uma reta então  $r'$  ou é uma reta (se  $r$  não for paralela a direção das projetantes  $d$ ) ou um ponto (se  $r$  for paralela a direção das projetantes  $d$ ).

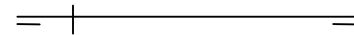
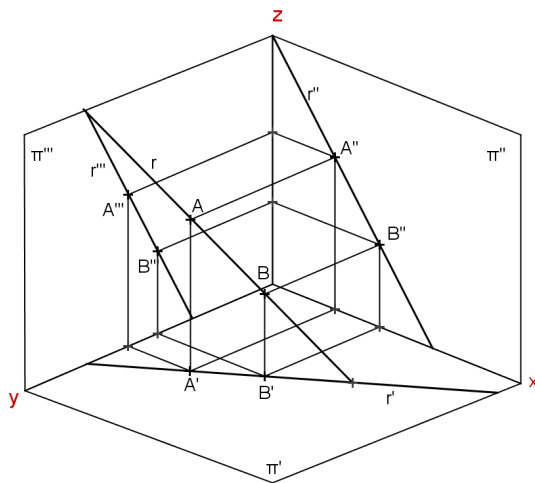
Uma reta pode ser representada por dois pontos  $A$  e  $B$  pertencentes a  $r$  ou por seu plano projetante.



Como existem 3 PFR então há 3 planos projetantes e portanto 3 projeções da reta. Normalmente, consideramos apenas a 1ª e a 2ª projeções da reta, pois são suficientes para determinar a 3ª projeção (exceto para a reta de perfil que estudaremos mais tarde).

Espaço

Épura



**PONTO PERTENCENTE À RETA**

As condições para que um ponto pertença à uma reta são que suas projeções pertençam às projeções de mesmo nome da reta.

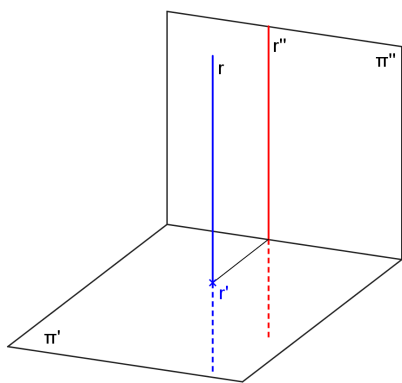
Propriedade:  $P \in r \Leftrightarrow P' \in r' \text{ e } P'' \in r''$

Mas se  $r // \pi'''$  e  $r \perp \pi'$  então também deve ser verificado se  $P''' \in r'''$ .

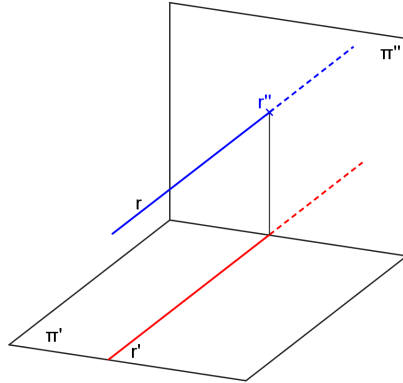
**POSIÇÕES DA RETA EM RELAÇÃO AOS PFR**

A reta pode ocupar posições distintas em relação aos 3 PFR, podendo ser:

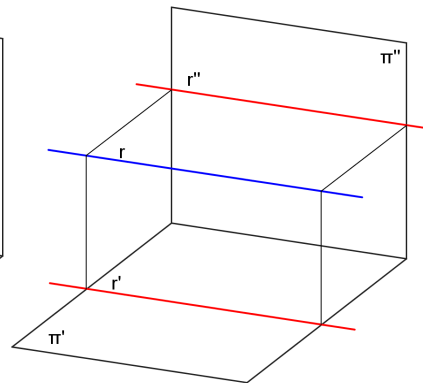
- r perpendicular a um dos PFR:



reta vertical

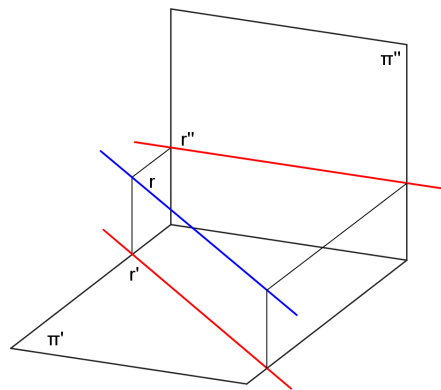


reta de topo

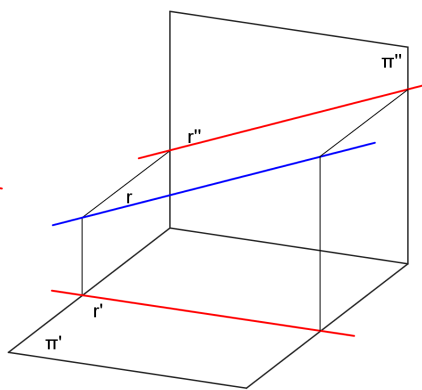


reta fronto-horizontal

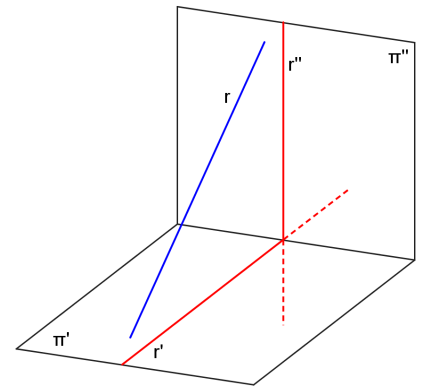
- r paralela a um dos PFR e oblíqua em relação aos outros dois PFR:



reta horizontal

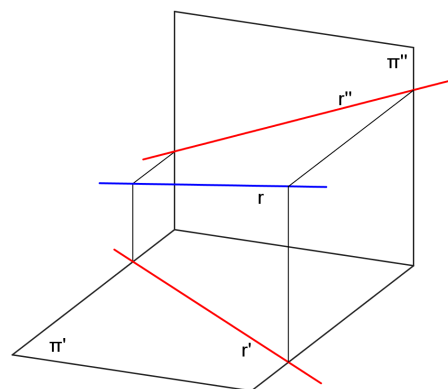


reta frontal



reta de perfil

- r oblíqua em relação a todos os 3 PFR: reta qualquer

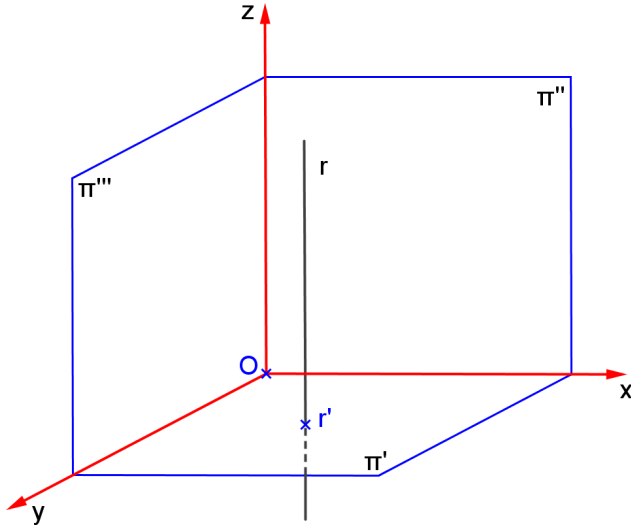


**1.1 Retas vertical**

A reta vertical é perpendicular ao Plano Horizontal de Projeção e paralela em relação ao Plano Vertical de Projeção.

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_

b) Épura: \_\_\_\_\_



c) Diedros: \_\_\_\_\_

d) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_

e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: \_\_\_\_\_

g) Traços: H, V, L

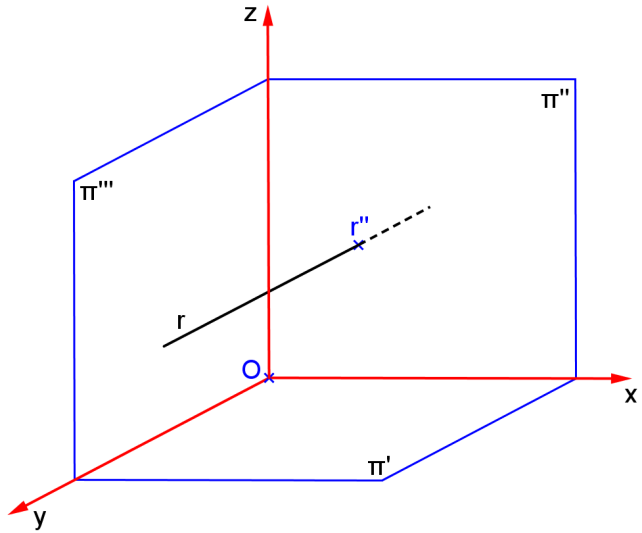
=====

**1.2 Retas de topo**

A reta de topo é paralela ao Plano Horizontal de Projeção e perpendicular em relação ao Plano Vertical de Projeção.

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_

b) Épura



=====

c) Diedros: \_\_\_\_\_

d) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_

e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: \_\_\_\_\_

g) Traços: H, V, L

=====

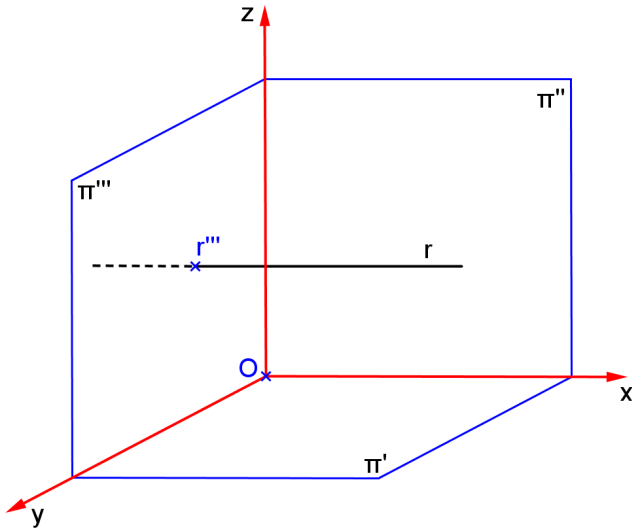


**1.3 Reta fronto-horizontal**

A reta fronto-horizontal é paralela ao Plano Horizontal de Projeção e paralela em relação ao Plano Vertical de Projeção.

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_

b) Épura: \_\_\_\_\_



=====

c) Diedros: \_\_\_\_\_

d) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_

e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: \_\_\_\_\_

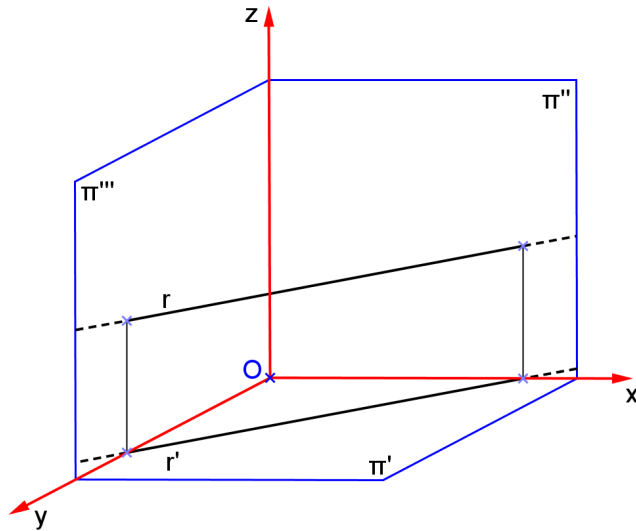
g) Traços: H, V, L

=====

**1.4 Retas horizontal**

A reta horizontal é paralela ao Plano Horizontal de Projeção e inclinada em relação ao Plano Vertical de Projeção.

- a) Característica espacial: \_\_\_\_\_ b) é pura



- c) Diedros: \_\_\_\_\_

d) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

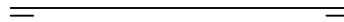
com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_

- e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

- f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: \_\_\_\_\_

- g) Traços: H, V, L

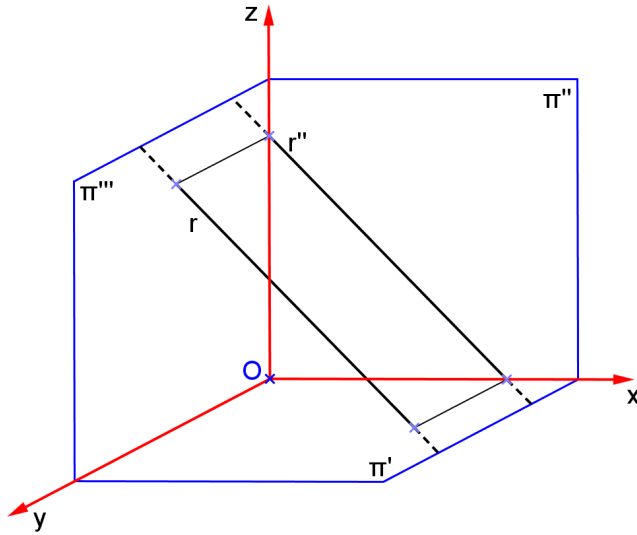


**1.5 Retas frontal**

A reta frontal é inclinada em relação ao Plano Horizontal de Projeção e paralela em relação ao Plano Vertical de Projeção.

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_

b) Épura: \_\_\_\_\_



c) Diedros: \_\_\_\_\_

d) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

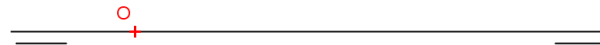
com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_

e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: \_\_\_\_\_

g) Traços: H, V, L

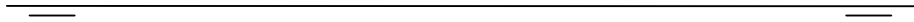
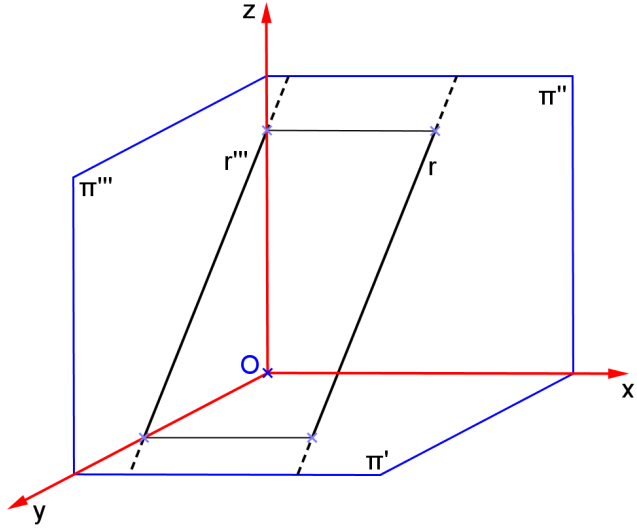


**1.6 Reta de perfil**

A reta de perfil é inclinada em relação ao Plano Horizontal de Projeção e ao Plano Vertical de Projeção e paralela ao Plano Lateral de Projeção.

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_

b) Épura: \_\_\_\_\_



c) Diedros: \_\_\_\_\_

d) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_

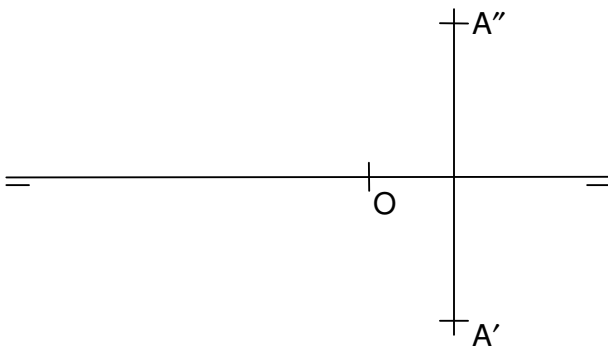
e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: \_\_\_\_\_

g) Traços: H, V, L



**Exemplo:** Representar a reta de perfil  $r$  que passa pelo ponto  $A$  e forma  $60^\circ$  com  $\pi'$ . Encontrar as projeções do ponto da reta  $r$  que tem cota 15.

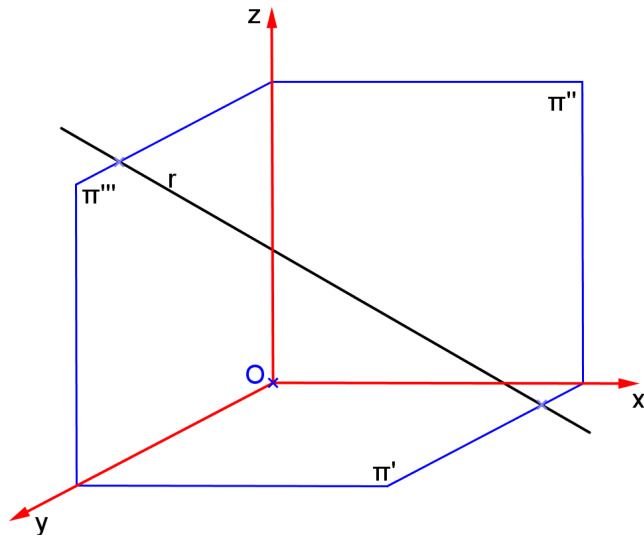


**1.7 Reta qualquer**

A reta qualquer é inclinada em relação ao Plano Horizontal de Projeção, ao Plano Vertical de Projeção e ao Plano Lateral de Projeção.

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_

b) Épura



\_\_\_\_\_

c) Diedros: \_\_\_\_\_

d) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

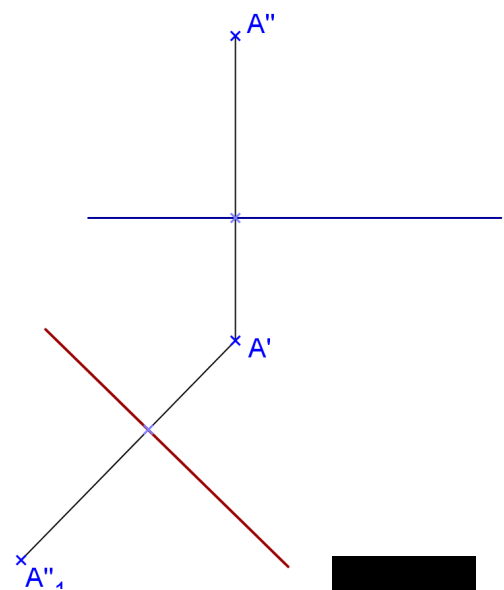
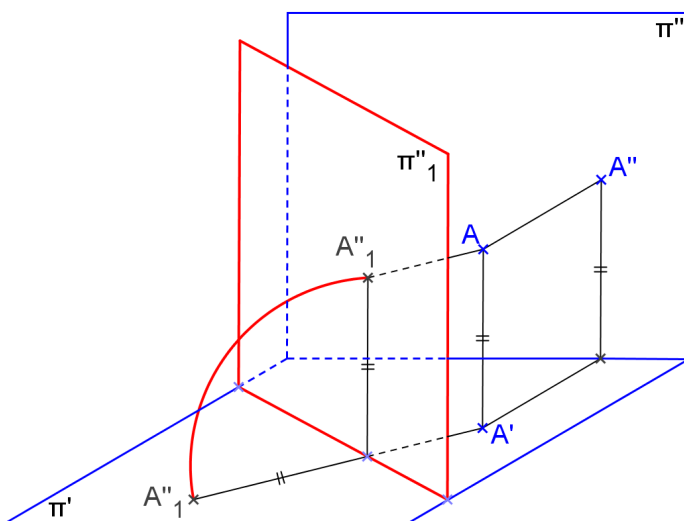
com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_

e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

**Propriedades da MPV:**

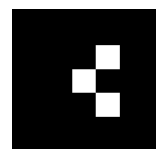
- $A'$  é o mesmo para os dois sistemas;
- a cota é mantida no novo sistema;

Mudança de Plano Vertical

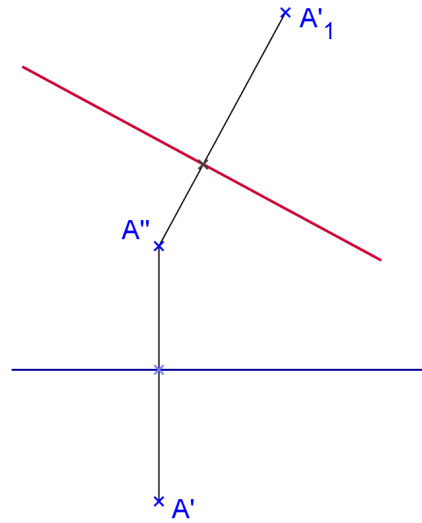
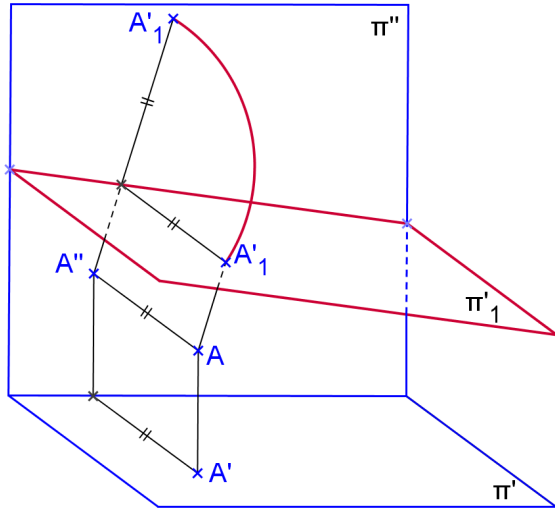


Realidade Virtual: [paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/](http://paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/)

Realidade Aumentada: [paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/ra.html](http://paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/ra.html)

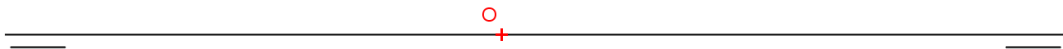


Mudança de Plano Horizontal



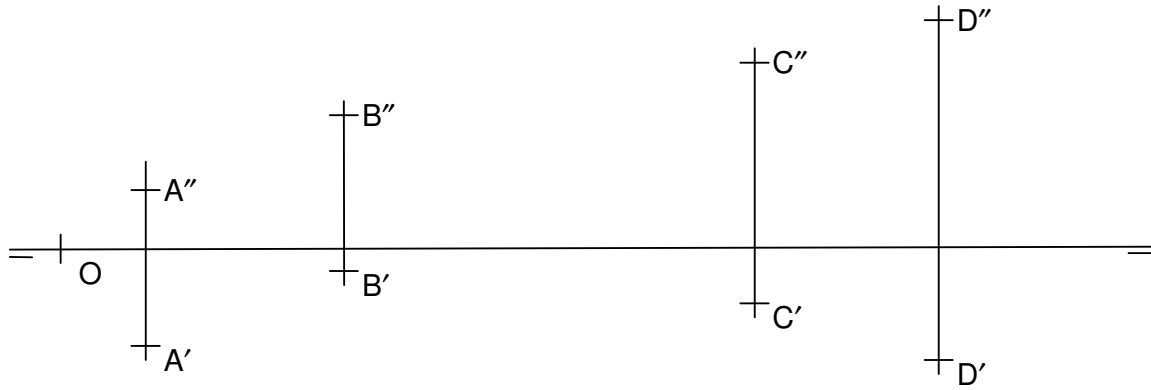
f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: \_\_\_\_\_

g) Traços: H, V, L



**Exemplo**

1. Representar as retas  $r(A,B)$  e  $s(C,D)$ . Encontrar as projeções do ponto da reta  $r$  que tem afastamento 10, e da reta  $s$  que tem cota 40. Encontre as vgs de  $AB$  e  $CD$ .





**Exercícios Propostos**

1. Encontrar a VG do segmento AB utilizando uma mudança de planos vertical, considerando A(10,20,40) e B(10,40,50).
2. Encontrar a VG do segmento AB utilizando uma mudança de planos horizontal, considerando A(10,40,10) e B(40,20,50).
3. Na reta r, definida pelos pontos A(20,40,10) e B(60,10,-40) representar os pontos:

C(40,?,?)

D(?,50,?)

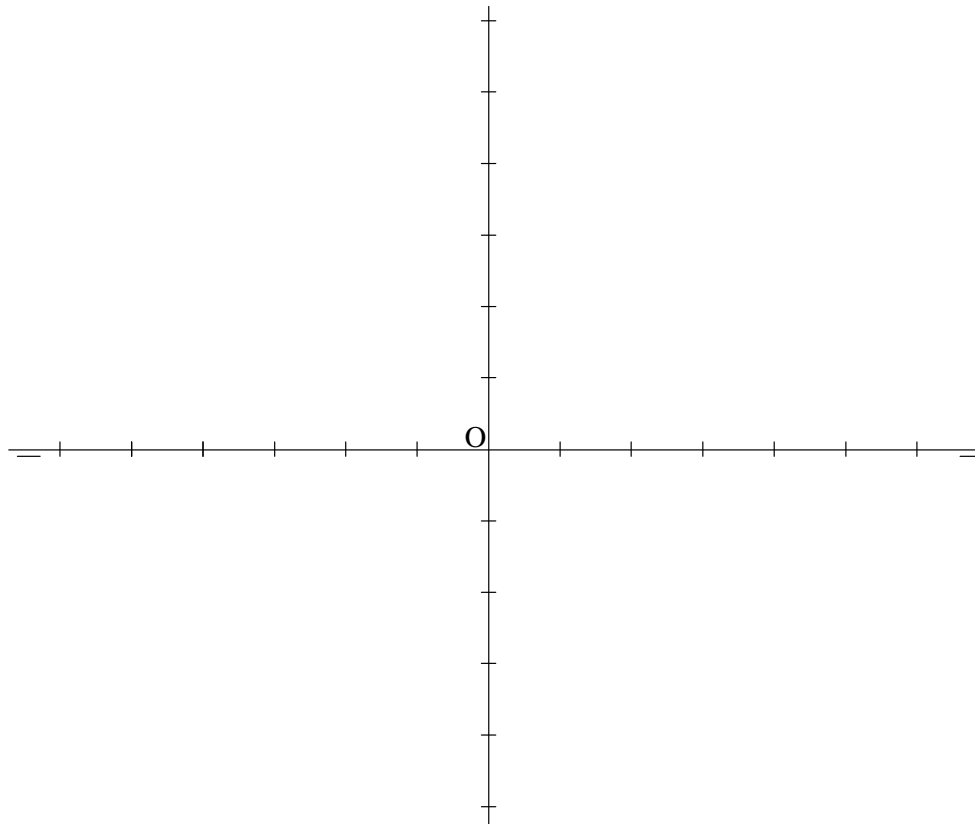
E(?,?,-10)

F(?,-10,?)

G(?,?,0)

H(-10,?,?)

I(0,?,?)



4. Seja a reta r definida pelos pontos A e B. Representá-la, identificar o nome da reta e sua posição em relação aos PFR (paralela, oblíqua ou perpendicular).
  - a) A(30,15,10), B(60,50,-15)
  - b) A(20,30,20), B(20,45,20)
  - c) A(20,20,30), B(20,20,45)
  - d) A(10,20,-30), B(50,20,20)
  - e) A(40,50,10), B(40,20,30)
  
5. Seja a reta r definida pelos pontos A e B. Identificar o nome da reta. Encontrar os ângulos que a reta forma com os PFR, bem como a VG do segmento AB.
  - a) A(0,-20,-10), B(50,20,-10)

- b)  $A(30,-10,-40)$ ,  $B(30,20,-40)$
- c)  $A(50,20,15)$ ,  $B(70,30,35)$
- d)  $A(30,-30,-10)$ ,  $B(30,-30,20)$
- e)  $A(20,-20,-30)$ ,  $B(50,-20,-30)$
- f)  $A(30,10,50)$ ,  $B(30,-30,-15)$
- g)  $A(20,10,0)$ ,  $B(40,10,30)$

6. Representar as retas horizontais que passam pelo ponto dado A e que formem ângulo dado com um dos PFR.

- a)  $A(10,30,40)$ ,  $\theta''' = 30^\circ$
- b)  $A(10,30,40)$ ,  $\theta'' = 30^\circ$

7. Representar as retas frontais que passem pelo ponto dado A e que formem ângulo dado com um dos PFR.

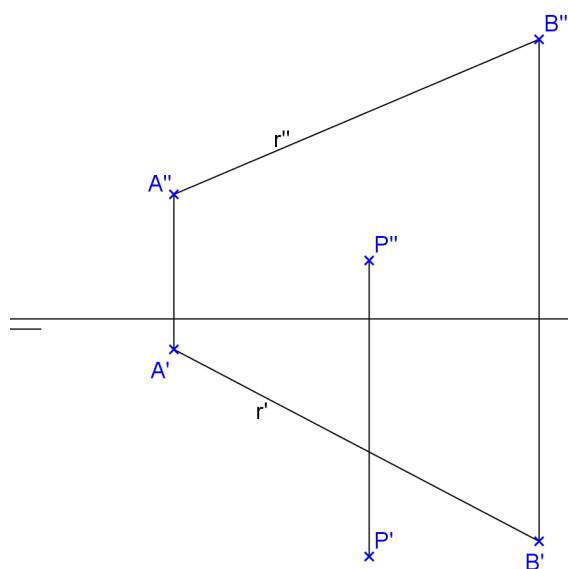
- a)  $A(10,-40,-60)$ ,  $\theta' = 15^\circ$
- b)  $A(10,30,40)$ ,  $\theta''' = 30^\circ$

8. Representar as retas de perfil que passam pelo ponto dado A e que formam ângulo dado com um dos PFR. Utilize mudança de plano vertical ou horizontal.

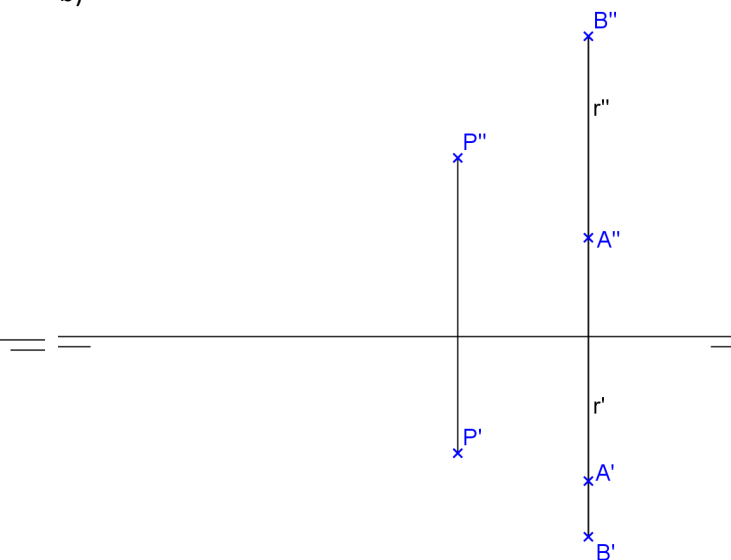
- a)  $A(50,10,-20)$ ,  $\theta' = 30^\circ$
- b)  $A(20,25,10)$ ,  $\theta' = 60^\circ$

9. Encontre as projeções da reta s, paralela à reta r, que passa por P:

a)

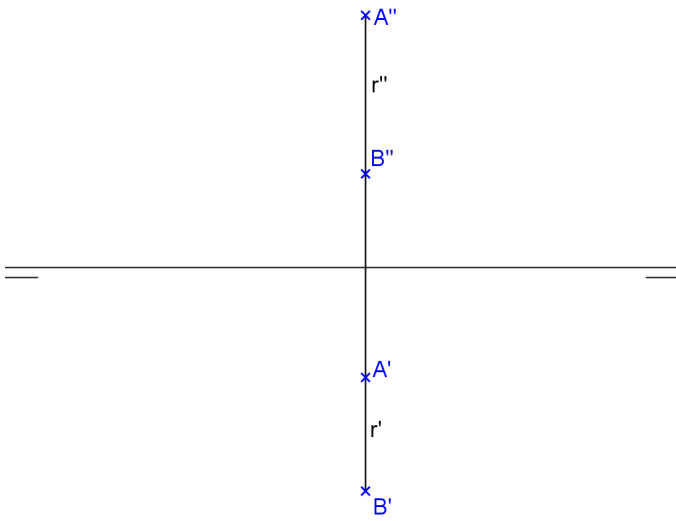


b)

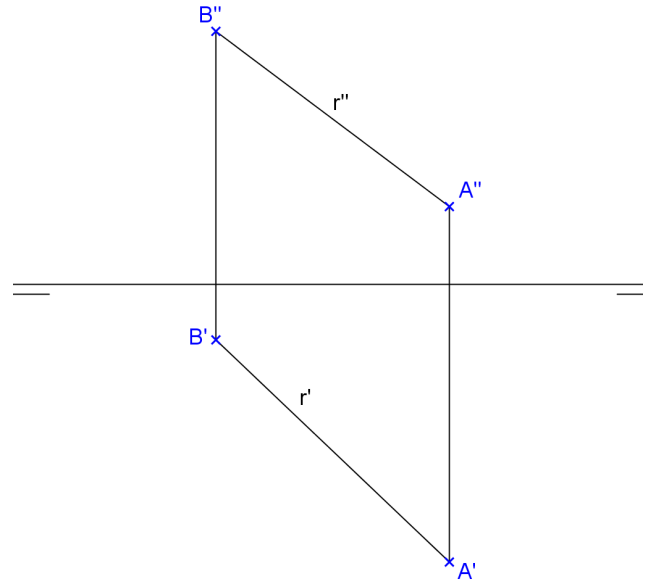


10. Encontre a verdadeira grandeza do segmento AB contido na reta r. Determine a verdadeira grandeza do ângulo que a reta r forma com  $\pi'$ .

a)



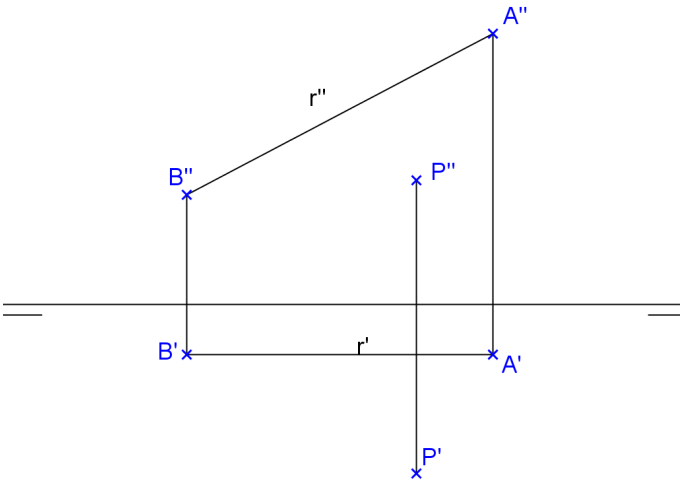
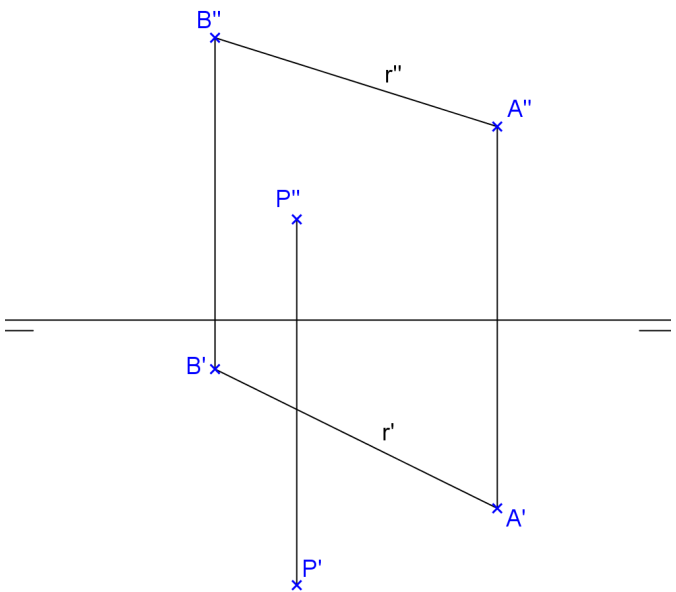
b)



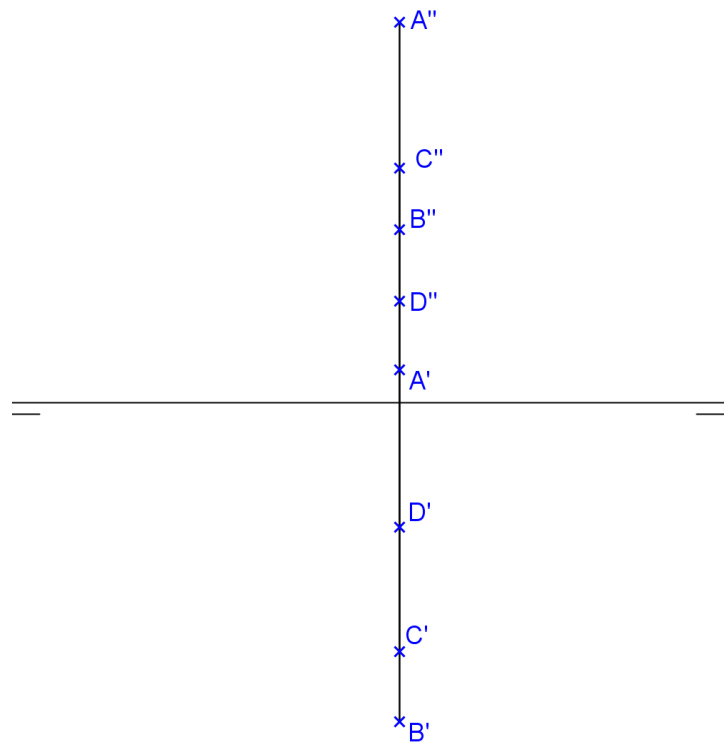
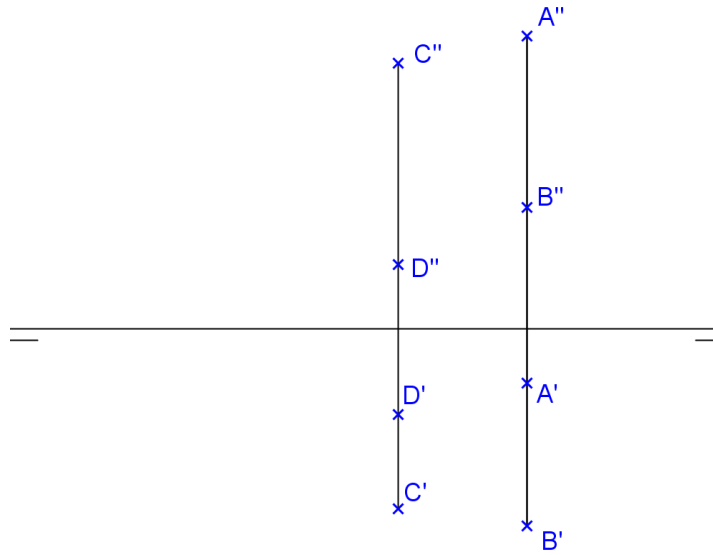
11. Encontre as projeções da reta s, ortogonal à reta r, que passa por P, e é do tipo:

a) horizontal

b) frontal



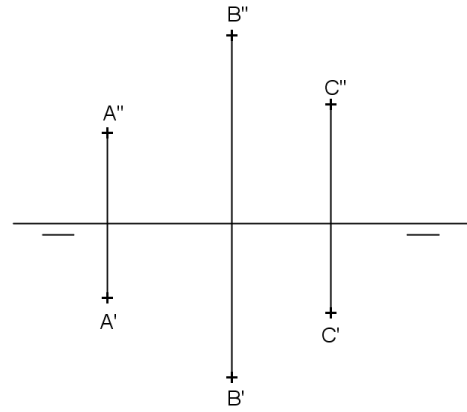
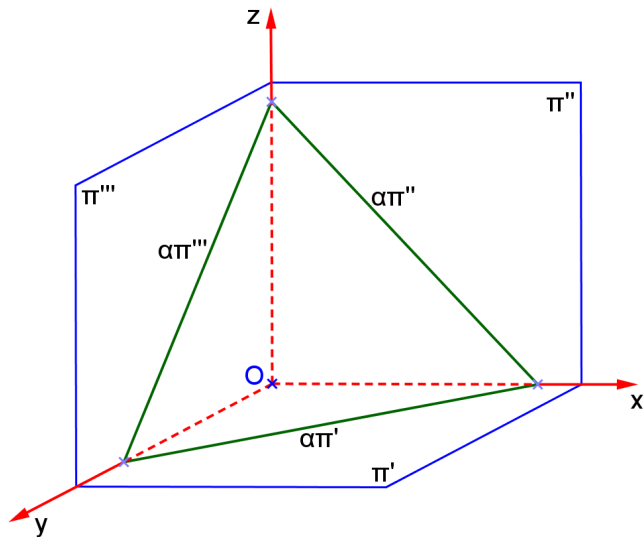
12. Determine se as retas de perfil  $r(A,B)$  e  $s(C,D)$  são paralelas, concorrentes ou reversas:



**REPRESENTAÇÃO DO PLANO**

Um plano pode ser determinado por:

a) três pontos não colineares



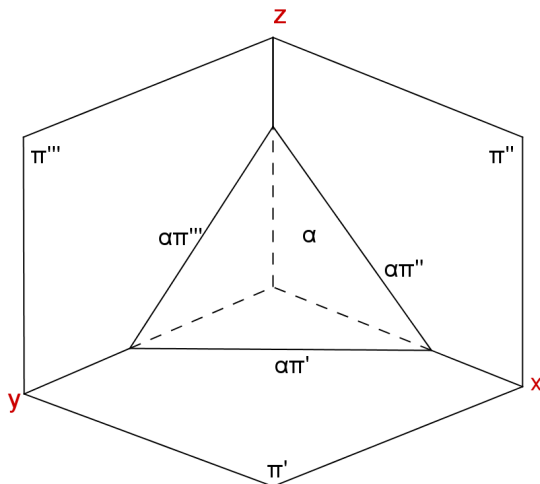
**PERTINÊNCIA DE PONTO E RETA A UM PLANO**

Condições para que um ponto e uma reta pertençam a um plano.

**Pertinência de reta a plano**

A condição para que uma reta pertença a um plano é que ela seja concorrente com duas retas do plano ou concorrente com uma e paralela à outra.

$$r \subset \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} r \times a, r \times b, \text{ onde } a, b \subset \alpha \\ r \times a, r // b, \text{ onde } a, b \subset \alpha \end{cases}$$



Os traços de  $\alpha$  são:

- $\alpha\pi'$  – 1º traço ou traço horizontal
- $\alpha\pi''$  – 2º traço ou traço vertical
- $\alpha\pi'''$  – 3º traço ou traço lateral

### *Pertinência de ponto a plano*

A condição para que um ponto pertença a um plano é que ele pertença à uma das retas do plano.  $P \in \alpha \Leftrightarrow P \in r \text{ e } r \subset \alpha$

### *Representação do plano pelos seus traços*

- No espaço:

- Em é pura:

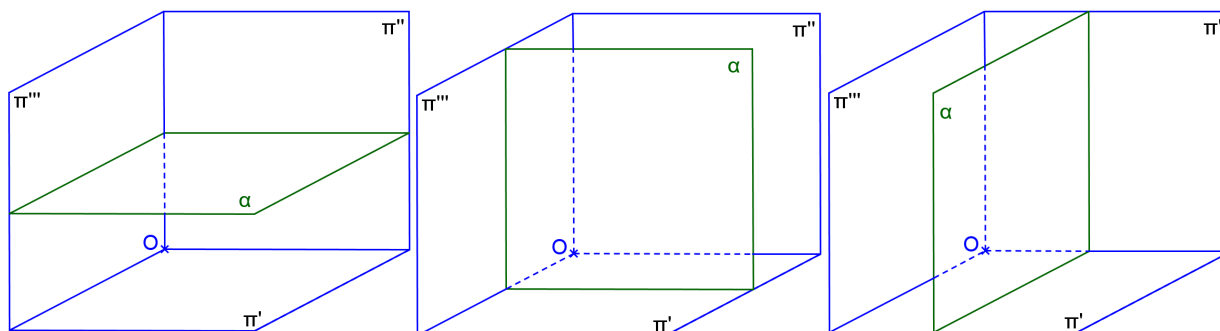


Propriedade: ou  $\alpha\pi'$  intercepta  $\alpha\pi''$  num ponto que pertence a Linha de Terra, ou os traços  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi''$  são paralelos à Linha de Terra.

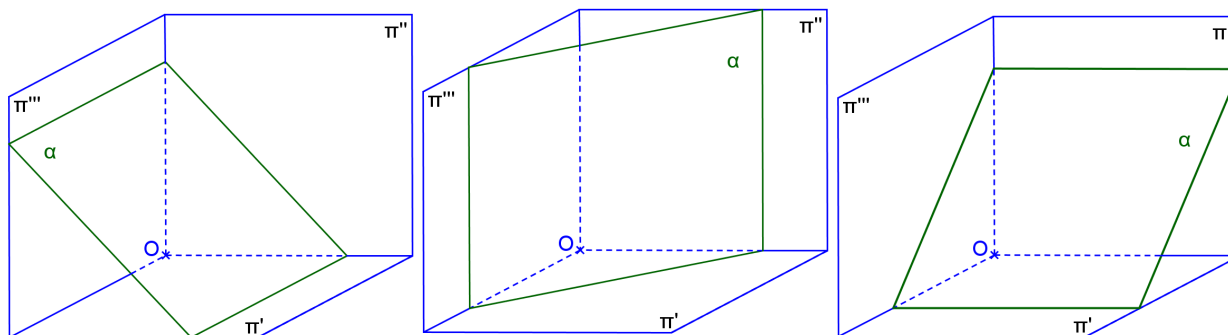
**Posições do plano em relação aos PFR**

Um plano  $\alpha$  pode ocupar posições distintas em relação aos 3 PFR, podendo ser:

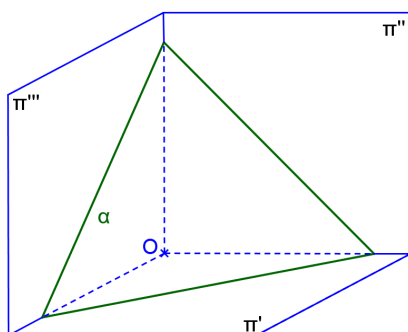
$\alpha$  paralelo a um dos PFR



$\alpha$  perpendicular a um dos PFR e oblíquo em relação a outro:



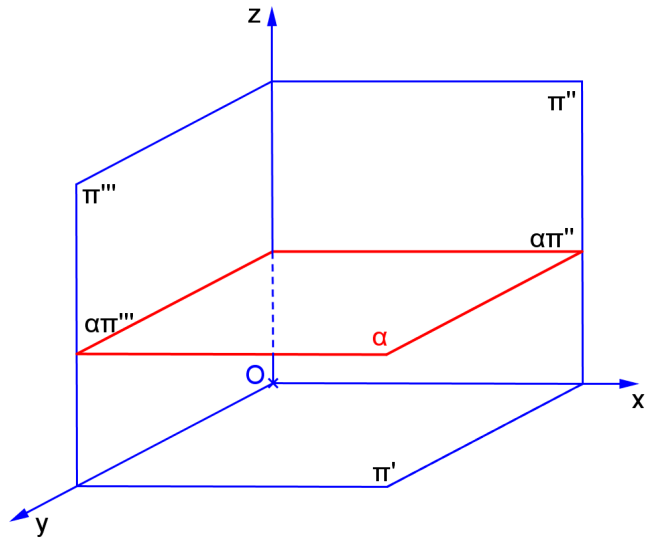
$\alpha$  oblíquo em relação aos PFR:



**1.1 Plano horizontal**

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_

b) Épura: \_\_\_\_\_



c) Traços: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

d) É plano projetante? \_\_\_\_\_

-  $P \in \alpha$  horizontal  $\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_.

-  $r \subset \alpha$  horizontal  $\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_.

e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

f) Retas contidas no plano: \_\_\_\_\_

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: \_\_\_\_\_

h) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_



i) Reta perpendicular ao plano:



### Crêterios de visibilidade:

1º) O contorno aparente é sempre visível.

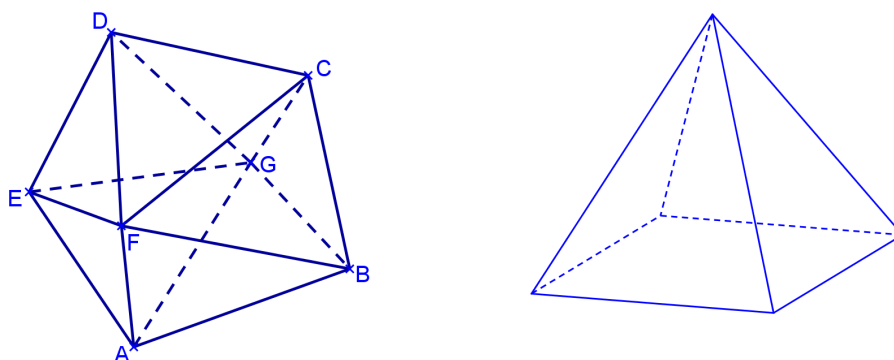
2º) Uma face que cont m um ponto visível   visível.

3º) Uma aresta que cont m um ponto visível   visível.

4º) Duas faces que tem uma aresta comum pertencente ao contorno aparente são uma visível e outra não visível.

5º) Duas arestas que tem um vértice comum não pertencente ao contorno aparente são ambas visíveis ou invisíveis, depende se o vértice é ou não visível.

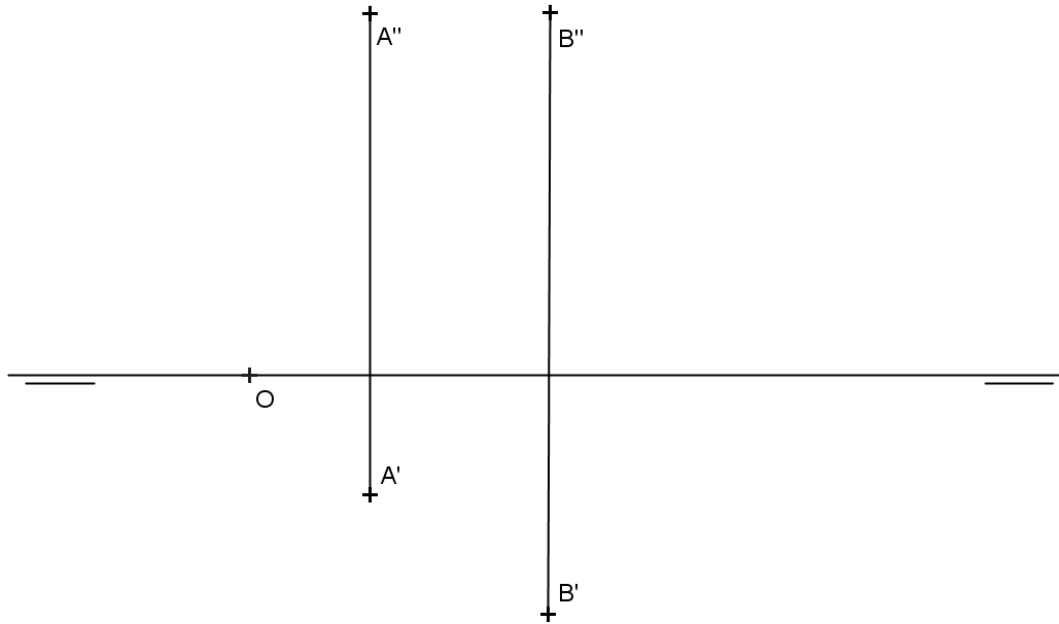
6º) Dois pontos que têm a mesma proje o são um visível e outro invisível.



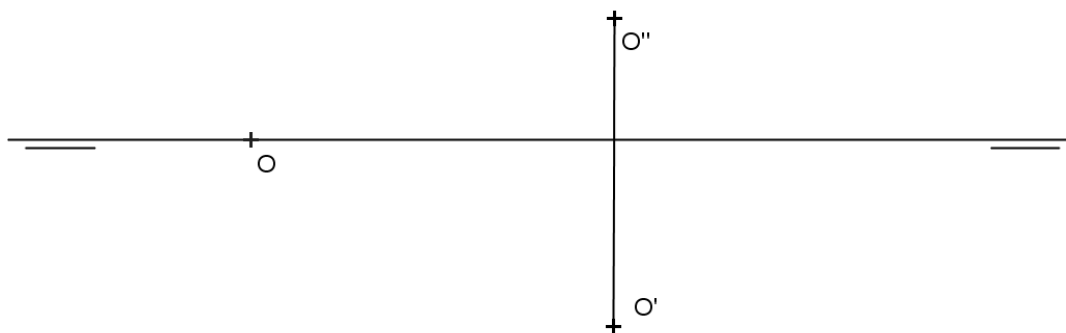
O contorno aparente é obtido pelas projetantes razantes ao sólido (aquelas que estão projetando os pontos mais afastados do objeto). Este contorno aparente divide o sólido em duas partes, uma visível e outra não visível.

**EXERCÍCIOS**

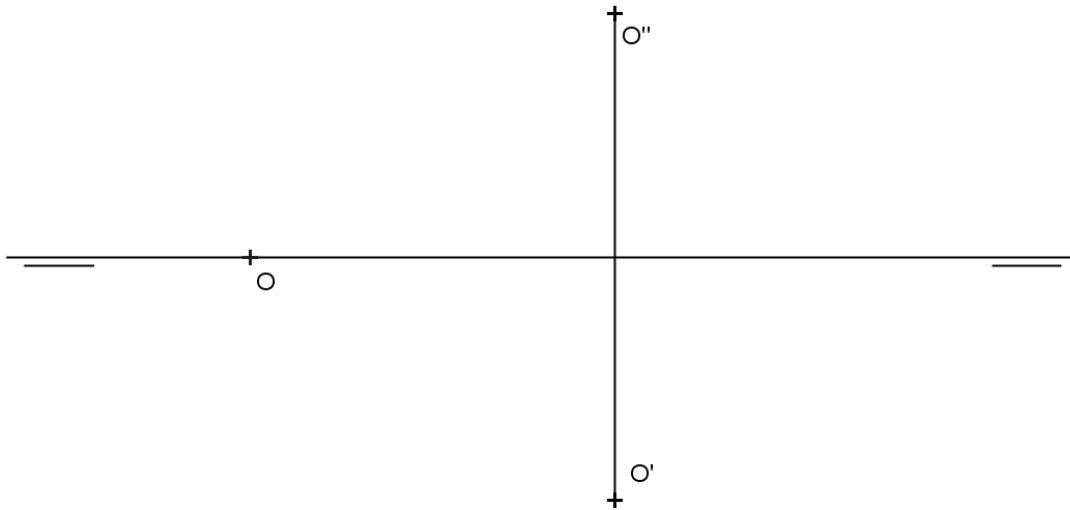
1. Representar um quadrado ABCD contido num plano horizontal  $\alpha$  sendo dados os vértices A e B.



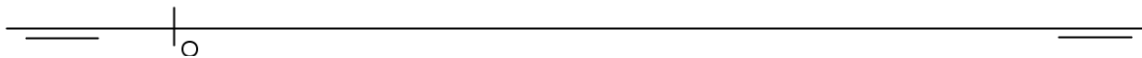
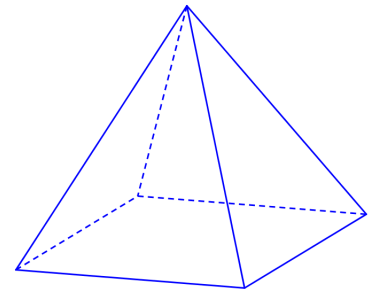
2. Representar um hexágono regular ABCDEF contido num plano horizontal  $\alpha$  sendo dados o centro O da circunferência circunscrita ao polígono e o seu raio  $r=20$ , sabendo que um de seus lados é fronto-horizontal.



3. Representar um hexágono regular ABCDEF contido num plano horizontal  $\alpha$  sendo dados o centro O, da circunferência circunscrita ao polígono e o seu raio  $r=20$ , sabendo que um de seus lados forma ângulo de  $30^\circ$  com  $\pi''$ .



4. Representar uma pirâmide reta de base quadrada ABCD contida num plano  $\alpha$  horizontal, de altura  $h=35$ , sendo dados  $A(10,20,20)$  e  $B(40,10,?)$ .



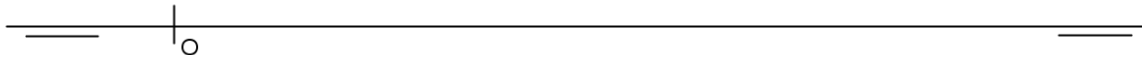
5. Representar uma pirâmide reta de base hexagonal ABCDEF, contida em um plano horizontal  $\alpha$ , com altura  $h = 50$ , dados  $A(10,10,00)$  e  $B(-30,00,00)$ .



*Realidade Virtual:* [paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/](http://paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/)

*Realidade Aumentada:* [paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/ra.html](http://paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/ra.html)

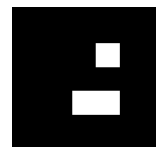
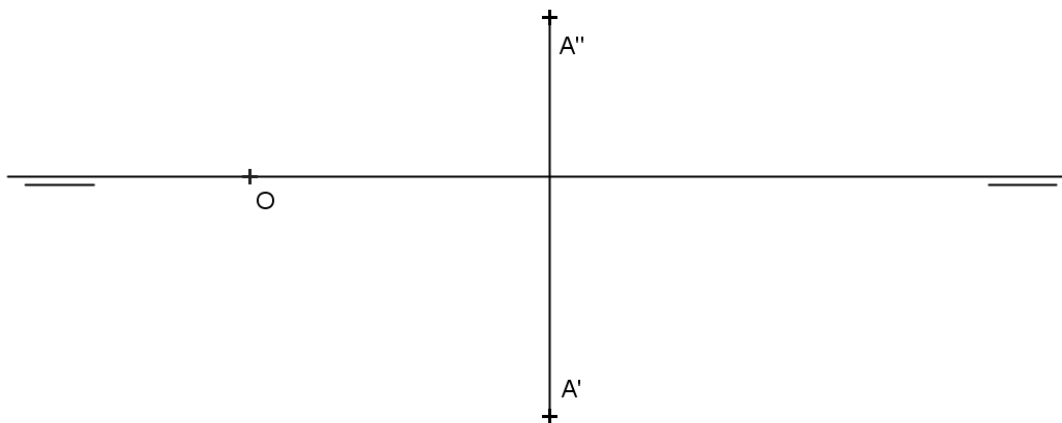
6. Representar um prisma reto de base triangular ABC contida num plano horizontal  $\alpha$ , de altura  $h=50$ , sendo dados  $A(20,10,20)$  e  $B(40,10,?)$ .



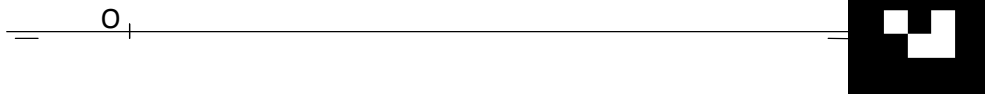
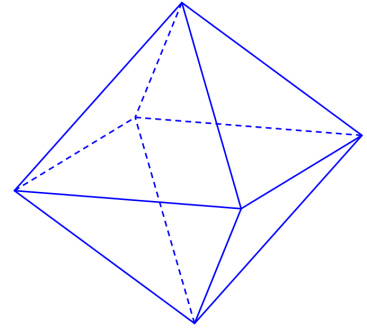
7. Representar uma pirâmide V-ABCD com base quadrangular contida em um plano horizontal  $\alpha$ , dados V(60,10,60), A(20,00,10) e B(40,20,?)



8. Representar um tetraedro regular ABCD, com a face ABC contida num plano horizontal, sendo dados o vértice A, a medida  $m=40$  da aresta, e o ângulo  $\theta=45^\circ$  que a reta suporte da aresta AB forma com  $\pi''$ .



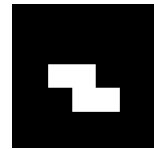
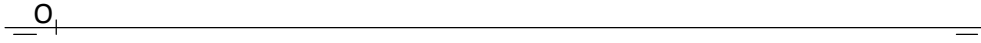
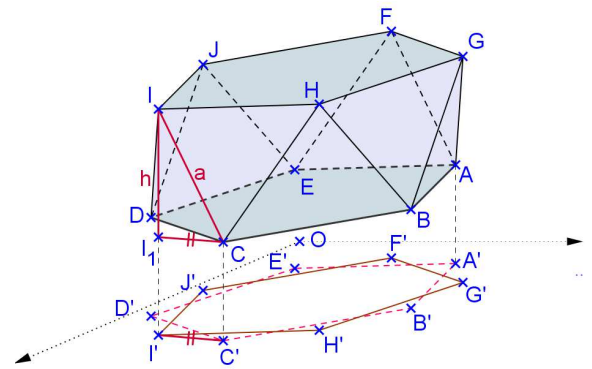
9. Representar um octaedro regular ABCDEF, com seção equatorial ABCD contida num plano horizontal, sendo dados o vértice A, a medida  $m=30$  da aresta, e o ângulo  $\theta=60^\circ$  que a reta suporte da aresta AB forma com  $\pi''$ .



9. Representar um octaedro regular ABCDEF, com a face ABC contida em um plano horizontal, dados os vértices  $A(10,40,10)$  e  $B(60,50,10)$ .

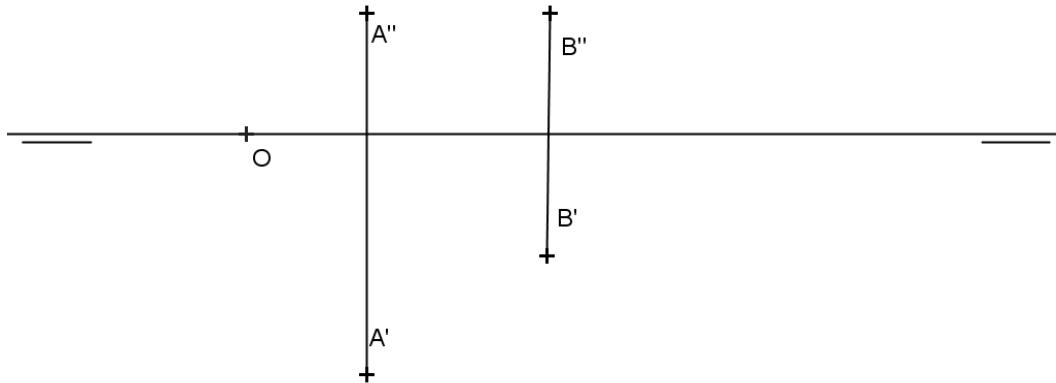


10. Representar um anti-prisma arquimediano com uma base ABCDEF hexagonal e contida num plano horizontal, sendo dados os vértices A e B.





10. Representar um octaedro regular ABCDEF, com a face ABC contida em um plano horizontal, dados os vértices A e B.



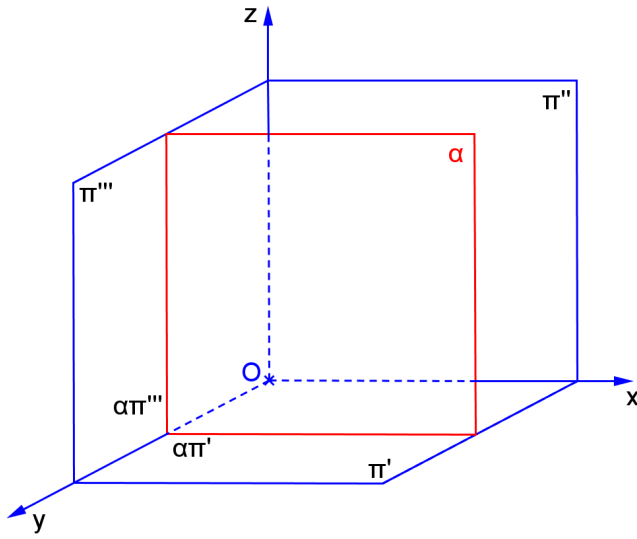
### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Representar as projeções de um pentágono regular contido em um plano horizontal, dado o lado AB:  $A(10,10,10)$ ,  $B(40,30,?)$
2. Representar as projeções do prisma oblíquo de base hexagonal regular, dados a aresta de uma das bases (AB) e a aresta lateral (AG):  $A(30,30,10)$ ,  $B(20,60,10)$ ,  $G(70,10,60)$ . Encontre a verdadeira grandeza de uma das arestas laterais.
3. Representar as projeções do tetraedro regular com uma face sobre um plano horizontal, sabendo-se que a aresta AB mede 40mm e forma  $45^\circ$  com  $\pi''$ :  $A(50,40,20)$ .
4. Representar as projeções do anti-prisma arquimediano pentagonal com a face ABCDE sobre um plano horizontal:  $A(50,20,10)$ ,  $B(20,40,10)$ .
5. Representar as projeções do icosaedro regular de aresta AB horizontal e sabendo-se que uma das diagonais principais é perpendicular a  $\pi'$ :  $A(20,40,30)$ ,  $B(50,20,30)$ .
6. Representar as projeções da pirâmide oblíqua de base pentagonal regular contida num plano horizontal, dado o vértice principal V, o vértice da base A e sabendo-se que a aresta AB forma  $60^\circ$  com  $\pi''$ :  $A(20,40,10)$ ,  $V(70,60,50)$ ,  $AB = 30$ .

1.2 Plano frontal

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_

b) Épura: \_\_\_\_\_



c) Traços: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

d) É plano projetante? \_\_\_\_\_

- $P \in \alpha$  frontal  $\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_.
- $r \subset \alpha$  frontal  $\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_.

e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

f) Retas contidas no plano: \_\_\_\_\_

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: \_\_\_\_\_

h) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

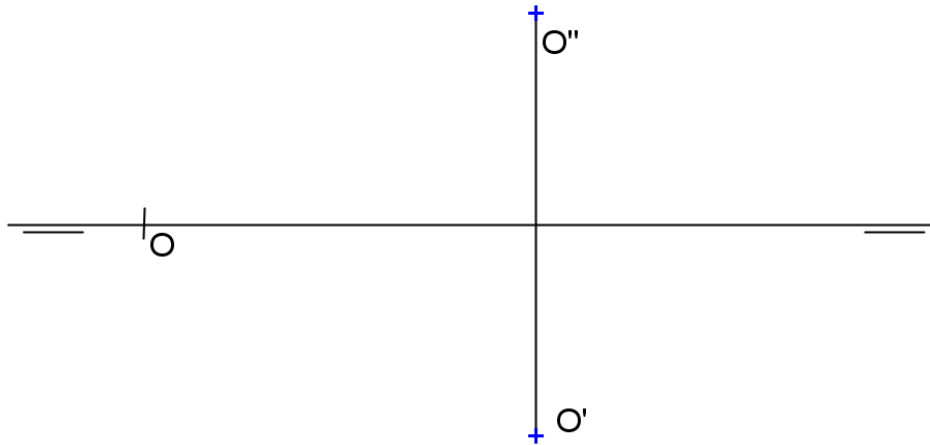
com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_

i) Reta perpendicular ao plano

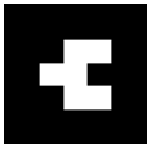
\_\_\_\_\_

**Exercícios**

1. Representar um pentágono regular  $ABCDE$  contido num plano frontal  $\alpha$  sendo dados o centro  $O$ , da circunferência circunscrita ao polígono e o seu raio  $r=30$ , sabendo que o lado  $AB$  forma ângulo de  $30^\circ$  com  $\pi'$ .



2. Representar uma pirâmide dupla, de altura  $h=20$ , com seção equatorial hexagonal em um plano frontal, dados os vértices do hexágono  $A(10,30,20)$ ,  $B(-10,30,00)$ .



3. Representar uma pirâmide hexagonal regular V-ABCDEF, com base sobre um plano frontal, e altura  $h=50$ , dados  $A(10,00,30)$ ,  $B(30,?,10)$ .



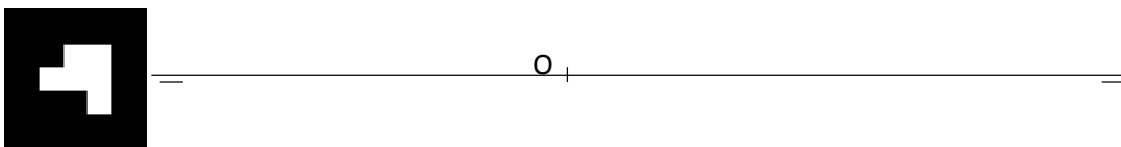
4. Representar um prisma arquimediano de base pentagonal ABCDE contida em um plano frontal, dados 2 vértices consecutivos  $A(20,10,00)$  e  $B(50,?,20)$ .



5. Representar um tetraedro regular ABCD com uma face contida em um plano frontal, dados A(10,10,20) e B(50,?,60).



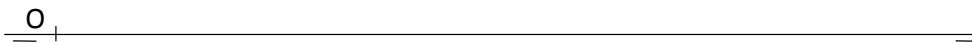
6. Representar um cilindro circular reto com a base de centro O apoiada num plano frontal, dados: O(-10,10,30), r=30, h=40.



7. Representar um cilindro circular oblíquo com as bases apoiadas em planos frontais, dados os centros das bases  $O(-20,10,20)$  e  $P(50,40,40)$ , e  $r=20$ .



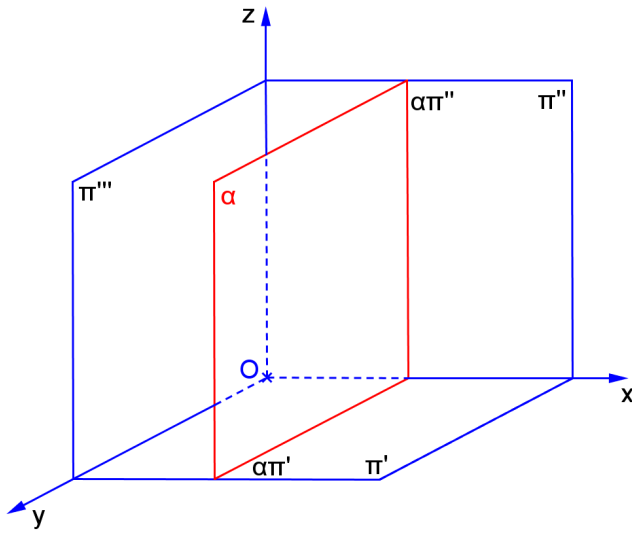
8. Representar um cone circular oblíquo com a base apoiada em um plano frontal, dados o centro da base  $O(20,00,30)$  o vértice  $V(70,60,60)$ , e  $r=20$ .



**1.3 Plano de Perfil**

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_

b) Épura: \_\_\_\_\_



c) Traços: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

d) É plano projetante? \_\_\_\_\_

-  $P \in \alpha$  de perfil  $\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_.

-  $r \subset \alpha$  de perfil  $\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_.

e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

f) Retas contidas no plano: \_\_\_\_\_

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: \_\_\_\_\_

h) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

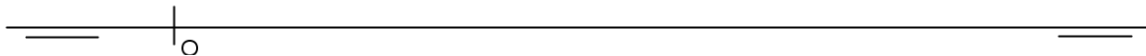
com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_

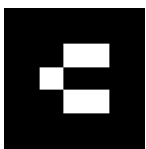
i) Reta perpendicular ao plano:  
 \_\_\_\_\_

**Exercícios**

1. Representar um triângulo equilátero ABC contido num plano  $\alpha$  de perfil sendo dados A(30,20,20) e B(?,40,40).

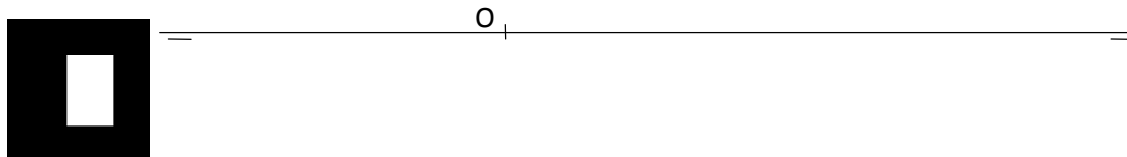


2. Representar uma pirâmide dupla, com altura  $h=40$ , base quadrada, dados os vértices da seção equatorial A(30,10,20) e B(30,20,40).

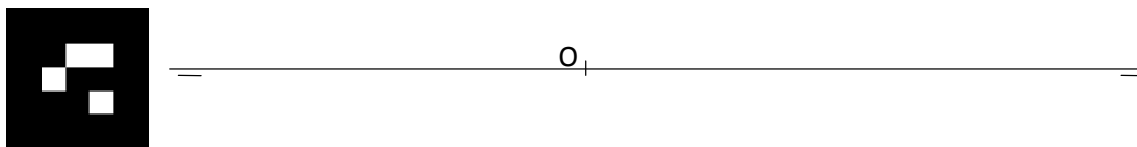




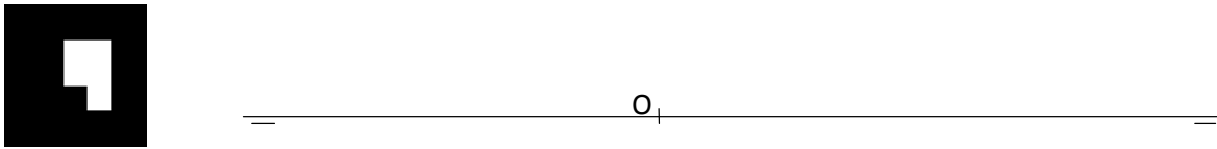
3. Representar um prisma quadrangular regular ABCD-EFGH com as bases contidas em planos de perfil, dados A(50,20,40) e B(? ,10,20), e h=40.



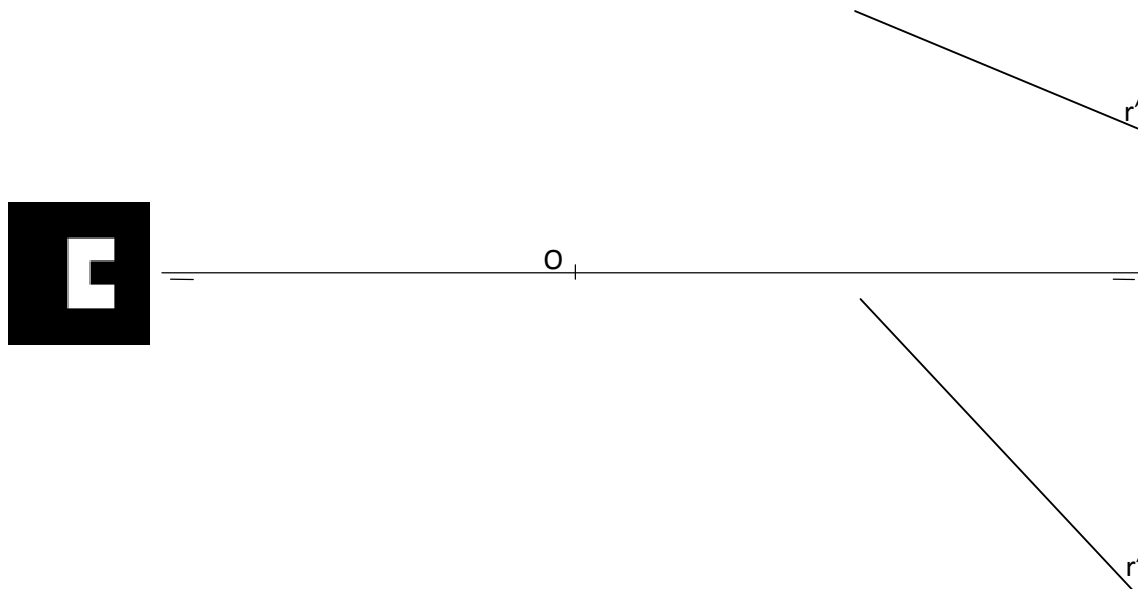
4. Representar uma pirâmide hexagonal regular V-ABCDEF com a base em um plano de perfil, dados A(10,00,30), B(? ,20,10) e altura h=50.



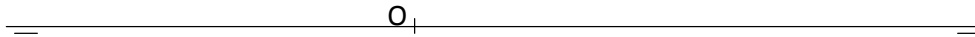
5. Representar as projeções da pirâmide oblíqua de base hexagonal contida em um plano de perfil, dados os vértices da base A e B e o vértice principal V:  $A(70,30,20)$ ,  $B(70,10,25)$ ,  $V(-10,45,05)$ . Representar a seção plana nesta pirâmide por um plano horizontal de cota 15.



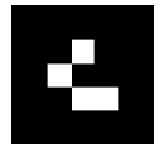
6. Representar as projeções do prisma oblíquo de base quadrada contida em um plano de perfil, dados os vértices da base A e B e a reta r paralela às arestas laterais do prisma:  $A(10,15,20)$ ,  $B(10,30,40)$  e  $h=40$ . Representar a seção plana no prisma por um plano frontal de afastamento 25.



7. Representar as projeções do cilindro circular oblíquo com as bases contidas em planos de perfil, dados os centros das bases P e Q e o raio 11. Representar as projeções da seção plana neste cilindro feita pelo plano horizontal de cota 20: P(25,25,45), Q(70,35,00).

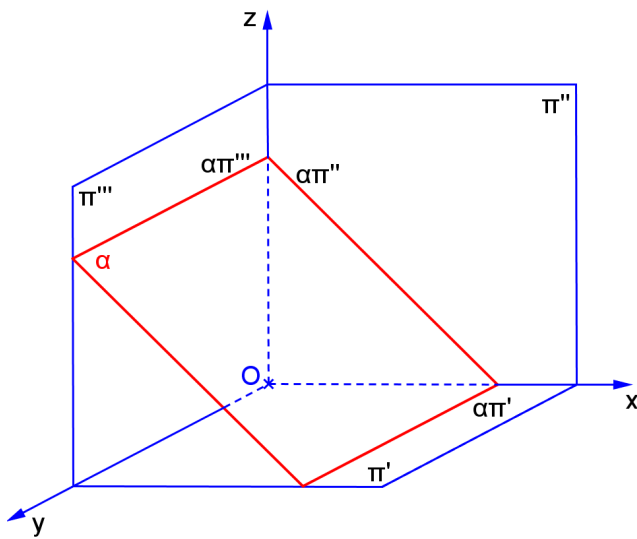


8. Representar as projeções de uma esfera de raio 20, sabendo-se que os segmentos AB e CD representam as projeções da seção plana da esfera por um plano de perfil: A(50,20,40), B(50,20,20), C(50,10,30), D(50,30,30). Representar as projeções da seção plana nesta esfera com um plano horizontal de cota 45.



1.4 Plano de topo

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_



b) Épura: \_\_\_\_\_

c) Traços: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

d) É plano projetante? \_\_\_\_\_

e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

f) Retas contidas no plano: \_\_\_\_\_

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: \_\_\_\_\_

h) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

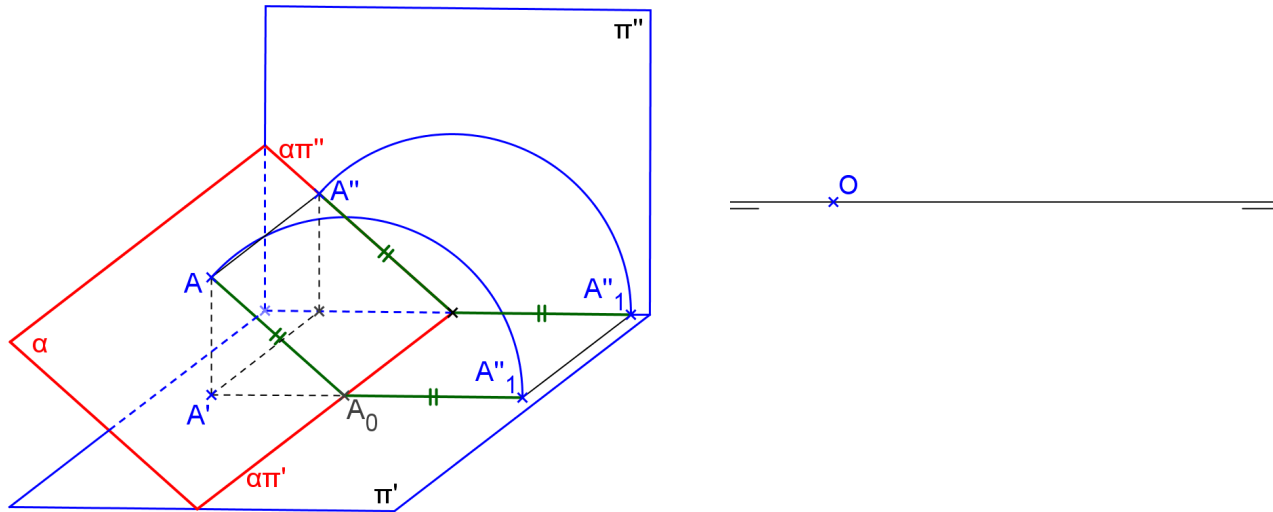
com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_

i) Reta perpendicular ao plano: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

k) Processo do rebatimento

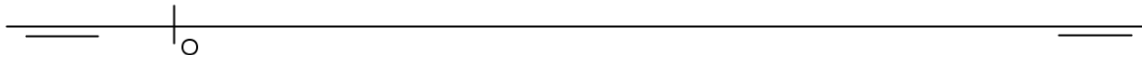
Rebatimento sobre  $\pi'$



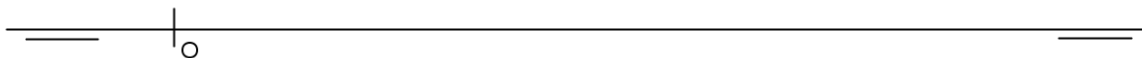
Rebatimento sobre um plano horizontal: basta considerar um plano  $\beta$  horizontal e usar  $(\alpha\beta)$  como eixo do rebatimento, ou seja, utilizar  $(\alpha\beta)'$  como se fosse  $\alpha\pi'$ .

**EXERCÍCIOS**

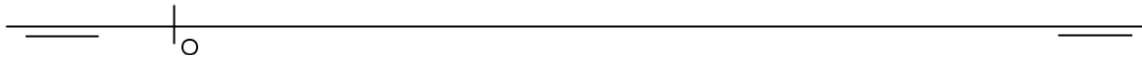
1. Representar o plano de topo  $\alpha$  pertencente ao ponto dado  $A(50,30,40)$  e que forme ângulo de  $30^\circ$  com  $\pi'$ .



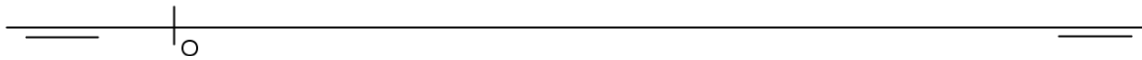
2. Representar um quadrado ABCD contido num plano  $\alpha$  de topo, sendo dados  $A(40,40,10)$  e  $B(20,20,30)$ .



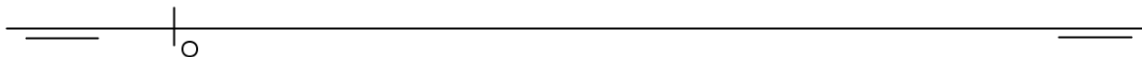
3. Representar um triângulo ABC equilátero contido num plano  $\alpha$  de topo, sendo dados A(40,30,30) e B(20,20,50).



4. Representar um pentágono regular ABCDE contido num plano  $\alpha$  de topo, sendo dados A(20,40,10) e B(40,20,30).



5. Representar um hexágono regular ABCDEF contido num plano de topo  $\alpha$  sendo dados o centro  $O(40,40,30)$  da circunferência circunscrita ao polígono e o seu raio  $r=20$ , sabendo que um de seus lados é frontal. O plano de topo forma ângulo de  $60^\circ$  à esquerda com  $\pi'$ .





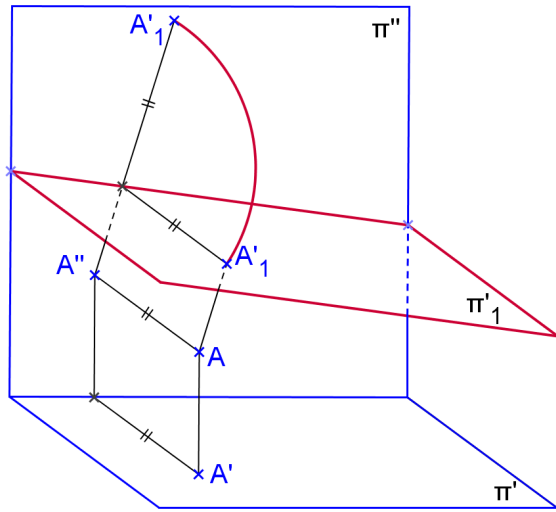
6. Representar uma pirâmide regular quadrangular V-ABCD com a base apoiada em um plano de topo que passa pela origem e forma  $45^\circ$  com  $\pi'$ , dados A(10,20,?) e B(30,00,?), h=50.



7. Representar um prisma quadrangular oblíquo ABCD-EFGH com as bases contidas em planos de topo, dados A(30,20,10), B(50,00,20) e G(25,35,45). Representar a seção feita neste sólido por um plano de topo que passa pela origem e forma  $45^\circ$  com  $\pi'$ .

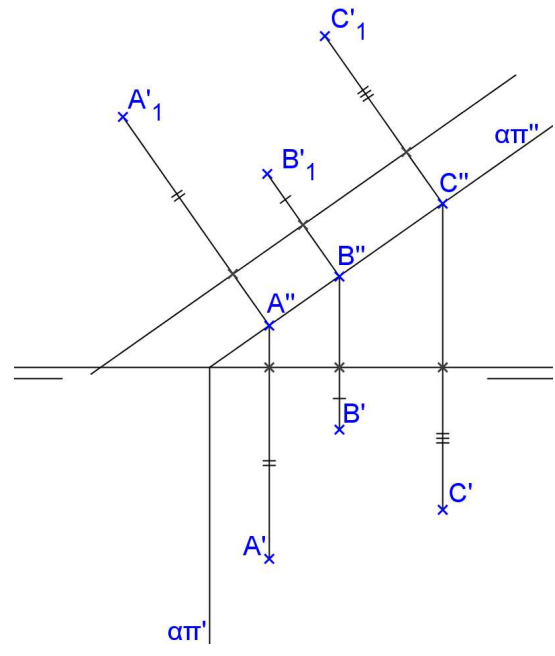
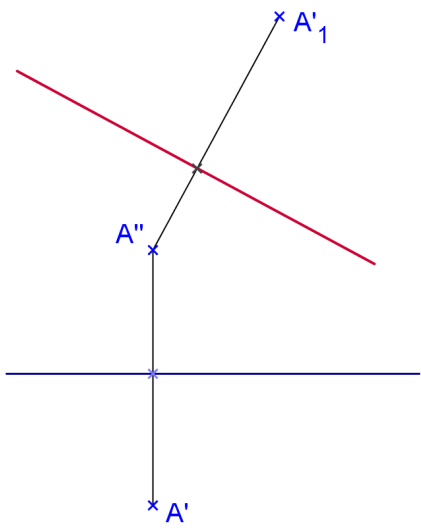


**MUDANÇA DE PLANO HORIZONTAL**

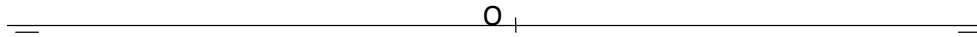


**Propriedades da MPH:**

- $A''$  é o mesmo para os dois sistemas;
- o afastamento é mantido no novo sistema;
- $A''A'_1$  é perpendicular à nova linha de terra.

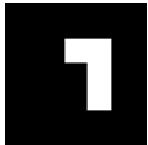


8. Representar um hexaedro regular de aresta AB com uma face sobre o plano de topo  $\alpha$  que contém P(10,00,00) e forma  $45^\circ$  com  $\pi'$ . Dados A(-30,40,?), B(-10,20,?). Representar a seção plana feita neste sólido por um plano de topo que passa por R(60,00,00) e forma  $30^\circ$  com  $\pi'$ .

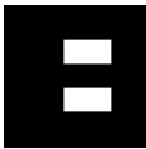


9. Representar a seção plana feita com o plano  $\gamma$  que passa por Z(70,0,0) e forma  $30^\circ$  com  $\pi'$  no octaedro do exercício 9 da página 57.

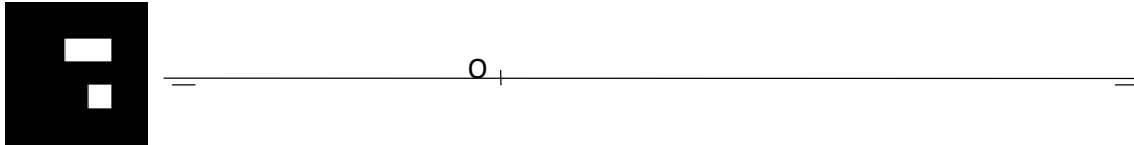
10. Representar um prisma arquimediano hexagonal de aresta AB, apoiado pela base num plano  $\alpha$  de topo, sendo dados os vértices A(10,00,10) e B(40,10,25).



11. Representar um anti-prisma arquimediano de aresta AB e bases quadradas sobre planos de topo, dada a aresta de uma base: A(0,10,40) e B(30,00,20).



12. Representar um cilindro circular reto com uma base sobre um plano  $\alpha$  de topo que contém  $R(15,00,00)$  e forma  $45^\circ$  com  $\pi'$ , sendo dados os centro das bases  $O(30,30,?)$  e  $P(?,?,45)$  e  $r=20$ . Representar geratrizes com afastamentos iguais a 40, 20 e 45.



---

**Exercícios sobre seção plana**

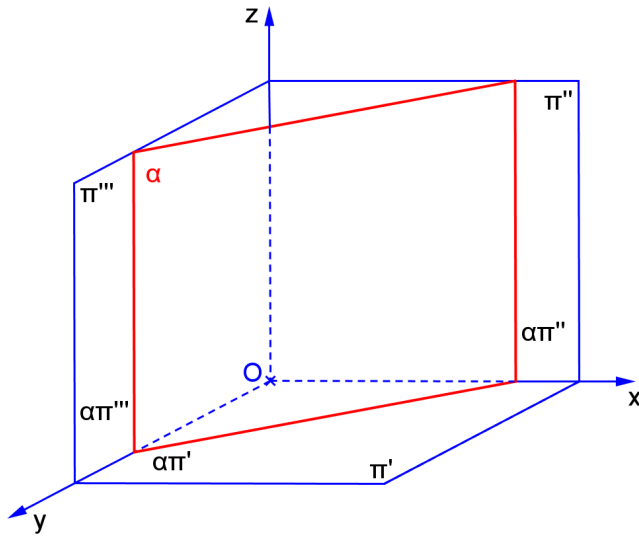
Nos problemas de 1 a 4 considere o plano de topo  $\gamma$  que passa pelo ponto X e forma  $30^\circ$  com  $\pi'$ :

1. Representar a seção plana feita com o plano  $\gamma$ , na pirâmide do exercício 4 da página 51. Encontre a VG da seção e planifique o sólido. X(60,0,20)
2. Representar a seção plana feita com o plano  $\gamma$  na pirâmide do exercício 5 da página 52. Encontre a VG da seção e planifique o sólido. X(70,0,20)
3. Representar a seção plana feita com o plano  $\gamma$  no prisma do exercício 6 da página 53. Encontre a VG da seção e planifique o sólido. X(70,0,20)
4. Representar a seção plana feita com o plano  $\gamma$  no tetraedro do exercício 8 da página 54. X(60,0,20)

**1.5 Plano vertical**

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_

b) Épura: \_\_\_\_\_



c) Traços: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

d) É plano projetante? \_\_\_\_\_

e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

f) Retas contidas no plano: \_\_\_\_\_

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: \_\_\_\_\_

h) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_

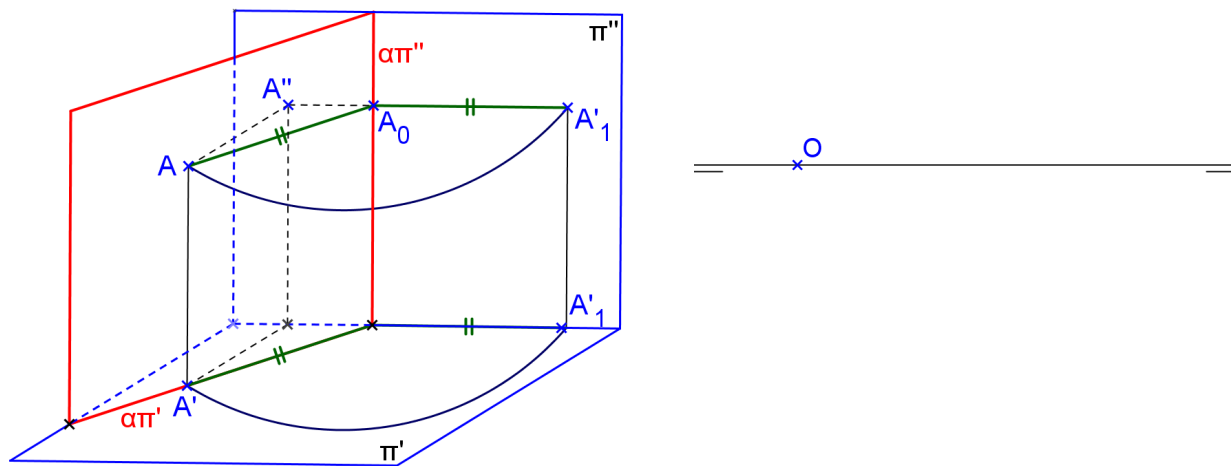
i) Reta perpendicular ao plano:

\_\_\_\_\_

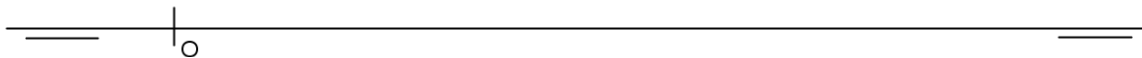


k) Processo do rebatimento

Rebatimento sobre  $\pi''$

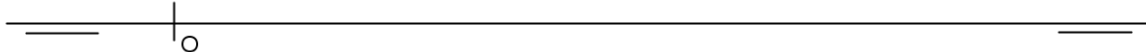


Rebatimento sobre um plano frontal: basta considerar um plano  $\beta$  frontal e usar  $(\alpha\beta)$  como eixo do rebatimento, ou seja, utilizar  $(\alpha\beta)''$  como se fosse  $\alpha\pi''$ .

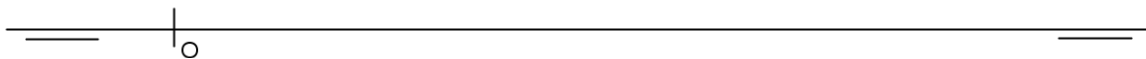


**Exercícios**

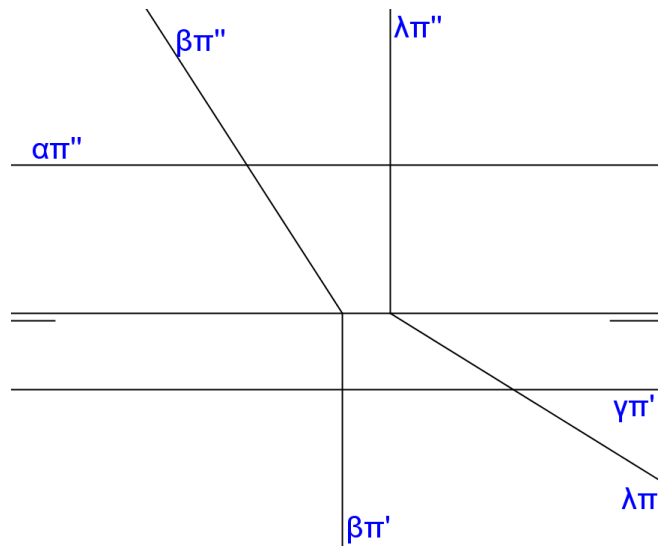
1. Representar o plano vertical  $\alpha$  pertencente ao ponto dado  $A(50,30,40)$  e que forme ângulo de  $60^\circ$  com  $\pi''$ .



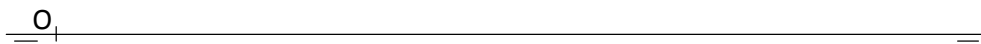
2. Representar um octógono regular ABCDEFGH contido num plano  $\alpha$  vertical, dados o centro da circunferência circunscrita e um vértice:  $O(30,10,45)$  e  $A(10,30,25)$ .



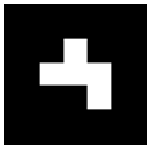
3. Representar a interseção entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$ . Representar a interseção entre os planos  $\gamma$  e  $\lambda$ .



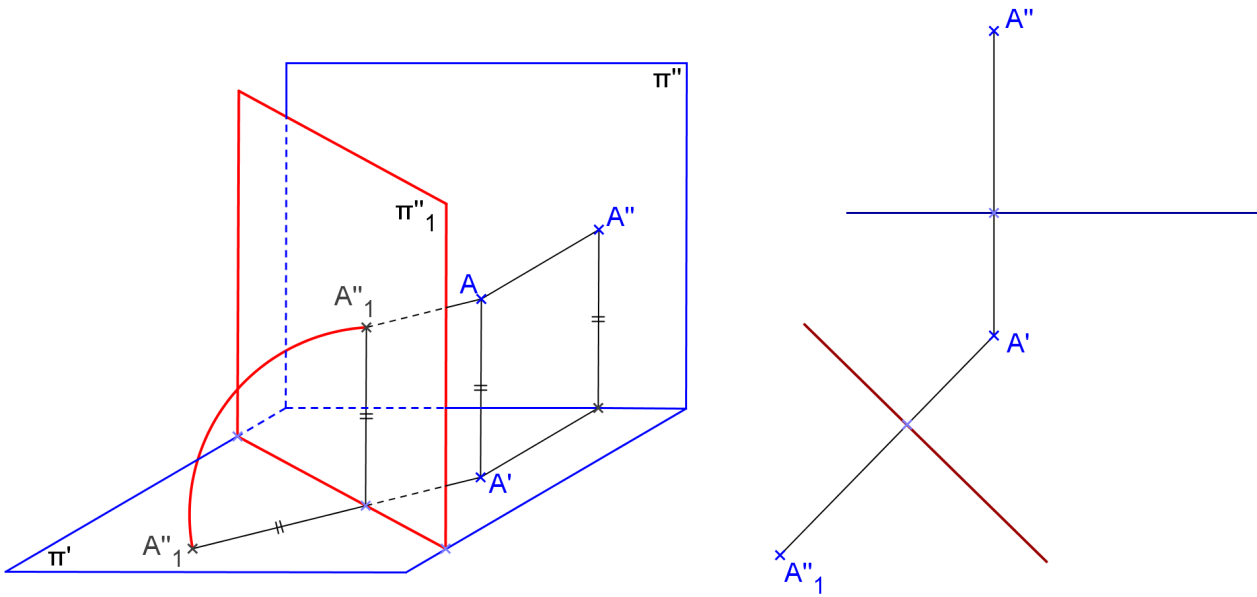
4. Representar um prisma arquimediano de bases pentagonais contidas em planos verticais, dada uma aresta de base AB: A(00,25,25) e B(25,15,50).



5. Representar um prisma oblíquo de bases quadradas ABCD-EFGH contidas em planos verticais, dadas as arestas AB (base) e AG (lateral): A(-30,15,0), B(-10,05,20), G(40,40,30).

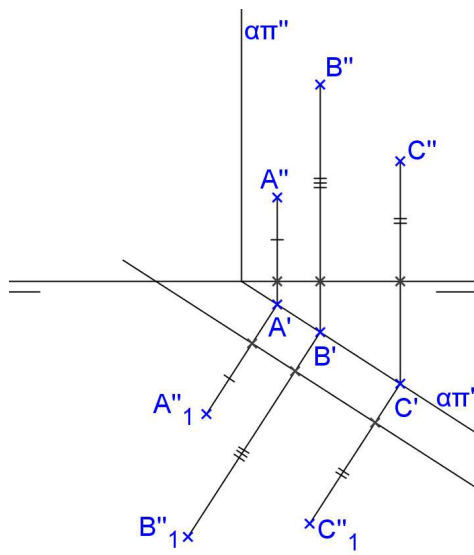


**MUDANÇA DE PLANO HORIZONTAL**

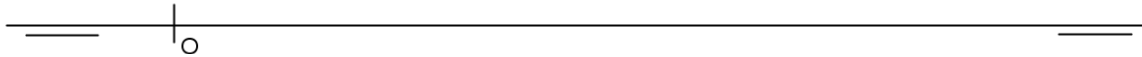


**Propriedades da MPV:**

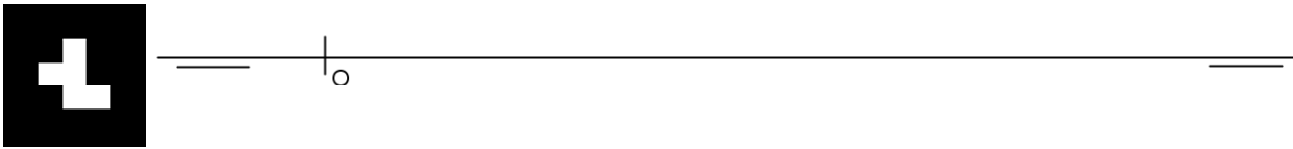
- $A'$  é o mesmo para os dois sistemas;
- a cota é mantida no novo sistema;
- $A'A''_1$  é perpendicular à NLT.



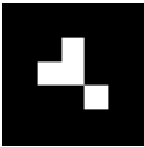
6. Representar um hexaedro regular de aresta AB, com a face ABCD contida em um plano vertical: A(10,10,10), B(30,30,30).



7. Representar um octaedro regular de aresta AB, sabendo-se que a face ABC está contida em um plano  $\alpha$  vertical, sendo dados os vértices A(10,10,10) e B(40,30,0).



8. Representar um cilindro circular oblíquo com as bases em planos verticais que formam  $30^\circ$  com  $\pi''$ , com centros  $O(10, 20, 10)$  e  $P(-40, 40, 30)$  e raios das bases  $r=20$ . Representar a seção plana neste cilindro por um plano vertical que passa por  $R(-30, 0, 0)$  e forma  $45^\circ$  com  $\pi''$ .





9. Construa as projeções de um cone circular reto com base em um plano frontal, dado o centro da base  $O(10,10,30)$ , altura  $h=50$  e o raio da base  $r=25$ . Representar a seção plana neste cone por um plano vertical que passa pelos pontos  $A(-55,0,0)$  e  $B(40,30,0)$ .



### **Exercícios sobre seção plana**

Nos problemas 1, 2, 3 e 4 considere o mesmo plano vertical  $\theta$  que passa por Z e forma  $30^\circ$  com  $\pi''$ :

1. Representar a seção plana feita com o plano  $\theta$ , o prisma do exercício 4 da pagina 60. Encontre a verdadeira grandeza da seção e planifique o sólido. Z(70,0,0)
2. Representar a seção plana feita com o plano  $\theta$  no tetraedro do exercício 5 da pagina 61. Encontre a verdadeira grandeza da seção e planifique o sólido. Z(100,0,0)
3. Representar a seção plana feita com o plano  $\theta$  no cilindro do exercício 7 da pagina 62.
4. Representar a seção plana feita com o plano  $\theta$  no cone do exercício 8 da pagina 62.

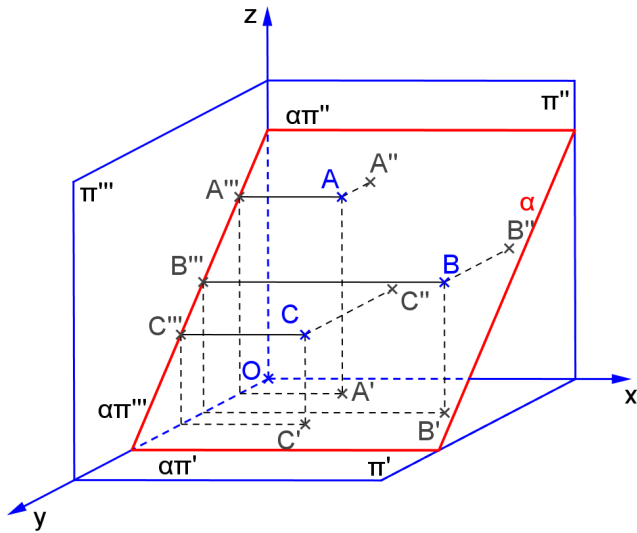
### **Exercícios Propostos**

1. Representar um quadrado ABCD contido num plano  $\alpha$  vertical, sendo dados A(30,20,50) e B(50,50,60).
2. Representar um hexágono regular ABCDEF contido num plano  $\alpha$  vertical, sendo dados A(50,20,30) e B(40,30,10).
3. Representar um pentágono regular ABCDE contido num plano vertical  $\alpha$  sendo dados o centro O(40,30,40) da circunferência circunscrita ao polígono e o seu raio  $r=30$ , sabendo que um de seus lados é horizontal. O plano vertical forma ângulo de  $60^\circ$  à esquerda com  $\pi''$ .
4. Representar uma pirâmide reta de altura  $h=50$ , cuja base seja um quadrado ABCD contido num plano  $\alpha$  vertical, sendo dados os vértices A(50,30,60) e B(70,50,40).
5. Representar um tetraedro regular ABCD, sendo que a base ABC está contida num plano  $\alpha$  vertical. São dados A(50,30,40) e B(20,10,50).
6. Representar um octaedro regular ABCDEF, sabendo-se que a seção equatorial ABCD está contida num plano vertical  $\alpha$ , sendo dados A(40,50,10) e B(20,20,20).

1.6 Plano paralelo à linha de terra

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_

b) Épura:



c) Traços: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

d) É plano projetante? \_\_\_\_\_

e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

f) Retas contidas no plano: \_\_\_\_\_

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: \_\_\_\_\_

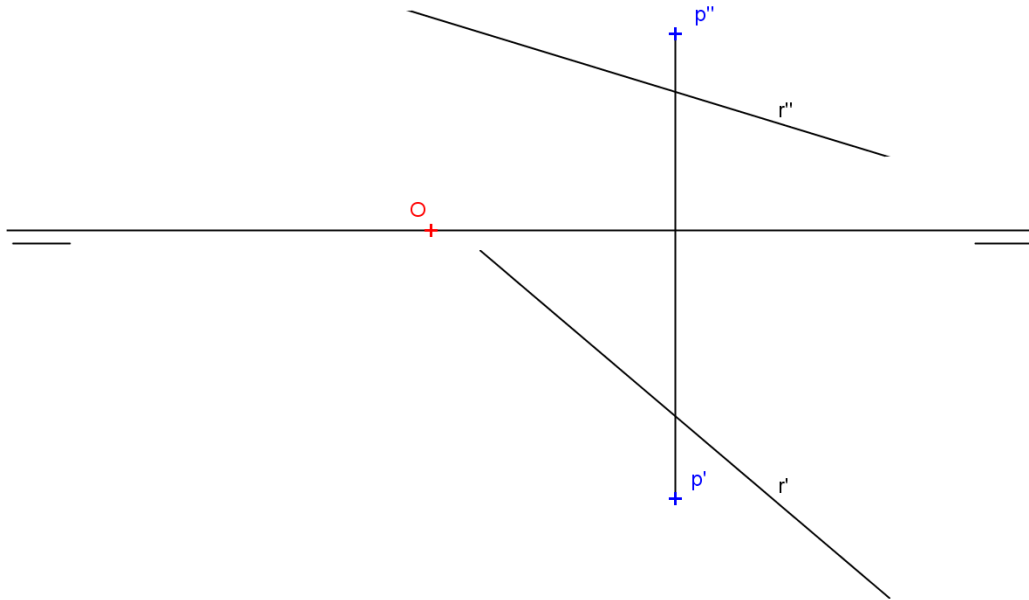
h) Ângulos:

com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_

j) Reta perpendicular ao plano:

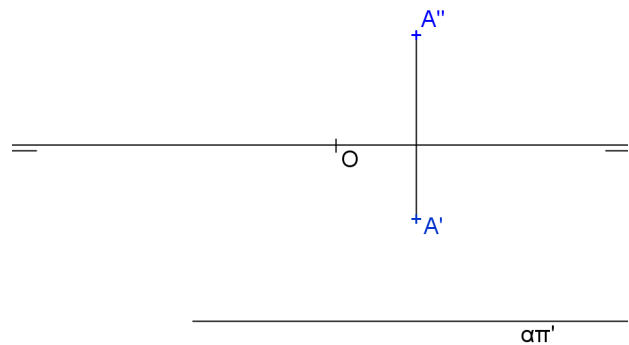
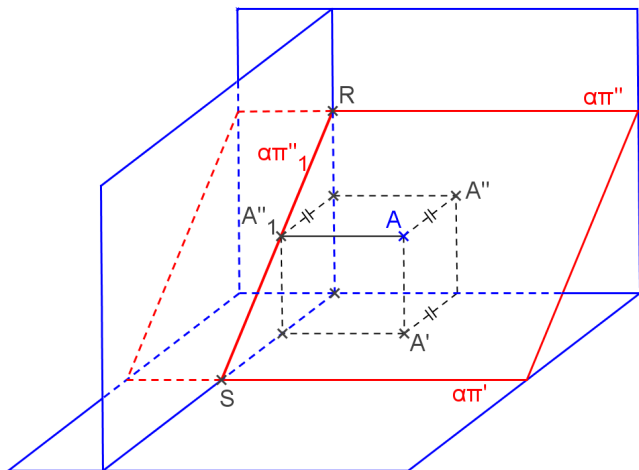


**MUDANÇA DE PLANOS DE PROJEÇÃO**

Para encontrar a VG de uma figura contida em um plano paralelo à linha de terra precisamos de 2 mudanças de planos de projeção:

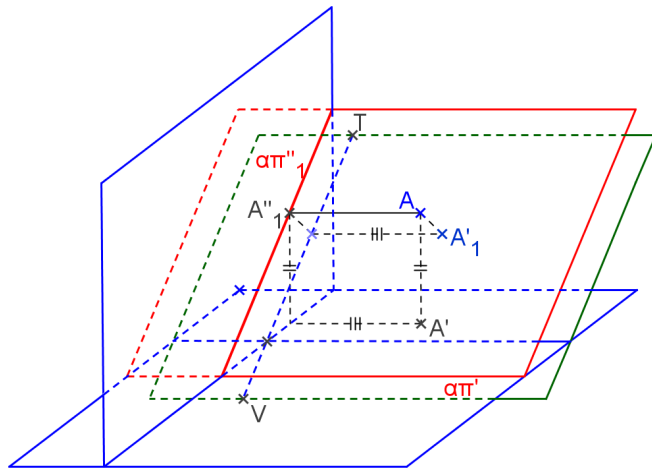
1. **Mudança de  $\pi''$**  para transformar o plano paralelo à linha de terra em plano de topo:

basta considerar a nova linha de terra perpendicular a  $\alpha\pi'$ , e fazer a mudança de plano das segundas projeções:



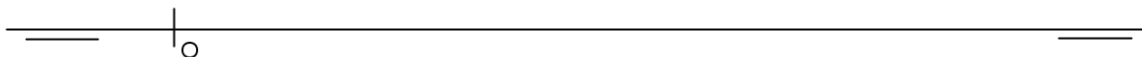
**2. Mudança de  $\pi'$**  para transformar o plano de topo em plano horizontal:

basta considerar a nova linha de terra paralela a  $\alpha\pi''_1$ , e fazer a mudança de plano das primeiras projeções:

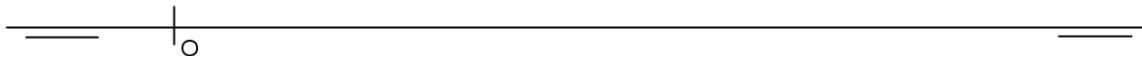


**EXERCÍCIOS**

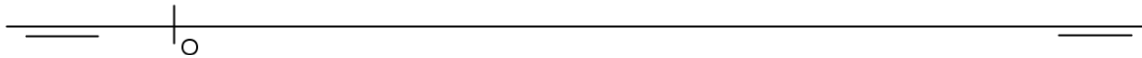
1. Representar o 1º, 2º e 3º traços do plano  $\alpha$  paralelo à linha de terra, definido pelos pontos A(40,10,30) e B(80,40,10).



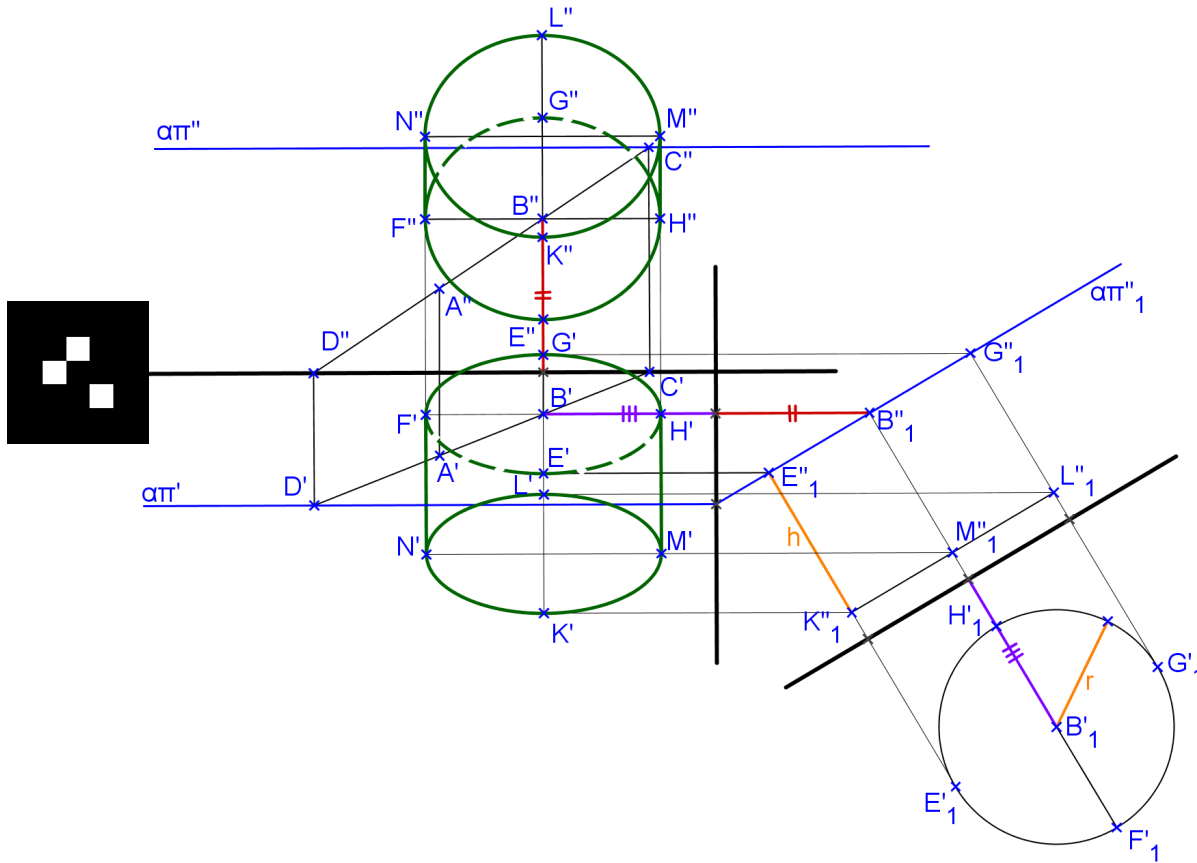
2. Representar um quadrado ABCD contido num plano  $\alpha$  paralelo à linha de terra, sendo dados A(40,10,40) e B(80,40,20).



3. Representar um triângulo equilátero ABC contido num plano  $\alpha$  paralelo à linha de terra, sendo dados A(50,10,40) e B(20,30,20).



4. Represente as projeções do cilindro circular reto com as bases apoiadas em planos paralelos à linha de terra. São dados a altura  $h$ , o raio das bases  $r$ , os pontos  $A$  e  $B$  do plano de uma das bases e o centro de uma base é o ponto  $B$ .

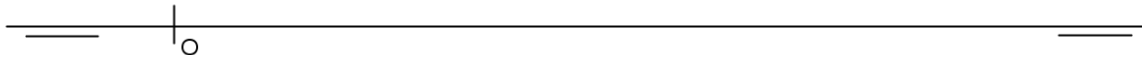


Realidade Virtual: [paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/](http://paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/)

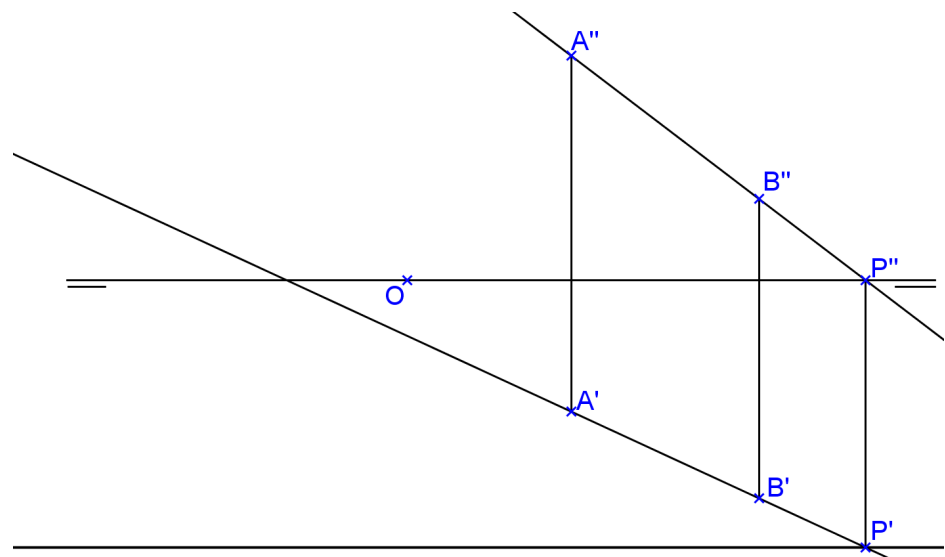
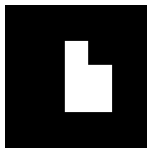
Realidade Aumentada: [paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/ra1.html](http://paulohscwb.github.io/geometria-descritiva/ra1.html)



5. Representar um prisma reto de base hexagonal ABCDEF contida num plano  $\alpha$  paralelo à linha de terra e altura  $h=30$ . São dados  $A(10,40,20)$  e  $B(20,60,10)$ .



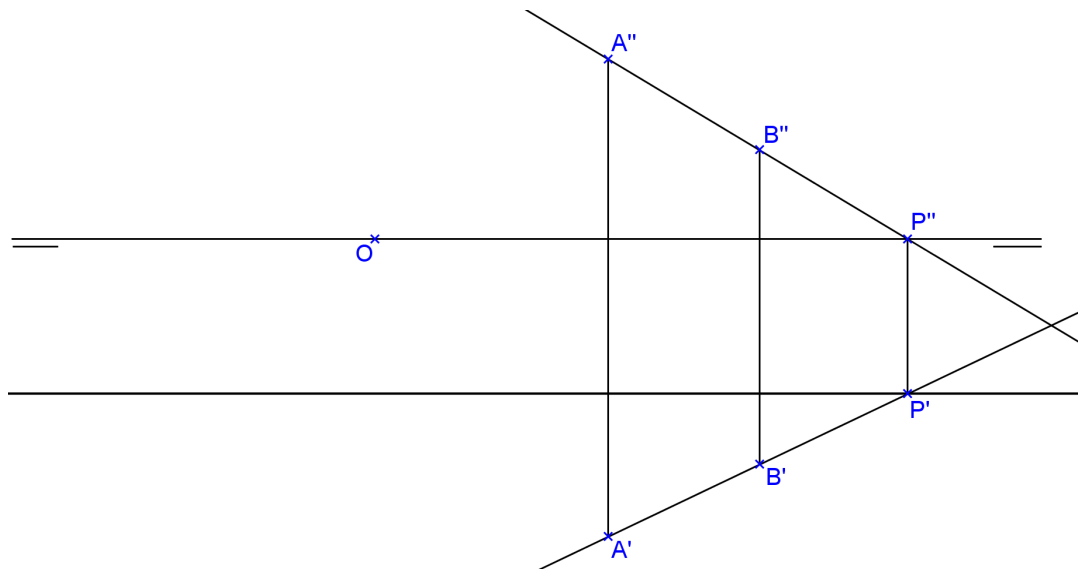
6. Construa as projeções de um hexaedro regular com uma face contida no plano paralelo à linha de terra que contém os vértices A e B. Encontre as projeções da seção plana neste hexaedro por um plano de topo que passa pela origem e forma  $45^\circ$  com  $\pi'$ .



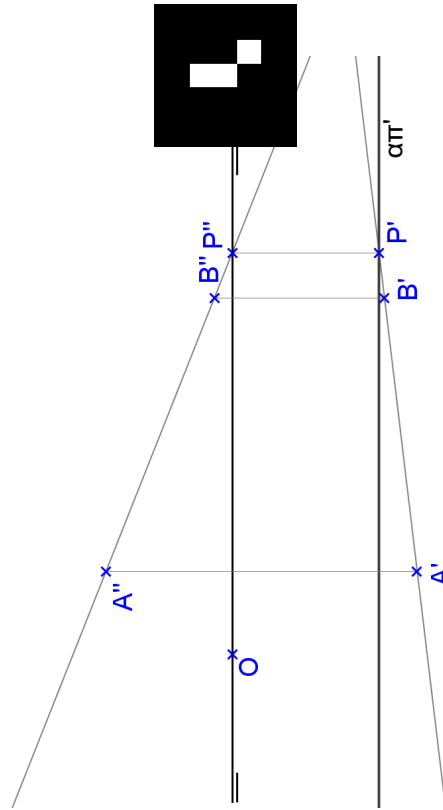
7. Represente as projeções de um prisma reto de base hexagonal ABCDEF contida num plano  $\alpha$  paralelo à linha de terra e altura  $h=30$ . Dados  $A(10,40,40)$  e  $B(20,50,20)$ .



8. Construa as projeções de uma pirâmide hexagonal regular de altura  $h=50$ , com a base contida em um plano paralelo à linha de terra, dados os vértices da base A e B. Encontrar as projeções da seção plana nesta pirâmide feita por um plano vertical que passa pela origem e forma  $45^\circ$  com  $\pi''$ .



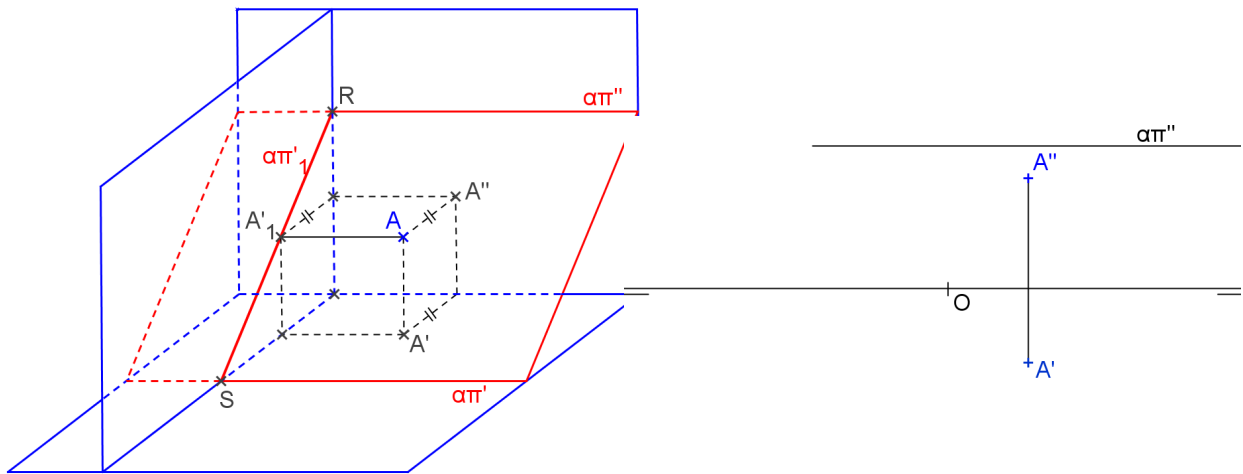
9. Construa as projeções de um octaedro regular de aresta AB com a seção equatorial ABCD contida no plano paralelo à linha de terra definido por A e B.



Outra maneira de encontrar a VG de uma figura contida em um plano paralelo à linha de terra é o inverso da anterior:

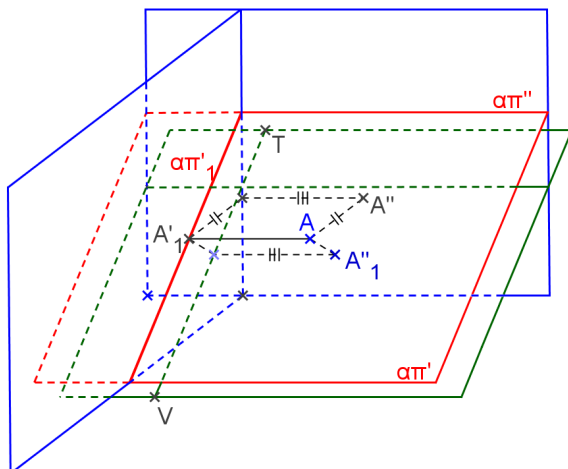
**1. Mudança de  $\pi'$  para transformar o plano paralelo à linha de terra em plano vertical:**

basta considerar a nova linha de terra perpendicular a  $\alpha\pi''$ , e fazer a mudança de plano das primeiras projeções:



**2. Mudança de  $\pi''$  para transformar o plano vertical em plano frontal:**

basta considerar a nova linha de terra paralela a  $\alpha\pi'_1$ , e fazer a mudança de plano das segundas projeções:



---

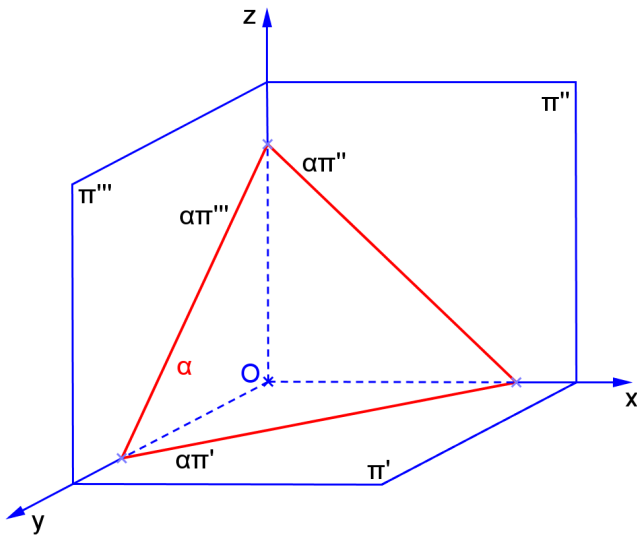
**Exercícios Propostos**

1. Construir as projeções de uma pirâmide hexagonal regular de altura  $h=50$ , com a base contida em um plano paralelo à linha de terra, dados os vértices da base  $A(10,20,40)$  e  $B(30,40,30)$ . Encontrar as projeções da seção plana nesta pirâmide feita por um plano vertical que passa pela origem e forma  $45^\circ$  com  $\pi''$ .
2. Construir as projeções de um cilindro circular reto de altura  $h=40$  com as bases contidas em planos paralelos à linha de terra, os raios das bases iguais a 20, onde o centro de uma das bases é o ponto  $O(10,20,30)$ .
3. Representar as projeções do hexaedro regular de aresta  $AB$ , com a base sobre o plano paralelo à linha de terra  $a(A,B)$ . Dados:  $A(45,15,15)$  e  $B(65,10,30)$ .

1.7 Plano qualquer

a) Característica espacial: \_\_\_\_\_

b) Épura: \_\_\_\_\_



c) Traços: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

d) É plano projetante? \_\_\_\_\_

e) Tem alguma projeção em VG? \_\_\_\_\_

f) Retas contidas no plano: \_\_\_\_\_

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: \_\_\_\_\_

h) Ângulos:

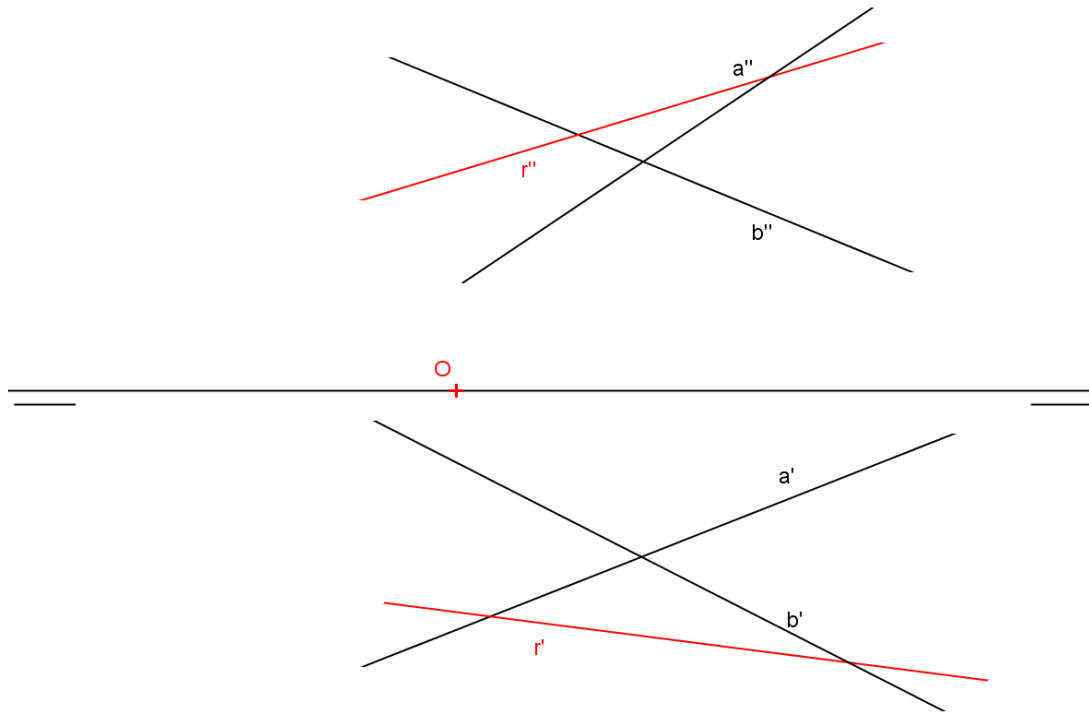
com  $\pi'$  \_\_\_\_\_

com  $\pi''$  \_\_\_\_\_

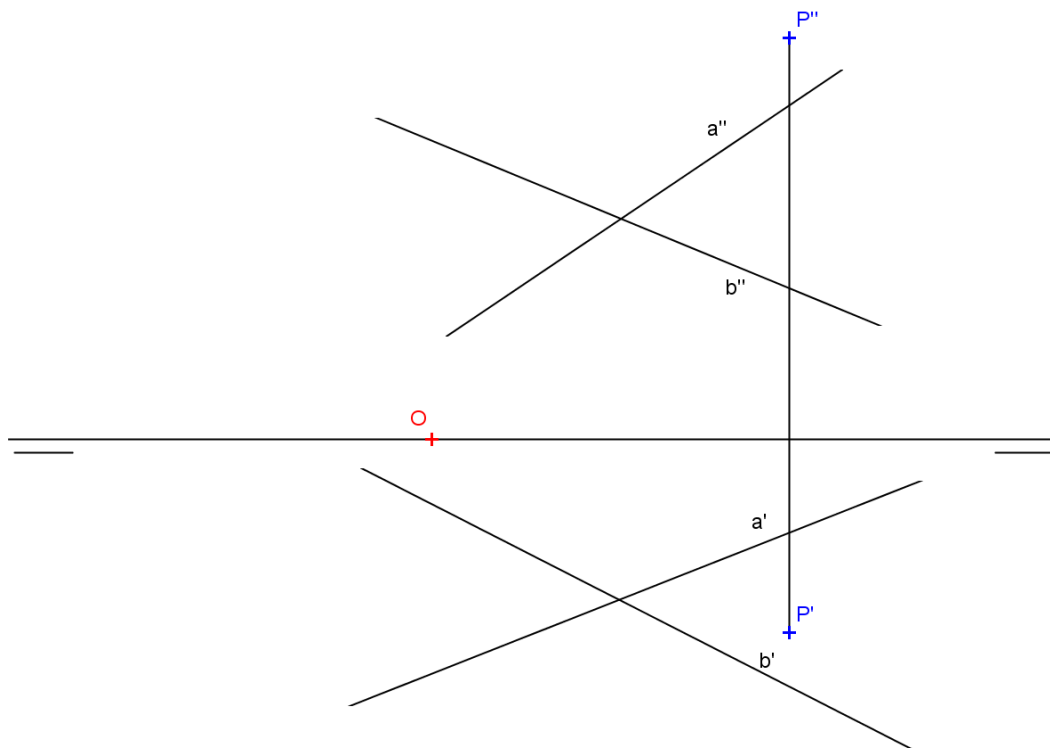
com  $\pi'''$  \_\_\_\_\_



i) Traço de reta no plano:



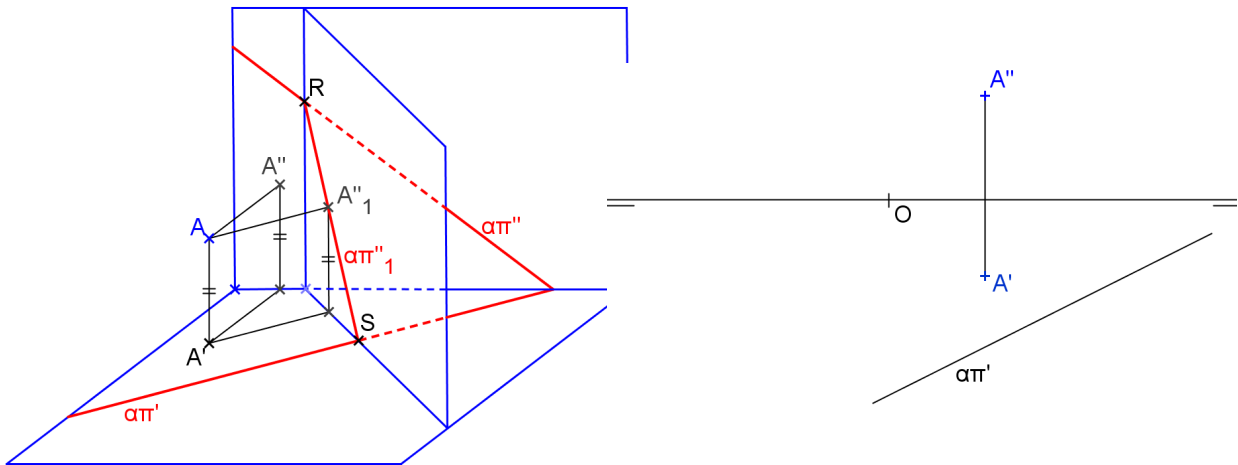
j) Reta perpendicular ao plano:



Para encontrar VG de uma figura contida em um plano qualquer precisamos de 2 mudanças de planos de projeção:

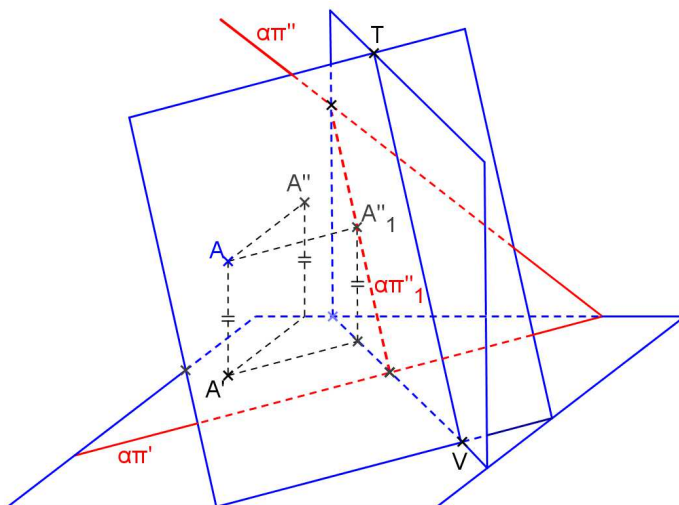
**1. Mudança de  $\pi''$  para transformar o plano qualquer em plano de topo:**

basta considerar a nova linha de terra perpendicular a  $\alpha\pi'$ , e fazer a mudança de plano das segundas projeções:



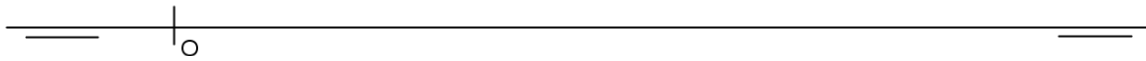
**2. Mudança de  $\pi'$  para transformar o plano de topo em plano horizontal:**

basta considerar a nova linha de terra paralela a  $\alpha\pi''_1$ , e fazer a mudança de plano das primeiras projeções:

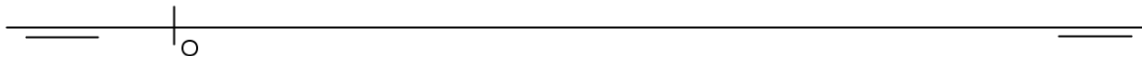


**Exercícios**

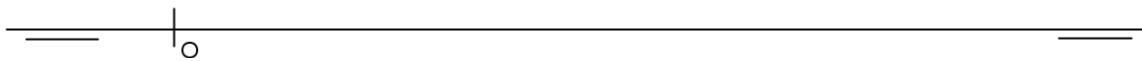
1) Representar o 1º e 2º traços do plano  $\alpha$  qualquer, definido pelos pontos  $A(20,-10,40)$ ,  $B(60,20,10)$  e  $C(90,10,40)$ .



2) Representar um quadrado ABCD contido num plano  $\alpha(A,B,P)$  qualquer, sendo dados  $A(20,20,30)$ ,  $B(50,10,50)$  e  $P(100,60,20)$ .



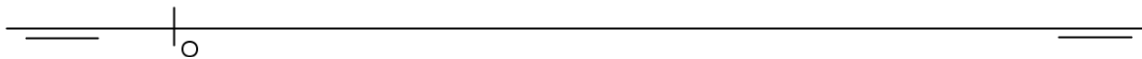
3) Representar um triângulo eqüilátero ABC contido num plano  $\alpha(A,B,P)$  qualquer, sendo dados  $A(20,50,30)$ ,  $B(50,10,50)$  e  $P(100,30,20)$ .



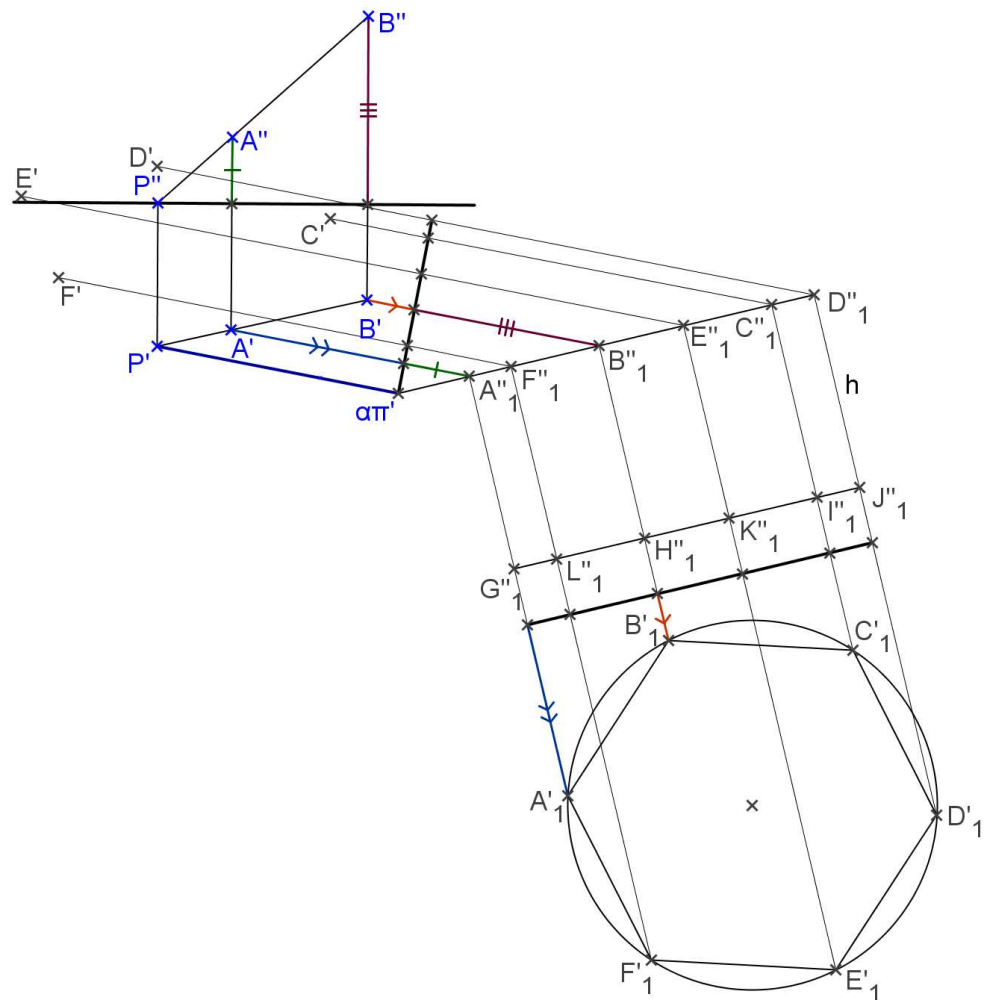
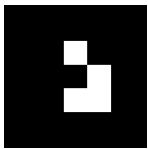
4. Representar um pirâmide reta de base quadrada ABCD contida num plano  $\alpha(A,B,P)$  qualquer e altura  $h=40$ . São dados  $A(40,10,50)$ ,  $B(60,30,40)$  e  $P(10,40,10)$ .



5. Representar um hexaedro regular ABCDEFGH (cubo), sabendo-se que a face ABCD está contida num plano  $\alpha(A,B,P)$  qualquer. São dados  $A(30,20,20)$ ,  $B(50,10,30)$  e  $P(70,60,10)$ .

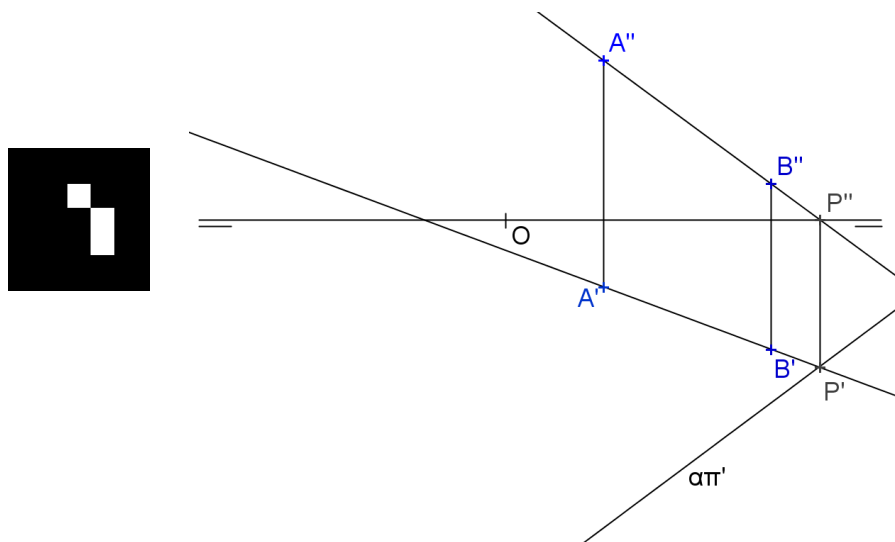


6. Represente as projeções do prisma regular hexagonal, dado o plano da base definido pela aresta AB e o traço  $\alpha\pi'$ .

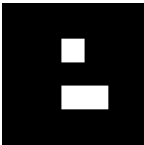




7. Represente as projeções do prisma quadrangular regular de base ABCD contida no plano qualquer definido pelos pontos A, B e pelo traço  $\alpha\pi'$ , sabendo-se que a altura mede  $h=45$ . Representar a seção plana neste prisma feita por um plano de topo que passa pela origem e forma  $45^\circ$  com  $\pi'$ .



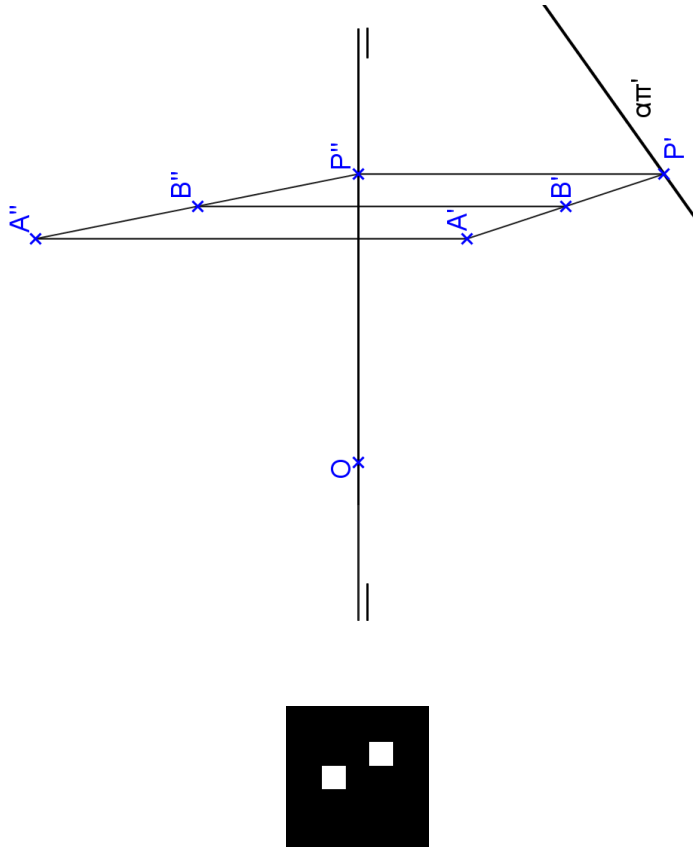
8. Representar as projeções da pirâmide regular hexagonal com a base ABCDEF contida no plano qualquer definido pelos pontos  $A(30,40,10)$ ,  $B(50,30,20)$  e  $P(80,00,70)$ . A altura da pirâmide mede  $h=50$ .



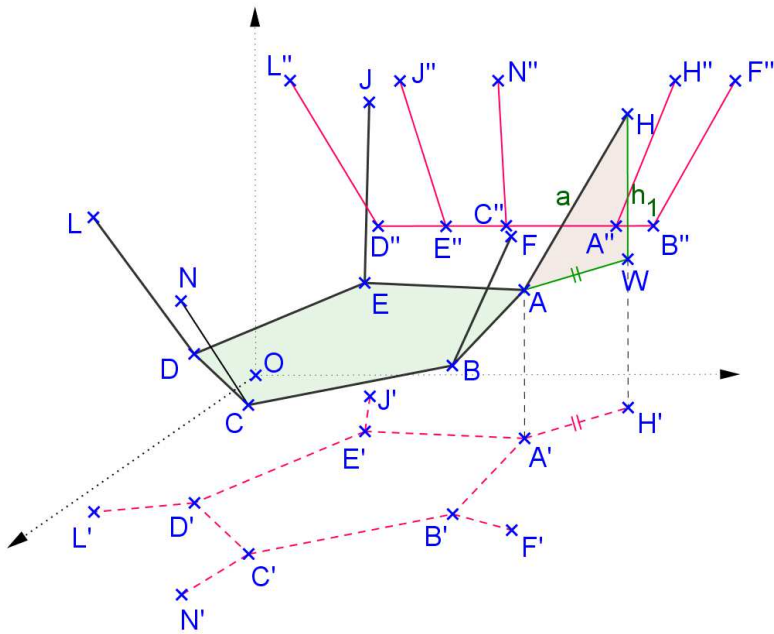
9. Represente as projeções do octaedro regular de aresta AB, com a seção equatorial ABCD contida no plano qualquer  $\alpha(A,B,P)$ . Dados: A(40,40,20), B(60,15,35) e P(30,05,50).

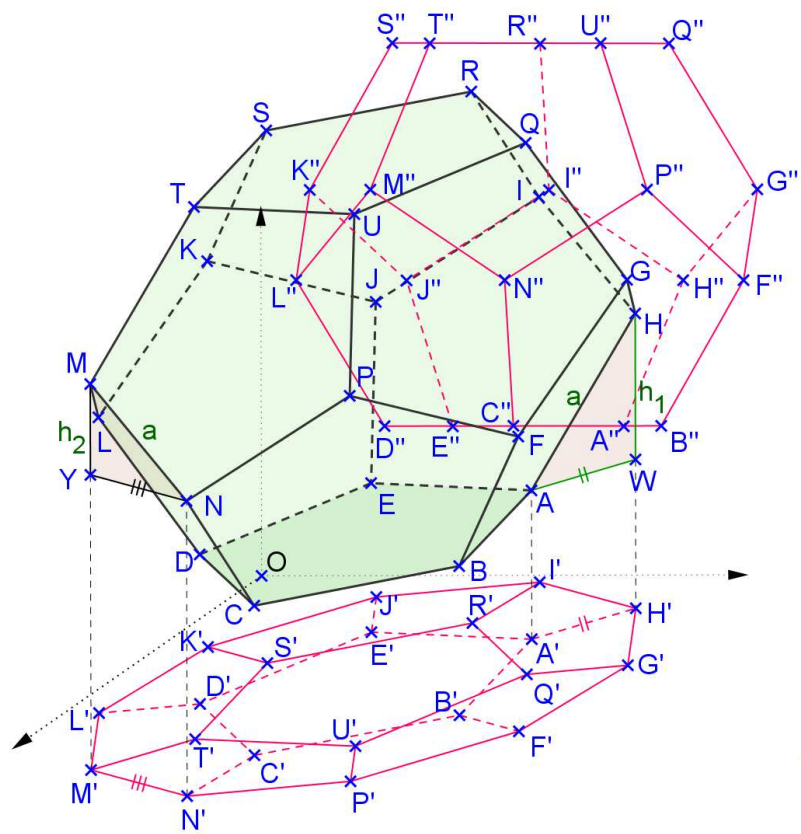
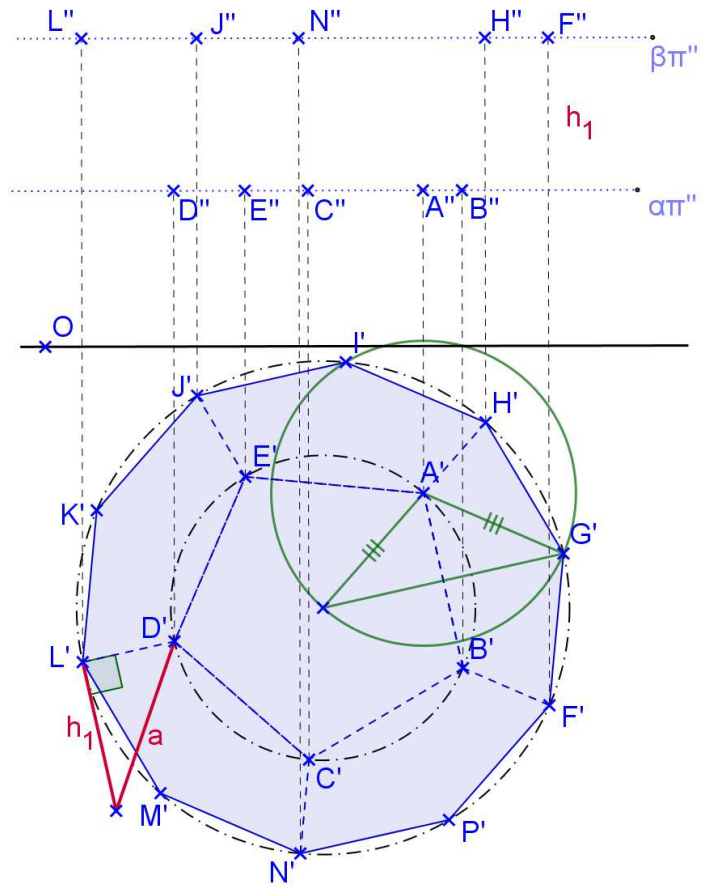


10. Represente as projeções do prisma arquimediano de bases pentagonais contidas em planos quaisquer, dados o traço  $\alpha\pi'$  e a aresta AB.

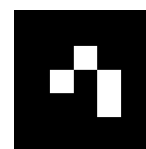
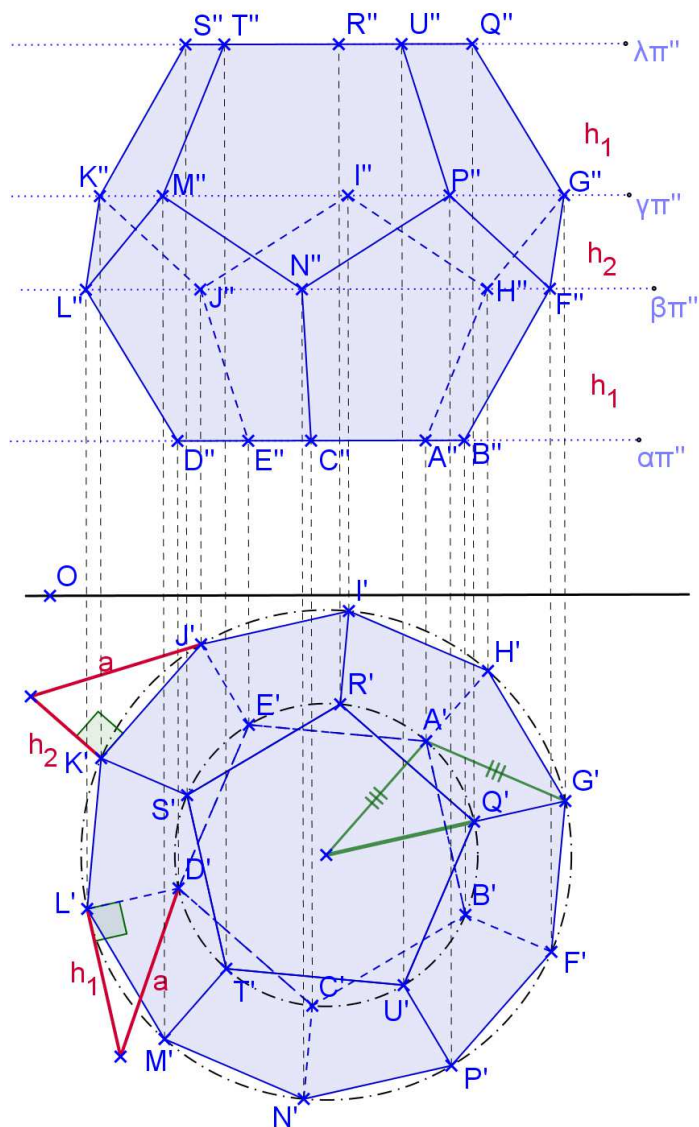


*Dodecaedro Regular*



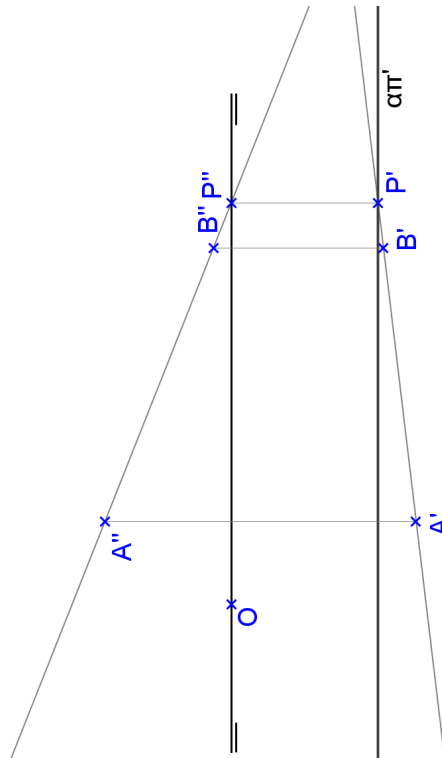


11. Represente as projeções do dodecaedro regular de aresta AB, com a face ABCDE contida no plano horizontal  $\alpha$ . Dados A(60,25,25) B(75,57,25).



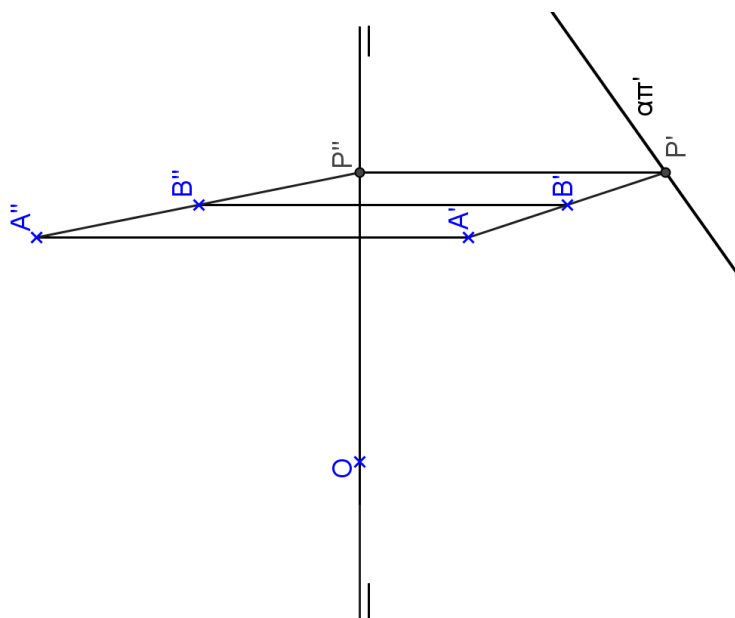
*EXERCÍCIOS DE SÓLIDOS EM PLANOS PARALELO À LINHA DE TERRA E QUALQUER*

1. Construa as projeções de um octaedro regular de aresta AB com a seção equatorial ABCD contida no plano paralelo à linha de terra definido por A e B.





2. Represente as projeções do prisma arquimediano de bases hexagonais contidas em planos quaisquer, dados o traço  $\alpha\pi'$  e a aresta AB.



1) Representar o 1º e 2º traços do plano  $\alpha$  qualquer, definido pelos pontos  $A(20,-10,40)$ ,  $B(60,20,10)$  e  $C(90,10,40)$ .



2) Representar um quadrado ABCD contido num plano  $\alpha(A,B,P)$  qualquer, sendo dados  $A(20,20,30)$ ,  $B(50,10,50)$  e  $P(100,60,20)$ .



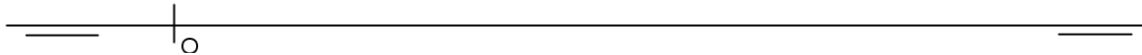
3) Representar um triângulo eqüilátero ABC contido num plano  $\alpha(A,B,P)$  qualquer, sendo dados  $A(20,50,30)$ ,  $B(50,10,50)$  e  $P(100,30,20)$ .



---

4. Representar um pirâmide reta de base quadrada ABCD contida num plano  $\alpha(A,B,P)$  qualquer e altura  $h=40$ . São dados  $A(40,10,50)$ ,  $B(60,30,40)$  e  $P(10,40,10)$ .

5. Representar um hexaedro regular ABCDEFGH (cubo), sabendo-se que a face ABCD está contida num plano  $\alpha(A,B,P)$  qualquer. São dados  $A(30,20,20)$ ,  $B(50,10,30)$  e  $P(70,60,10)$ .



### *Exercícios Propostos*

1. Determine as projeções do prisma regular hexagonal, dado o plano da base definido pela aresta AB e o traço  $\alpha\pi'$ .

2. Representar as projeções do prisma quadrangular regular de base ABCD contida no plano qualquer definido pelos pontos A, B e pelo traço  $ap'$ , sabendo-se que a altura mede  $h=45$ . Representar a seção plana neste prisma feita por um plano de topo que passa pela origem e forma  $45^\circ$  com  $\pi'$ .

3. Representar as projeções da pirâmide regular hexagonal com a base ABCDEF contida no plano qualquer definido pelos pontos A, B e pelo traço  $\alpha\pi'$ . A altura da pirâmide mede  $h=50$ .

4. Represente as projeções do octaedro regular de aresta AB, com a seção equatorial ABCD contida no plano qualquer  $\alpha(A,B,P)$ . Dados:  $A(40,40,20)$ ,  $B(60,15,35)$  e  $P(30,05,50)$ .

5. Representar um octaedro regular ABCDEF, com a face ABC horizontal, sabe-se que a aresta AB forma ângulo  $\theta=75^\circ$  com  $\pi''$  e mede  $m=40$ , é dado o vértice  $A(50,60,20)$ .

6. Representar um dodecaedro regular cuja face ABCDE é horizontal e está inscrita numa circunferência de raio 30 e centro  $O(70,60,10)$ , e sabe-se que a aresta AB é fronto-horizontal.

Representar um icosaedro regular, sabendo-se que uma de suas diagonais maiores é vertical (AL) e uma aresta é fronto-horizontal, é dado o tamanho da aresta  $m=40$  e o vértice  $A(50,50,10)$ .

---

*EXERCÍCIOS PROPOSTOS*

---

1. Determine as projeções do prisma regular hexagonal, dado o plano da base definido pela aresta AB e o traço  $\alpha\pi'$ .
2. Representar as projeções do prisma quadrangular regular de base ABCD contida no plano qualquer definido pelos pontos A, B e pelo traço  $\alpha\pi'$ , sabendo-se que a altura mede  $h=45$ . Representar a seção plana neste prisma feita por um plano de topo que passa pela origem e forma  $45^\circ$  com  $\pi'$ .
3. Representar as projeções da pirâmide regular hexagonal com a base ABCDEF contida no plano qualquer definido pelos pontos A, B e pelo traço  $\alpha\pi'$ . A altura da pirâmide mede  $h=50$ .
4. Represente as projeções do octaedro regular de aresta AB, com a seção equatorial ABCD contida no plano qualquer  $\alpha(A,B,P)$ . Dados:  $A(40,40,20)$ ,  $B(60,15,35)$  e  $P(30,05,50)$ .