UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE EXPRESSÃO GRÁFICA
DISCIPLINA: EXPRESSÃO GRÁFICA I
CURSO: Engenharia Florestal
AUTORES: Luzia Vidal de Souza
Deise Maria Bertholdi Costa

departamento de
EXPRESSÃO
GRÁFICA

Parte 1 - Desenho Geométrico

1. POSTULADOS DO DESENHO GEOMÉTRICO

Assim como no estudo da Geometria se aceitam, sem definir, certas noções primitivas e sem demonstrar certas proposições primitivas (ou postulados, ou axiomas), no estudo do Desenho é necessário aceitar certos postulados que tornam a matéria objetiva.

<u>1º Postulado</u>: Os únicos instrumentos permitidos no Desenho Geométrico, além do lápis, papel, borracha e prancheta, são: a régua não graduada e o compasso.

A graduação da régua ou "escala" só pode ser usada para colocar no papel os dados de um problema ou eventualmente para medir a resposta, a fim de conferi-la.

<u>2º Postulado</u>: É proibido em Desenho Geométrico fazer contas com as medidas dos dados; todavia, considerações algébricas são permitidas na dedução (ou justificativa) de um problema, desde que a resposta seja depois obtida graficamente obdecendo aos outros postulados.

<u>3º Postulado</u>: Em Desenho Geométrico é proibido obter respostas "à mão livre", bem como "por tentativas".

Admite-se, no entanto, o traçado de uma cônica à mão livre ou com o uso de curvas francesas, desde que a resposta de um problema não seja obtida através desse traçado.

2. INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO

Régua, compasso, esquadros, lapiseira grafite B e HB.

3. Formatos de Papel, escalas e legendas

3.1 Legenda

A legenda deve ficar na parte externa ao final do dobramento e representa o espaço onde deverão constar as informações sobre o desenho: número do desenho, título, origem, data, escala, profissional responsável pelo projeto, conteúdo e demais informações pertinentes. Sua altura pode variar, porém a largura é especificada pela ABNT, conforme apresentado na tabela 2. O espaço reservado para a legenda somado à margem direita sempre resultará num total de 185mm. Na Figura 6 é apresentado um modelo de legenda. O título deve estar centralizado.

Tabela 2 – Formato do papel e margens

Formato	Legenda
A0 e A1	175mm
A2, A3 e A4	178mm

<table>
<tr><td colspan="4">TÍTULO
COLOCAR O TÍTULO</td></tr>
<tr><td>CURSO</td><td colspan="2">DATA</td><td rowspan="3">TRABALHO</td></tr>
<tr><td>DISCIPLINA EXPRESSÃO GRÁFICA - TURMA</td><td>UNID.</td><td>ESC.</td></tr>
<tr><td>ALUNO(A)</td><td colspan="2">NOTA</td></tr>
</table>

Figura 6 – Modelo de Legenda

3.2 Cotagem

Para que um objeto possa ser fabricado é necessário que se forneça sua forma e dimensões. As dimensões mostradas no desenho recebem o nome de cotas e a técnica de representá-las chama-se cotagem. As cotas podem ser colocadas dentro ou fora do desenho, com a máxima clareza, de modo a admitir interpretação única. A linha de cota é fina e traçada sempre paralela à dimensão representada. O valor representa a dimensão em milímetros ou outra unidade, conforme indicação na legenda. Os valores representam as medidas reais do objeto e a escala será indicada na legenda.

Nas extremidades da linha de cota são colocadas setas, com comprimentos de 2 a 3mm e largura de aproximadamente 1/3 deste comprimento. Estas setas são delimitadas por linhas de extensão, que ficam ligeiramente afastadas do desenho. As regras de cotagem podem ser encontradas na ABNT.

4. LUGARES GEOMÉTRICOS, ÂNGULOS E SEGMENTOS

4.1. O Método dos Lugares geométricos

Os problemas em Desenho Geométrico resumem-se em encontrar pontos. E para determinar um ponto basta obter o cruzamento entre duas linhas.

Definição: Um conjunto de pontos do plano constitui um lugar geométrico (LG) em relação a uma determinada propriedade P quando satisfaz às seguintes condições:
a) Todo ponto que pertence ao lugar geométrico possui a propriedade P;
b) Todo ponto que possui a propriedade P pertence ao lugar geométrico.

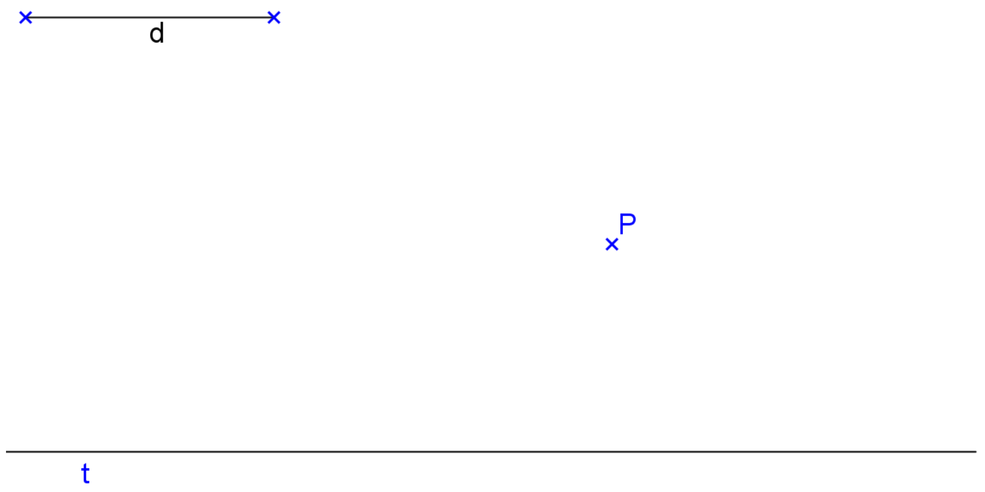
Observação: Na resolução de problemas, procuramos construir graficamente uma determinada figura que satisfaça as condições impostas (ou propriedades). Geralmente, estas condições impostas são lugares geométricos construtíveis com régua e compasso. O emprego de figuras que constituem lugares geométricos na resolução de problemas gráficos é chamado de Método dos Lugares Geométricos. Na discussão do problema deve constar o número de possíveis soluções.

4.2 Lugar Geométrico 1 - Circunferência

Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano situados a uma distância constante, r, de um ponto fixo O é a circunferência de centro O e raio r.
Notação: Circunf(O,r).

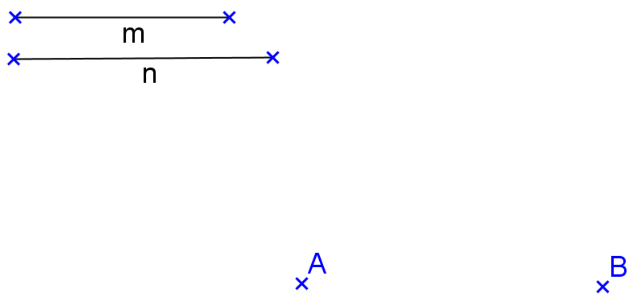
Exercícios:

1. Dados o ponto P, a reta t e uma distância d. Determinar um ponto X da reta t que esteja à distância d do ponto P.



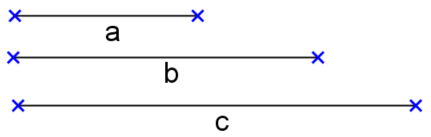
Discussão: ____________________

2. Dados os pontos A e B, e as distâncias m e n. Obter um ponto X que esteja situado à distância *m* de A e *n* de B.



Discussão: ___________________

3. Construir um triângulo ABC sendo dados os três lados a, b e c.

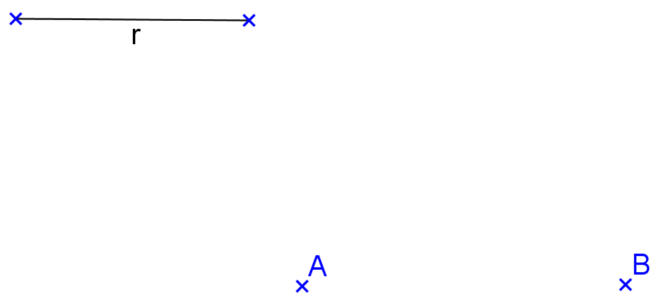


Discussão: ___________________

<u>Observação</u>: Construir um triângulo, equivale a determinar 3 pontos (vértices). Devemos levar em consideração: a posição, a forma e o tamanho.

<u>Propriedade dos triângulos</u>: um triângulo fica determinado em forma e tamanho quando dele são conhecidos 3 elementos, sendo pelos menos um deles linear, isto é, um lado ou uma mediana, etc.

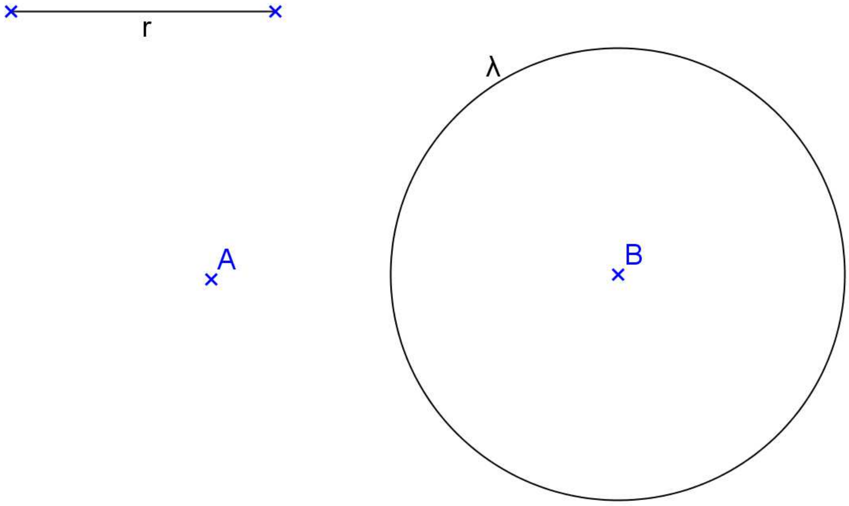
4. Dados os pontos A e B, e uma distância r. Construir a circunferência que passa pelos pontos A e B e que tenha raio igual a r.



Discussão: ____________________

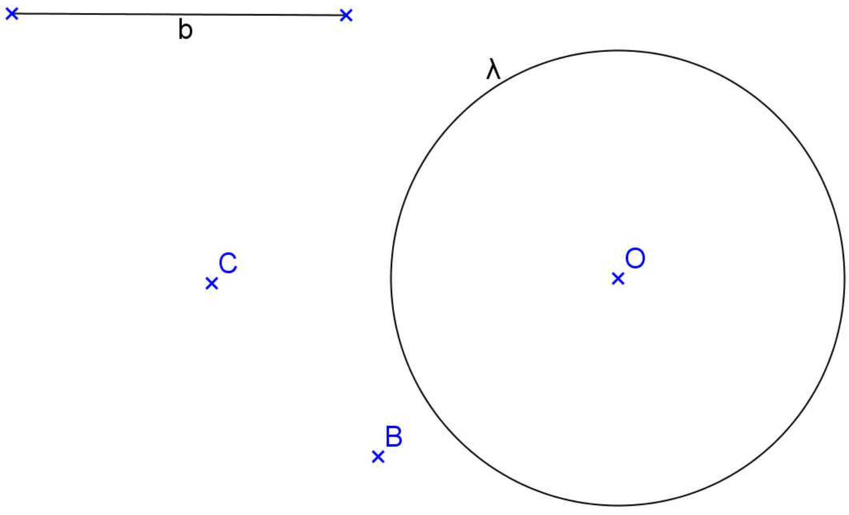
Exercícios propostos:

1. Dados o ponto A, a circunferência λ e a distância r. Determinar um ponto X de λ que esteja à distância r do ponto A.



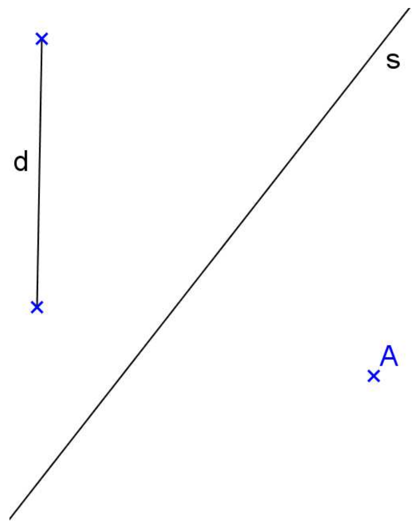
Discussão: ___________________

2. Dados os pontos B e C e uma circunferência λ. Construir um triângulo ABC, sendo dado o lado b e sabendo que o vértice A pertence à circunferência λ.



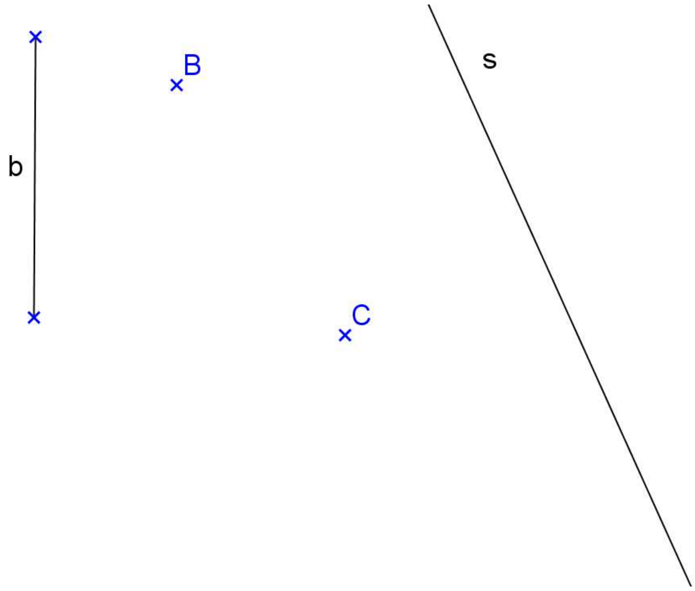
Discussão: ___________________

3. Dados a reta s, o ponto A e a distância *d*. Construir o triângulo ABC, isósceles de base BC, sabendo os lados têm medida *d* e que a base BC está contida na reta s.



Discussão: ___________________

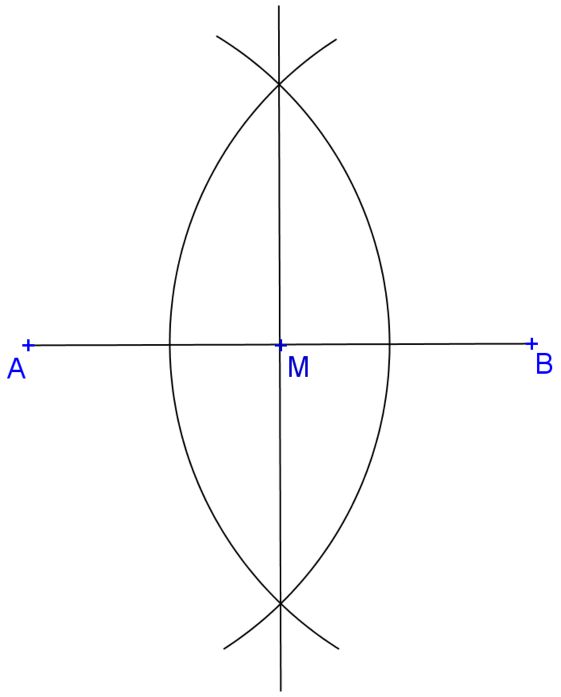
4. Dados os pontos B e C e a reta s. Construir um triângulo ABC, sendo dado o lado b e sabendo que A pertence à reta s.



Discussão:

____

4.2 Lugar Geométrico 2 - Mediatriz



Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano eqüidistantes de dois pontos A e B dados é a mediatriz do segmento AB.

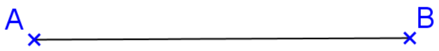
Definição: Uma circunferência é dita circunscrita a um triângulo quando ela passa pelos seus três vértices. O centro da circunferência circunscrita é denominado circuncentro.

Definição: Duas retas são ditas perpendiculares quando são concorrentes e formam ângulos de 90^o entre si.

Definição: A distância de um ponto a uma reta é a medida do segmento traçado do ponto até a reta, perpendicularmente à mesma.

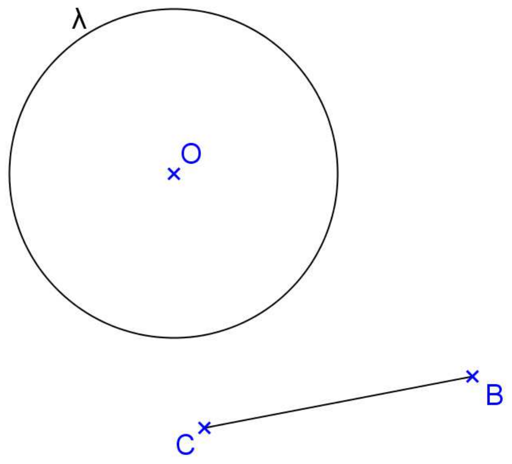
Exercícios:

1. Construir a mediatriz do segmento dado AB.



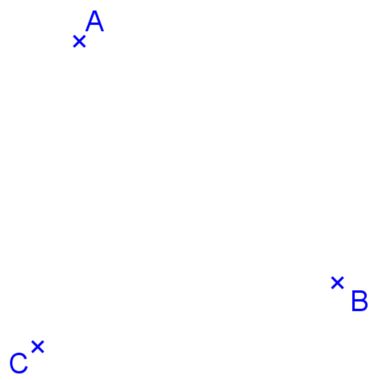
Discussão: ___________________

2. Dados dois pontos B e C e uma circunferência λ. Construir um triângulo ABC, isósceles, de base BC, sabendo-se que o vértice A pertence a λ.



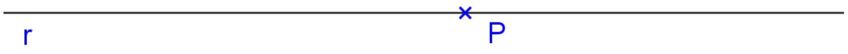
Discussão: ___________________

3. Dados três pontos A, B e C, não colineares, construir a circunferência que passe por esses pontos.

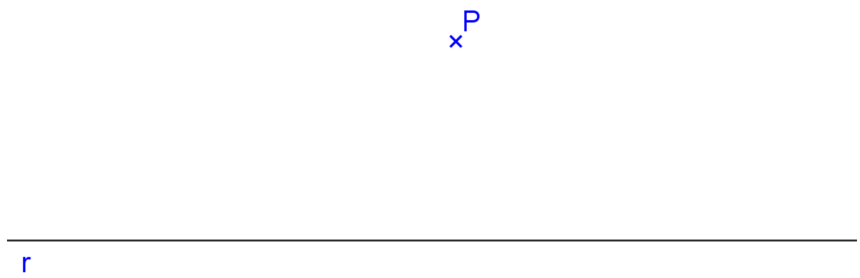


Discussão: ___________________

4. Traçar uma reta perpendicular a uma reta dada r, que passe por um ponto dado P.
a) P $\in$ r;

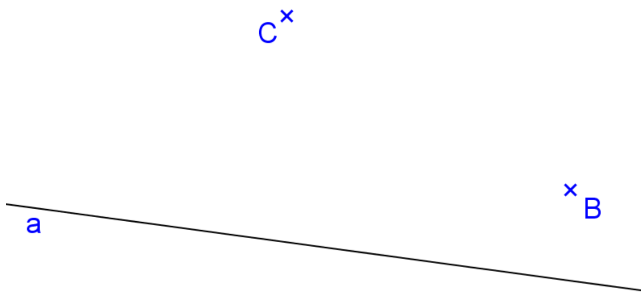


b) P $\notin$ r.



Exercícios Propostos:

1. Dados os pontos B e C e a reta *a*. Determinar um ponto de *a* que seja eqüidistante de B e C.

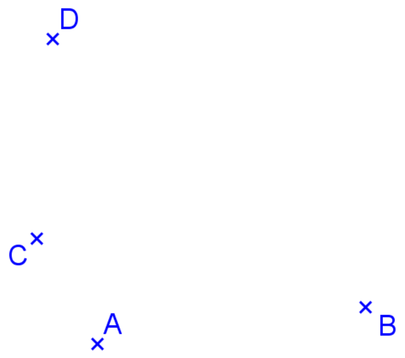


Discussão: ____________________

2. Dados os pontos A, B e C, e uma distância r. Determinar um ponto X, tal que a distância de X a B seja igual a r e X seja eqüidistante de A e C.

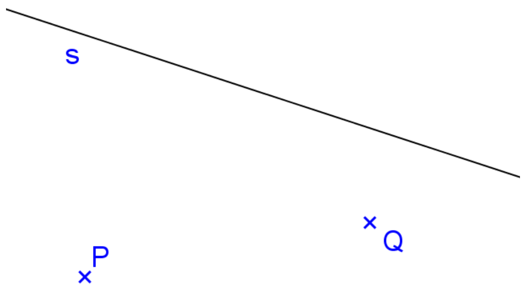
Discussão: ____________________

3. Dados os pontos A, B, C e D. Determinar um ponto X que seja eqüidistante de A e B, e que seja também eqüidistante de C e D.



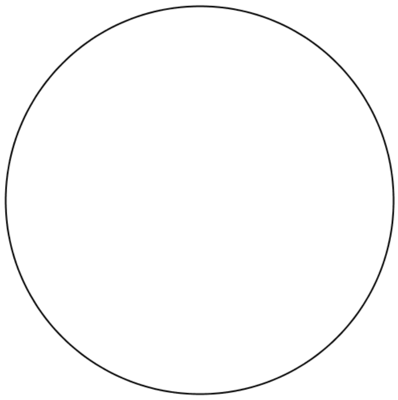
Discussão: ____________________

4. Dados os pontos P e Q e uma reta s. Construir uma circunferência que passe por P e Q, sabendo que seu centro pertence à reta s.

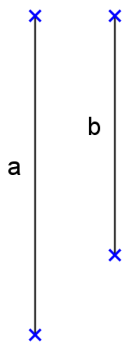


Discussão: ____________________

6. Dada uma circunferência de centro desconhecido, obtenha seu centro.

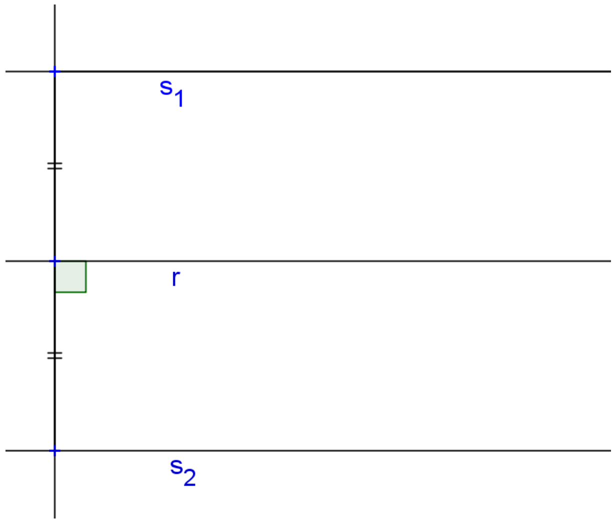


7. Construir um triângulo ABC, sendo dados a, b e Â=90°.



4.3 Lugar Geométrico 3 - Paralelas

<u>Propriedade</u>: O lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância d de uma reta r, compõe-se de duas retas s_1 e s_2, <u>paralelas</u> à reta r e que têm distância até ela igual à distância dada.



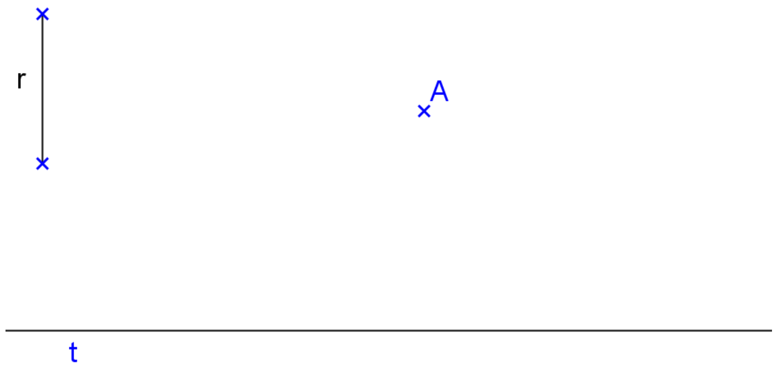
<u>Exercícios</u>:

1. Dados uma reta t e um ponto P, não pertencente a t, traçar pelo ponto P, a reta s paralela a reta t.

2. Dada uma reta r, construir o LG dos pontos que distam 2cm de r.

Discussão: ___________________

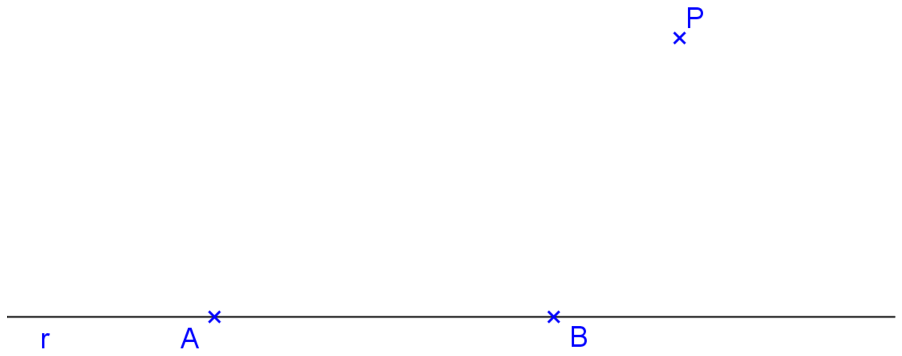
3. São dados um ponto A, uma reta t e uma distância r. Construir uma circunferência de raio r, que passe pelo ponto A e seja tangente à reta t.



Discussão: ____________________

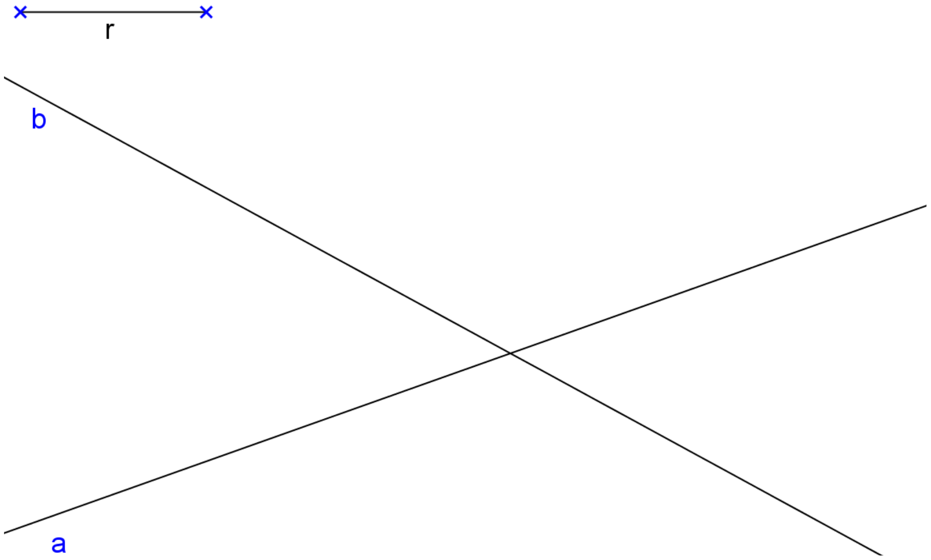
Exercícios Propostos:

1. Dados a reta r, os pontos A e B sobre r e o ponto P fora de r. Construir uma circunferência que passe por A e B, sabendo que o seu centro pertence à reta paralela a r conduzida por P.

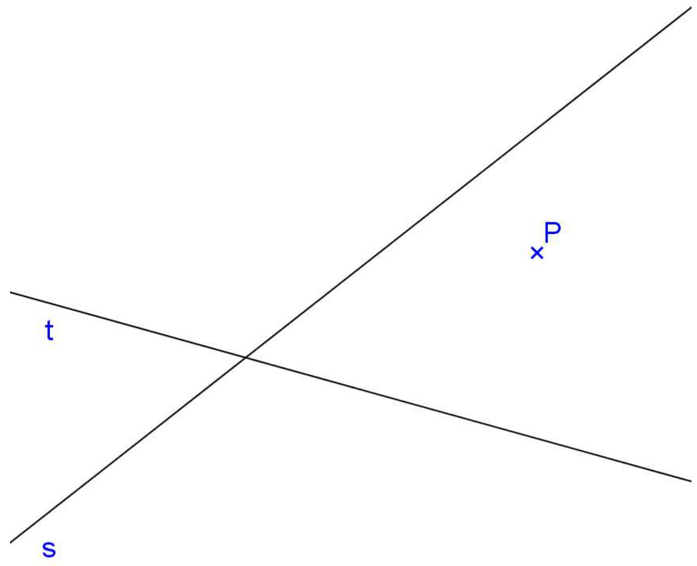


Discussão: ____________________

2. Dadas duas retas a e b concorrentes, construir uma circunferência de raio r que seja tangente às duas retas.

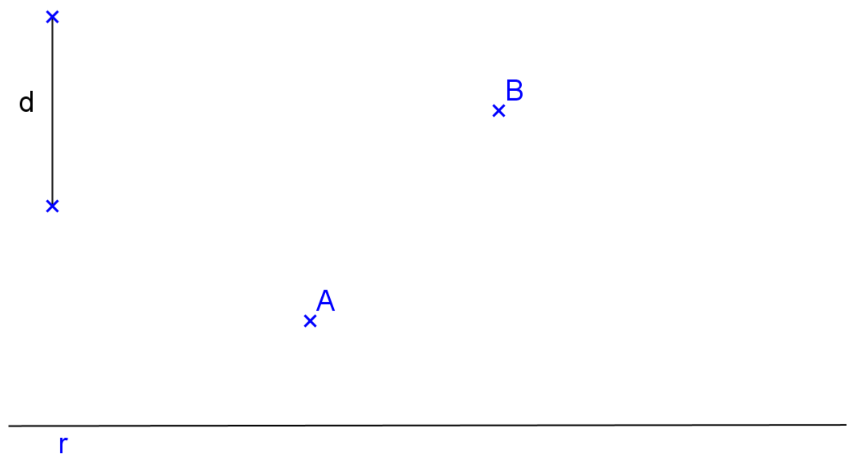


3. Dadas duas retas concorrentes s e t e um ponto P fora delas. Determinar a reta r que passe por P e seja paralela à reta t. Construir uma circunferência tangente à reta t, sabendo que o seu centro é o ponto de interseção das retas r e s.



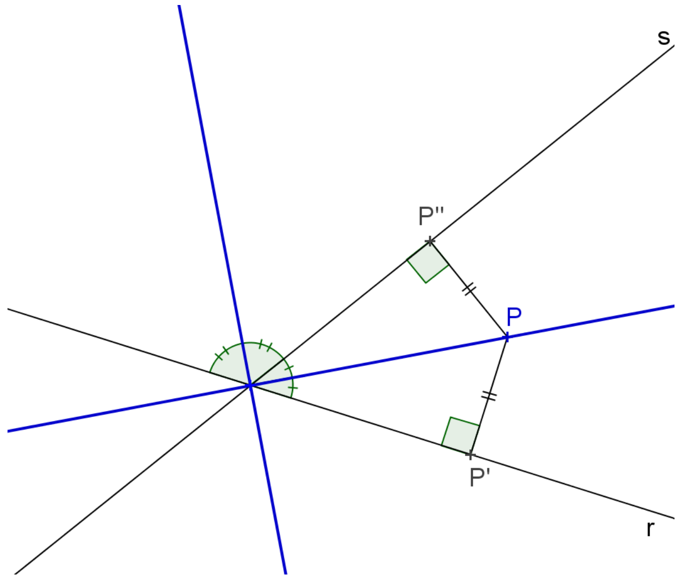
Discussão: ___________________

4. Dados dois pontos A e B, a reta r e a distância d. Obter um ponto X que diste d de r e seja equidistante de A e B.



Discussão: ___________________

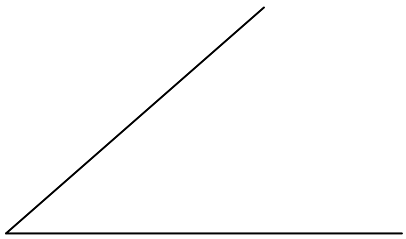
4.4 Lugar Geométrico 4 - Bissetriz

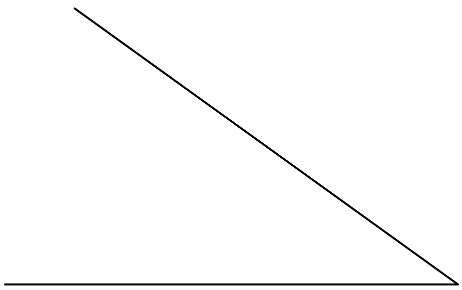


Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de duas retas concorrentes dadas é composto por duas outras retas, perpendiculares entre si e bissetrizes dos ângulos formados pelas retas dadas.

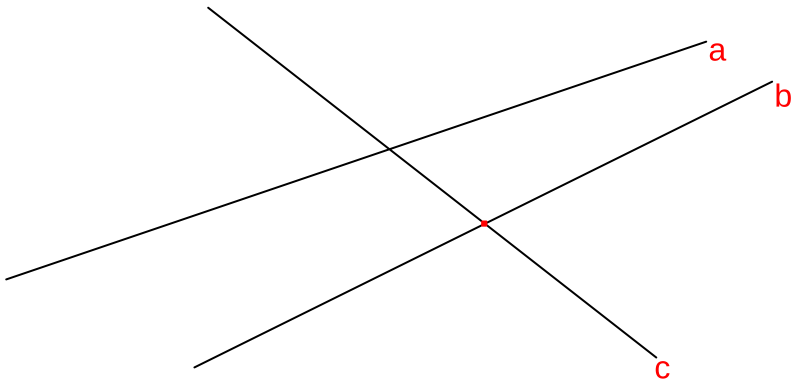
Exercícios:

1. Construir a bissetriz do ângulo dado.



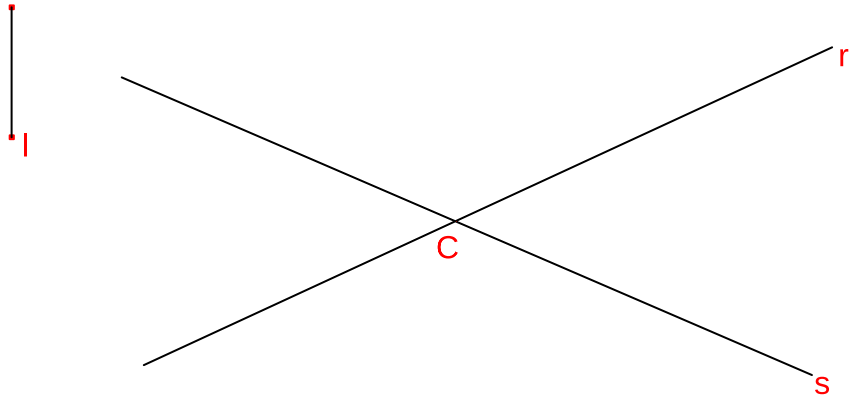


2. Dadas as retas a, b e c. Construir uma circunferência tangente às retas b e c, sabendo-se que o seu centro pertence à reta a.



Discussão: ____________________

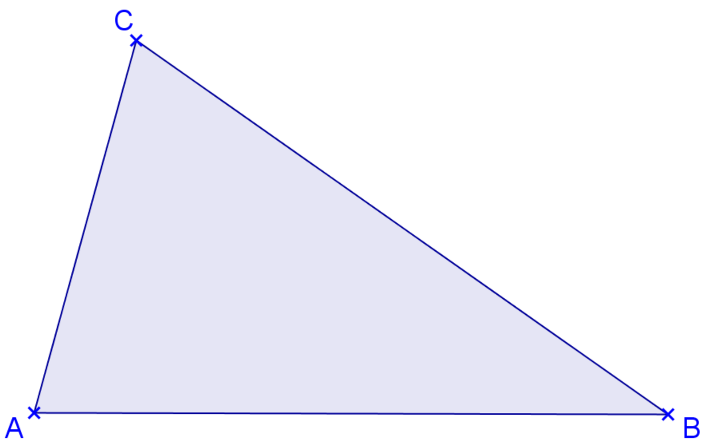
3. Dadas duas retas r e s concorrentes num ponto C e uma distância *l*. Construir uma circunferência tangente às retas r e s, sabendo-se que a distância do seu centro a C é igual a *l*.



Discussão: ____________________

4. Construir a circunferência inscrita ao triângulo ABC dado, e as circunferências ex-inscritas.
   Dados: a=90mm, b=75mm, c=60mm.

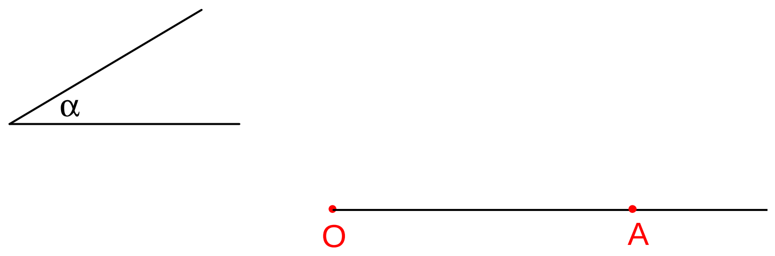
Definição: Uma circunferência é dita inscrita a um triângulo quando ela for tangente aos lados do triângulo. O centro da circunferência inscrita é denominado incentro.



4.5 Construção de Ângulos

Exercícios:

1. Transportar o ângulo de medida α dado, sabendo-se que O será o seu vértice e a semi-reta OA dada um de seus lados.

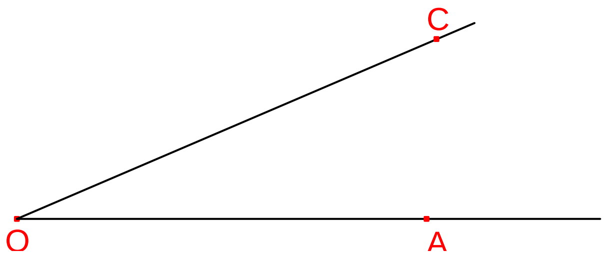


2. Construir os ângulos notáveis 90°, 60°.

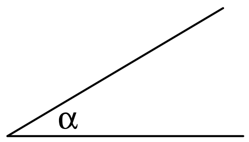
3. Construir os ângulos de 45°, 22°30', 11°15', 30°, 15°, 120°, 150°, 135°, 75°.

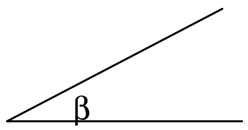
Exercícios Propostos:

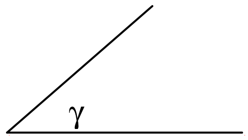
1. São dados o lado OA e a bissetriz OC de um ângulo AÔB. Construir o lado OB.



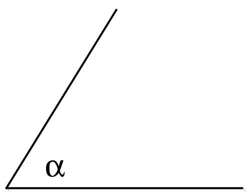
2. Dados os ângulos de medidas α, β, e γ, construir o ângulo de medida $\alpha + \beta + \gamma$.

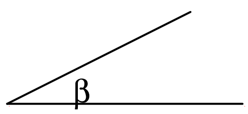




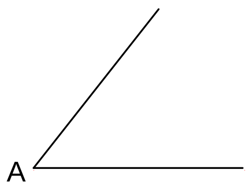


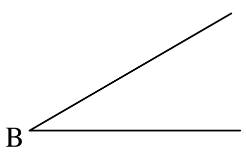
3. Dados os ângulos de medidas α e β, construir o ângulo de medida α - β.





4. São dados os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ de um triângulo ABC. Determinar $\hat{C}$ graficamente.

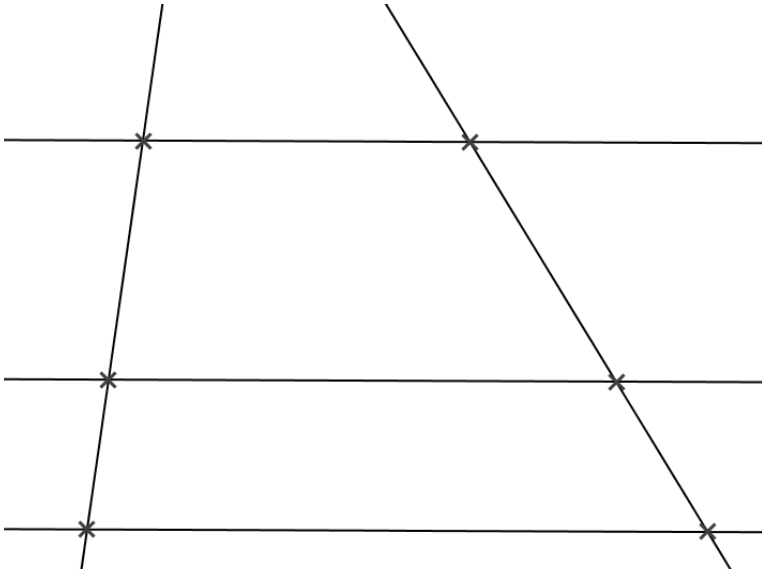




5. Operações com segmentos

5.1 Divisão de segmentos em partes proporcionais

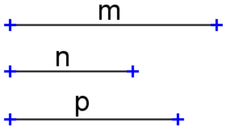
Teorema de Tales: um feixe de retas concorrentes corta um outro feixe de retas paralelas segundo segmentos proporcionais.



Exercícios:

1. Dividir um segmento AB em n partes iguais.

2. Dividir um segmento AB em partes proporcionais a segmentos dados.



3. Dividir um segmento AB=13CM em partes proporcionais a números dados m=2, n=4,2 e p=5,3.

Exercícios Propostos:

1. Dados os segmentos 2p=15cm, q=5cm, r=3,5cm e s=4cm. Construir um triângulo ABC de perímetro igual a 2p, sabendo-se que os lados a, b e c são proporcionais a q, r e s, respectivamente.

2. Construir um triângulo ABC, sendo dados a+b = 9cm, o ângulo C = 60^o, e sabendo-se que a e b são proporcionais a 2 e 3, respectivamente.

3. Dado um segmento m, obter um segmento x, tal que x = 2/5m.

5.2 Quarta proporcional

Definição: Dados três segmentos (ou números) a, b e c, a quarta proporcional aos três segmentos é um segmento (ou número) x, tal que, na ordem dada, eles formem uma proporção, conforme equação 2:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x} \qquad (2)$$

Exercício:

1. Dados os segmentos a, b e c obter a quarta proporcional nesta ordem.

5.3 Terceira proporcional

Definição: Dados dois segmentos (ou números) a e b, a terceira proporcional aos dois segmentos é um segmento x, tal que, na ordem dada, eles formem uma proporção, conforme equação 3 :

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{x} \qquad (3)$$

Exercícios:

1. Obter a terceira proporcional aos segmentos a e b, nessa ordem.

2. Dados os segmentos l=3cm, m=3,5cm e n=4cm. Construir um triângulo ABC, sabendo-se que $\hat{A}=60^o$, a=(m.n)/l e $b=l^2/n$.

5.4 Aplicações do Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras: Num triângulo retângulo de hipotenusa *a* e catetos *b* e *c* tem-se que $a^2=b^2+c^2$.

Exercícios:

1. Dados p e q obter x, tal que $x^2 = p^2 + q^2$.

2. Dados p e q obter x, tal que $x^2 = p^2 - q^2$.

3. Dados p, q e r obter x tal que $x^2 = p^2 + q^2 - r^2$.

4. Dados p, q e r obter um segmento x tal que $x^2 = p^2 + q^2 + r^2$.

6. Triângulos

6.1 Cevianas e Pontos Notáveis de um Triângulo

Definição 1: Ceviana é todo segmento que tem uma extremidade num vértice qualquer de um triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto a esse vértice.

Definição 2: O encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é único e chama-se circuncentro.

Propriedade 1: O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Observação: O circuncentro pode ser interno (no triângulo acutângulo) ou externo (no triângulo obtusângulo) ou pertencer a um dos lados, sendo, neste caso o seu ponto médio (no triângulo retângulo).

Definição 3: Mediana é toda ceviana que tem uma extremidade no ponto médio de um lado. O ponto de encontro das medianas é único e chama-se baricentro.

Propriedade 2: O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida do terceiro lado.

Propriedade 3: O baricentro de um triângulo divide cada mediana na razão de 2 para 1, a partir do vértice.

Observação: O baricentro é sempre interno ao triângulo.

Definição 4: Bissetriz interna é toda ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos adjacentes e congruentes. O ponto de encontro das bissetrizes internas é único e chama-se incentro.

Propriedade 4: O incentro é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

Observação: O incentro é sempre interno ao triângulo.

Definição 5: Altura é toda ceviana perpendicular a um lado ou ao seu suporte. O ponto de encontro das alturas de um triângulo é único e chama-se ortocentro.

Observação: O ortocentro pode ser interno (no triângulo acutângulo) ou externo (no triângulo obtusângulo) ou coincidir com um dos vértices, no caso, o do ângulo reto (no triângulo retângulo).

Definição 6: O triângulo $H_aH_bH_c$ é denominado triângulo órtico ou pedal.

6.2 Construção de Triângulos

Construir um triângulo significa determinar a posição dos seus vértices. Devem ser fornecidos sempre 3 elementos, um deles necessariamente linear, isto é, ou um lado ou uma altura ou uma mediana, etc.

Na discussão da quantidade de soluções pode-se analisar a posição na qual o triângulo foi desenhado e o tamanho obtido.

Exercícios:

Construir triângulo ABC, sendo dados:

1. Os três lados. a=5cm, b=4,5, c=5cm.
2. O lado a=40mm, a altura relativa ao lado a, h_a=28mm e o ângulo B=45^o.
3. O lado a=40mm, a mediana relativa ao lado a, m_a=30mm e o ângulo C=60^o.
4. O lado a=55mm, o raio da circunferência inscrita, r=20mm e B=75^o.
5. O lado b=60mm, o raio r=15mm da circunferência inscrita e o ângulo A=90^o.
6. O lado a=40mm, o raio da circunferência circunscrita R=30mm e a altura relativa ao lado a h_a=30mm.
7. O lado b=50mm, o lado c=70mm e a mediana relativa ao lado b, m_b=72mm.
8. O lado c=35mm, a bissetriz relativa ao ângulo B, s_b=38mm e o ângulo B=60^o.
9. O lado a=45mm, a mediana relativa ao lado b, m_b=32mm e a mediana relativa ao lado c m_c=40mm.
10. O lado a=43mm, a mediana relativa ao lado a, m_a=50mm e a mediana relativa ao lado b, m_b=38mm.

Parte 2 - Projeções Cotadas

Capítulo I - Introdução

O MÉTODO DAS PROJEÇÕES COTADAS

O método foi idealizado por Fellipe Buache em 1737 para o levantamento da carta hidrográfica do Canal da Mancha. Em 1830 o método foi sistematizado pelos militares franceses. É bastante utilizado na solução de coberturas e como base para o Desenho Topográfico.

O método das projeções cotadas é um sistema gráfico-analítico que utiliza somente uma projeção do objeto estudado. Cada projeção é acompanhada de um número que representa a distância do ponto ao plano de projeção.

Em todo sistema de projeção, devem ser definidos os seus elementos principais que são:

- Objeto a ser projetado
- Projetante
- Plano de projeção

1. MÉTODOS DE REPRESENTAÇÃO

- Dupla Projeção Ortogonal (Monge)
- Projeção Cotada (Büache)
- Projeção Central (Cousinery)
- Projeção Axonométrica (Polke)

2. PROJEÇÕES

$$
\begin{cases}
\text{um só plano} & \begin{cases}
\text{cônica} \rightarrow \text{perspectiva cônica} \\
\text{cilíndrica} \begin{cases}
\text{oblíquas} \rightarrow \text{perspectiva cavaleira} \\
\text{ortogonais} \rightarrow \begin{cases} \text{perspectiva axonométrica} \\ \text{projeção cotada} \end{cases}
\end{cases} \\
\text{especiais} \rightarrow \text{projeções cartográficas}
\end{cases} \\
\text{dois ou mais planos} \rightarrow \text{Dupla Projeção Ortogonal (ou Método Mongeano ou de Monge)}
\end{cases}
$$

3. Operações fundamentais no desenho projetivo

3.1 Conceito de projetar

a) Projetar um ponto A a partir de um outro ponto O, distinto de A, significa determinar a reta pertencente aos dois pontos. A reta OA é denominada projetante do ponto A, e o ponto O é denominado de centro de projeção (Figura 1).

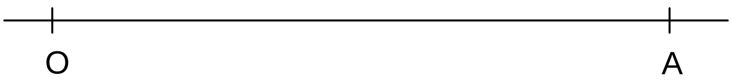


Figura 1 – Projeção do Ponto A

b) Projetar um ponto A a partir de uma reta r, não pertencente a esse ponto, significa determinar o plano pertencente ao ponto e à reta. Esse plano, α, é denominado plano projetante do ponto A, e a reta r é o eixo de projeção (Figura 2).

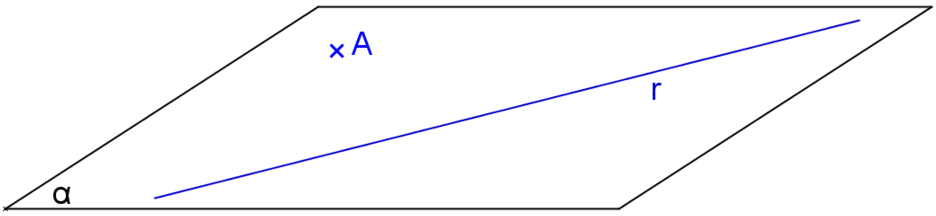


Figura 2 – Projeção do Ponto A, a partir da Reta r

c) Projetar uma reta r a partir de outra s significa determinar o plano definido pelas duas retas. O problema somente é possível se as retas forem coplanares, ou seja, concorrentes ou paralelas (Figura 3).

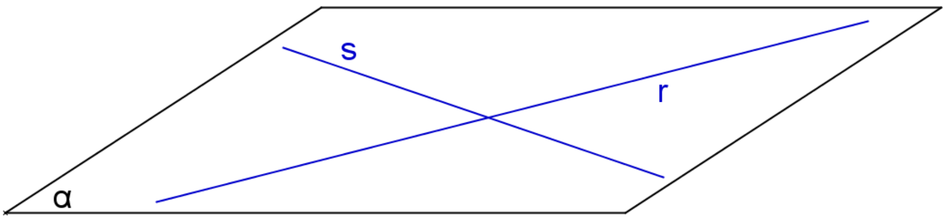


Figura 3 – Projeção de Uma Reta a Partir de outra

d) Projetar um objeto a partir de um ponto significa determinar as projetantes de todos os pontos desse objeto. Quando se quer projetar um sólido, normalmente são projetados somente os elementos necessários e suficientes que o determinam.

3.2 Conceito de cortar

a) Cortar uma reta r por outra s, significa obter o ponto (rs) comum às duas retas. O ponto considerado pode ser próprio ou impróprio, conforme as retas sejam concorrentes ou paralelas.
b) Cortar um plano α por uma reta r, ou uma reta r por um plano α, significa obter o ponto rα comum à reta e ao plano (Figura 4).

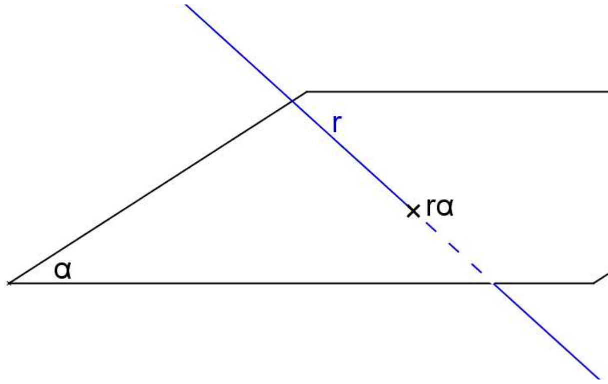


FIGURA 4 – CORTE DA RETA r NO PLANO α

c) Cortar um plano α outro β significa encontrar a reta $\alpha\beta$ comum a ambos os planos (Figura 5).

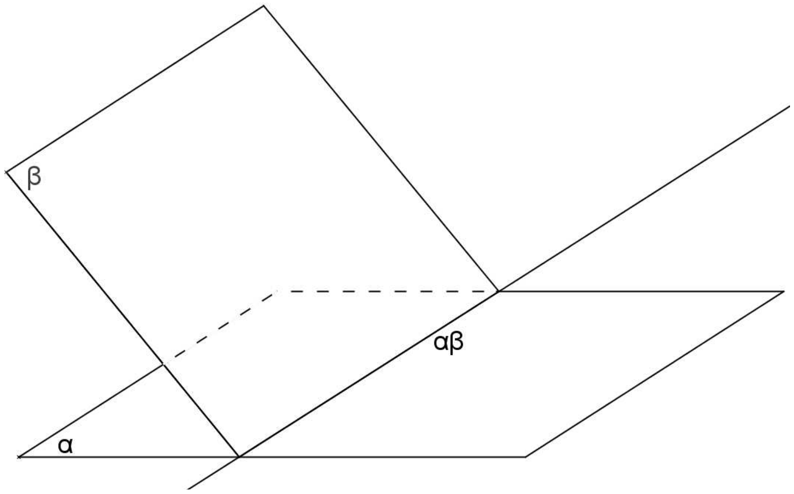


FIGURA 5 – CORTE DO PLANO α NO PLANO β

d) Cortar um objeto por um plano significa encontrar a seção plana produzida por este plano no sólido considerado (Figura 6).

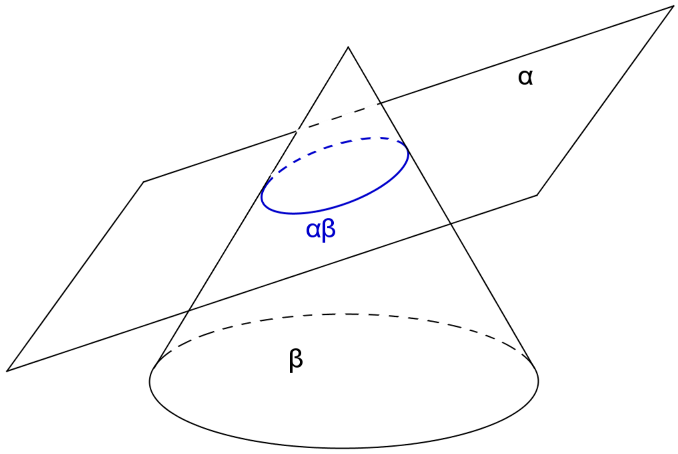


FIGURA 6 – CORTE DO PLANO α NA SUPERFÍCIE β

<u>Observação</u>: o ponto ou a reta ou a curva quando determinados por cortes chamam-se <u>*traços*</u>.

4. CONCEITO DE PROJEÇÃO CÔNICA (OU CENTRAL)

Considere um plano π' e um ponto fixo O não pertencente ao plano considerado. Denomina-se projeção central ou cônica, no plano π', de um ponto A, distinto de O, ao traço A', produzido sobre o plano, pela reta projetante do ponto A (Figura 7).

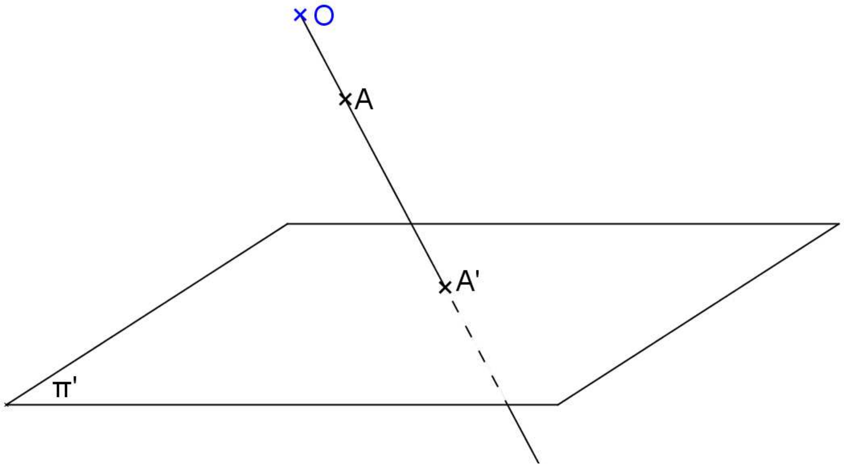


FIGURA 7 – PROJEÇÃO CÔNICA DO PONTO A

O plano π' é denominado plano de projeção e o ponto O é denominado centro, polo ou vértice de projeção.

A projeção central ou cônica é também denominada perspectiva cônica, ou perspectiva linear exata do ponto A.

Observações:

- Plano de projeção ≠ plano projetante.
- O sistema é chamado de projeção cônica, pois as projetantes descrevem uma superfície cônica.

5. CONCEITO DE PROJEÇÃO CILÍNDRICA (OBLÍQUA OU ORTOGONAL)

Denomina-se *projeção cilíndrica* de um ponto A, no plano π' a partir de O_∞, ao traço A' produzido sobre π', pela reta projetante do ponto A (Figura 8).

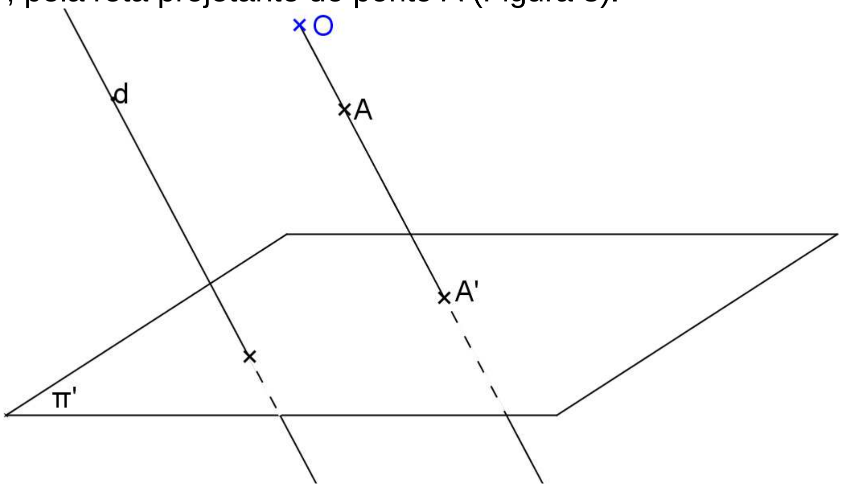


FIGURA 8 – PROJEÇÃO CILÍNDRICA DO PONTO A

Observações:

- Dado o ponto A, A' é único, porém dado somente A' sabe-se que o ponto A pertence à reta projetante;
- O sistema é denominado projeção cilíndrica, pois as projetantes descrevem uma superfície cilíndrica;
- Os pontos do plano de projeção coincidem com suas projeções;

- Se a direção das projetantes for oblíqua ao plano de projeções tem-se o sistema de projeção Cilíndrica Oblíqua;
- Se a direção das projetantes for perpendicular ao plano de projeções tem-se o Sistema de Projeção Cilíndrica Ortogonal.

5.1 Propriedades das projeções cilíndricas (oblíquas ou ortogonais)

Propriedade 1: A projeção cilíndrica de uma reta não paralela à direção das projetantes é uma reta (Figura 9). A projeção cilíndrica de uma reta paralela à direção das projetantes é um ponto (Figura 10).

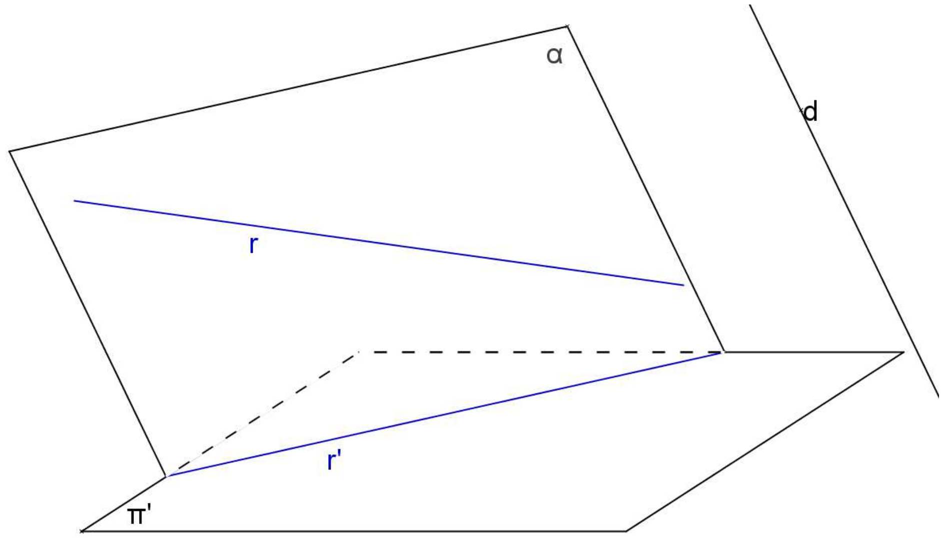


FIGURA 9 – PROJEÇÃO CILÍNDRICA DA RETA r

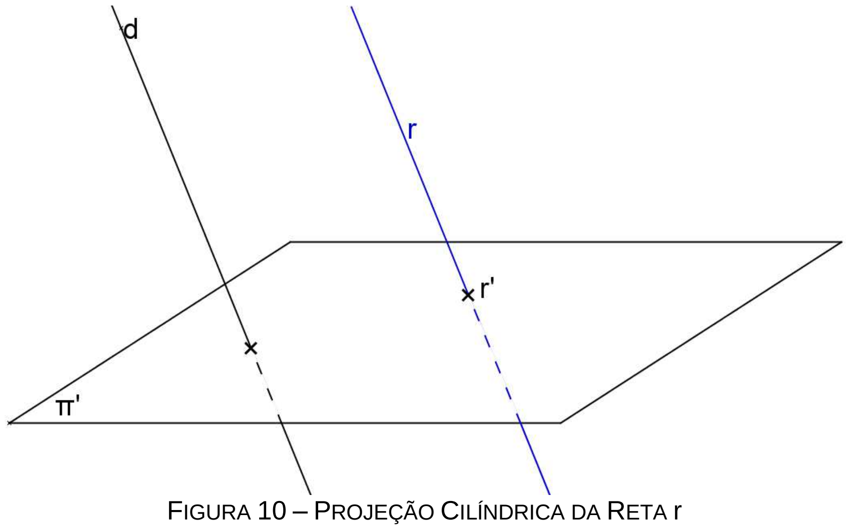


FIGURA 10 – PROJEÇÃO CILÍNDRICA DA RETA r

Observações:

a) Se a projeção cilíndrica de uma reta é uma reta, então a reta objetiva não é paralela a direção das projetantes;

b) Se a projeção cilíndrica de uma reta é um ponto, então a reta é paralela à direção das projetantes;

c) Se uma reta é perpendicular ao plano de projeção, sua projeção cilíndrica-ortogonal sobre o mesmo será o seu traço no plano de projeção considerado. Reciprocamente, se a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano reduzir-se a um ponto, então a reta será perpendicular ao plano de projeção, ou o que é equivalente, a reta será paralela à direção das projetantes.

d) Uma reta r, não paralela à direção das projetantes, e sua projeção cilíndrica r' são coplanares; logo, pode ocorrer entre a reta e sua projeção uma das seguintes condições:

- r e r' são concorrentes, neste caso a reta corta o plano de projeção (Figura 9);
- São paralelas, neste caso a reta será paralela ao plano de projeção;
- São coincidentes, neste caso a reta estará contida no plano de projeção.

Propriedade 2: Se duas retas r e s são paralelas, então as suas projeções cilíndricas ou são paralelas (Figura 11), ou são coincidentes (Figura 12) ou são pontuais (Figura 13).

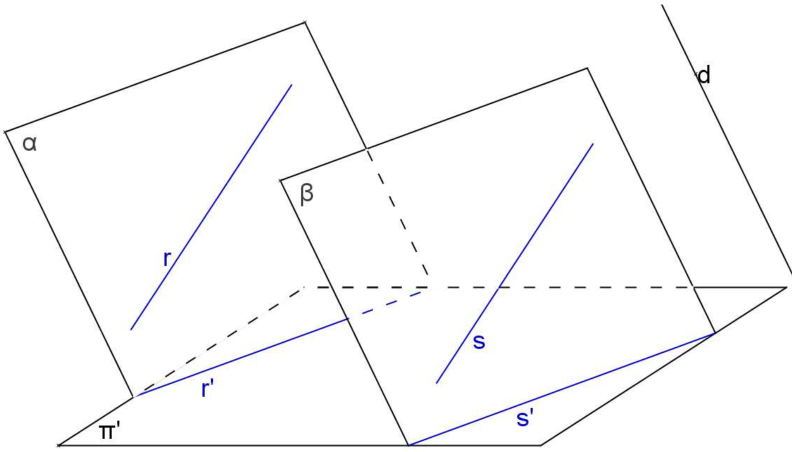


FIGURA 11 – PROJEÇÕES PARALELAS

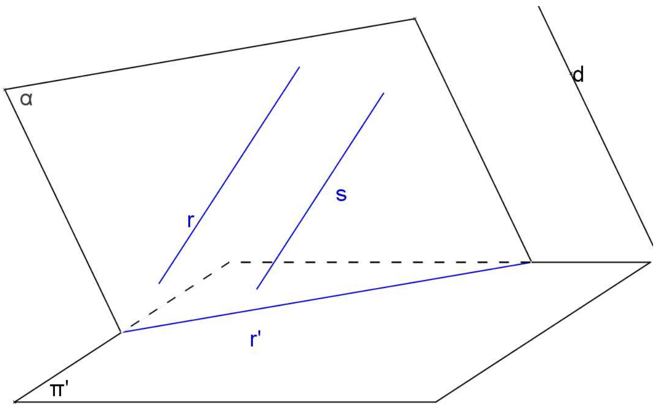


FIGURA 12 – PROJEÇÕES COINCIDENTES

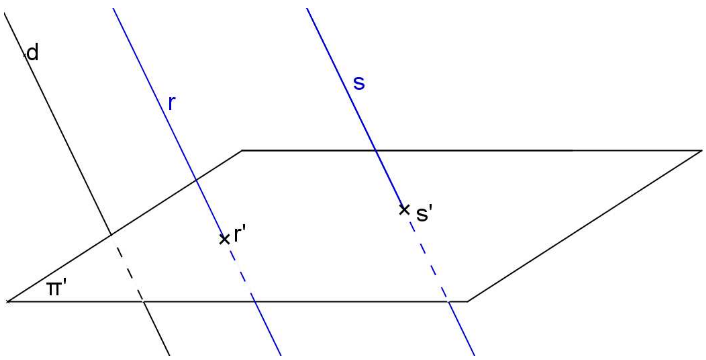


FIGURA 13 – PROJEÇÕES PONTUAIS

Observação: A recíproca da propriedade 2 não é verdadeira (Figura 14).

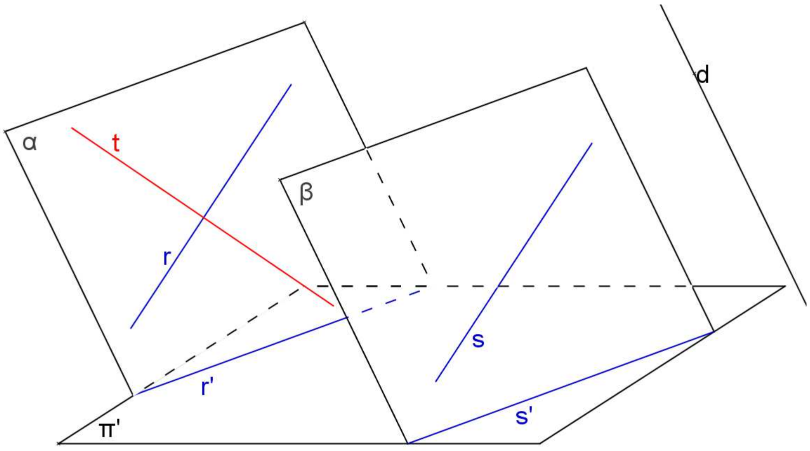


FIGURA 14 – CONTRA EXEMPLO DA RECÍPROCA DA PROPRIEDADE 2

Propriedade 3: Se dois segmentos são paralelos ou são colineares, então a razão entre eles no espaço conserva-se na projeção cilíndrica, desde que a direção dos segmentos não seja paralela à direção das projetantes (Figura 15).

$$\text{Se}\begin{cases}\overline{AB}\,//\,\overline{CD}\\ \text{ou}\\ \text{colineares}\end{cases}\text{e não paralelos a } d \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

a) AB//CD

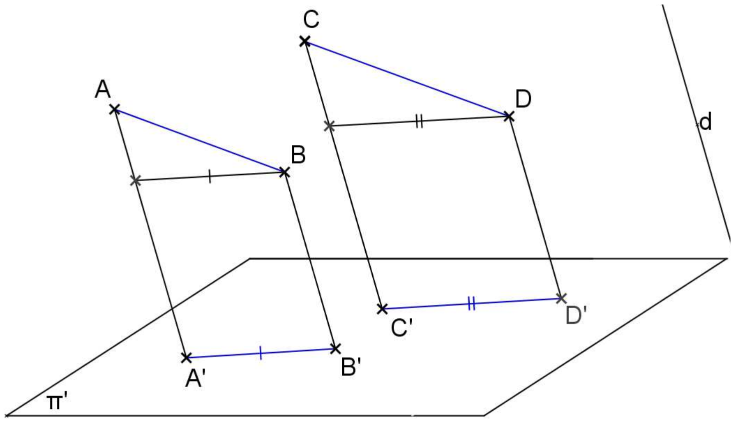


FIGURA 15 – RAZÃO ENTRE AS PROJEÇÕES DE SEGMENTOS PARALELOS

b) AB e CD colineares

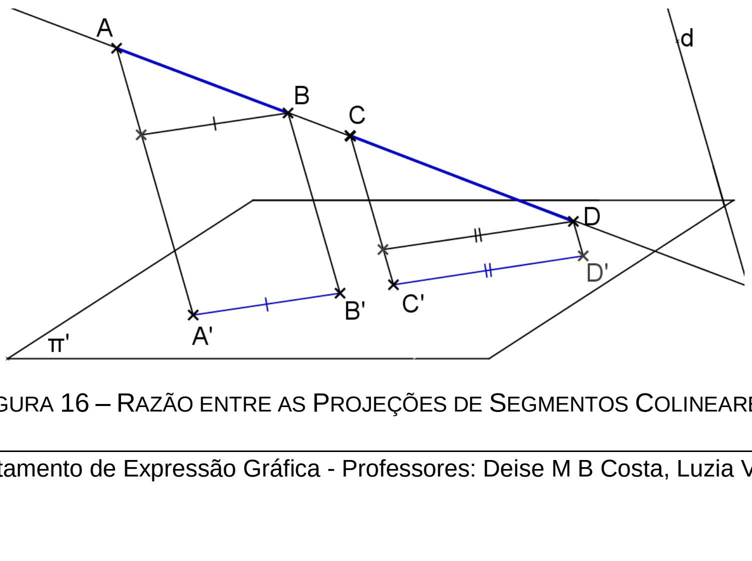


FIGURA 16 – RAZÃO ENTRE AS PROJEÇÕES DE SEGMENTOS COLINEARES

Conseqüência: Se M é ponto médio do segmento AB então M’ é ponto médio da projeção do segmento AB (A’B’).

Observação: A recíproca não é verdadeira. Ou seja, se AB/CD=A’B’/C’D’ não implica que AB//CD ou colineares.

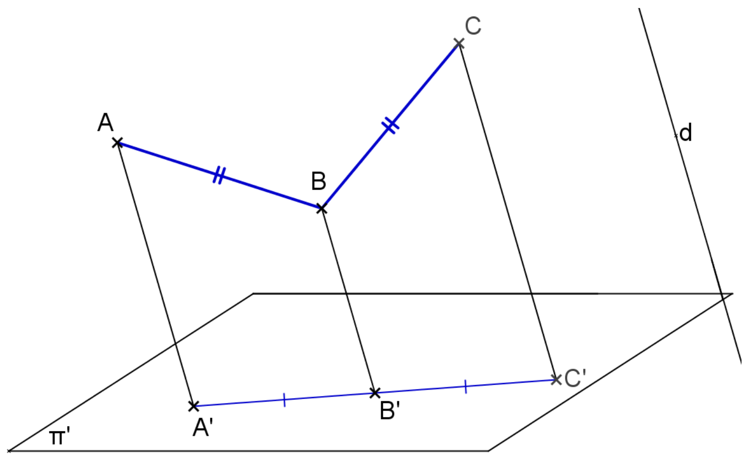


FIGURA 17 – CONTRA-EXEMPLO PARA A RECÍPROCA DA PROPRIEDADE 3

Propriedade 4: Se uma figura está contida num plano paralelo ao plano de projeção, então essa figura será congruente à sua projeção cilíndrica, isto é, a projeção cilíndrica desta figura está em verdadeira grandeza (V.G.) (Figura 17).

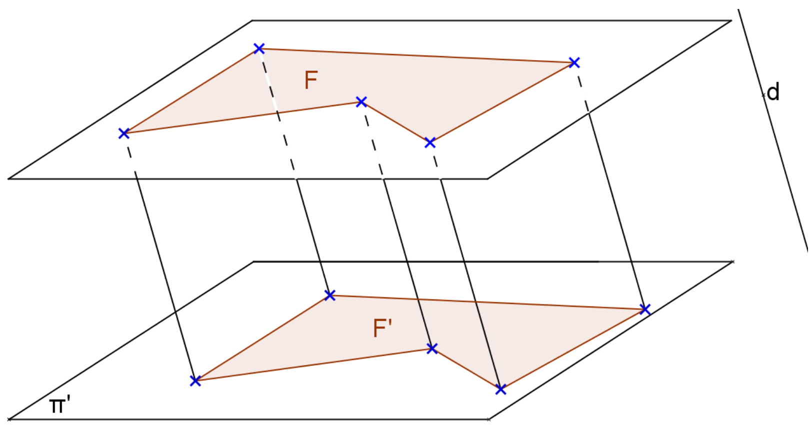


FIGURA 18 – PROPRIEDADE 4

Observação: A recíproca não é verdadeira em projeção oblíqua, porém é verdadeira em projeção ortogonal (Figura 19).

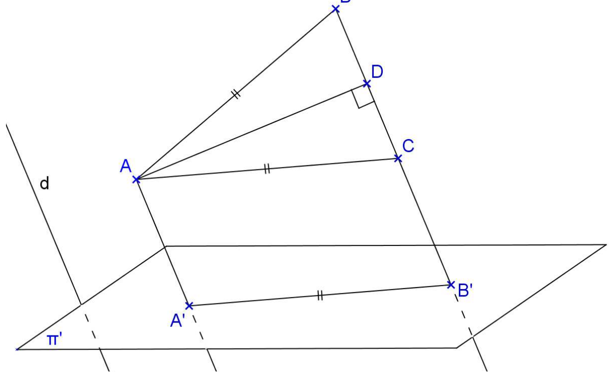


FIGURA 19 – CONTRA-EXEMPLO PARA A RECÍPROCA DA PROPRIEDADE 4

Propriedade 5: Qualquer figura contida num plano paralelo a direção das projetantes tem para projeção um segmento que está contido no traço do plano dessa figura sobre o plano de projeção (Figura 20).

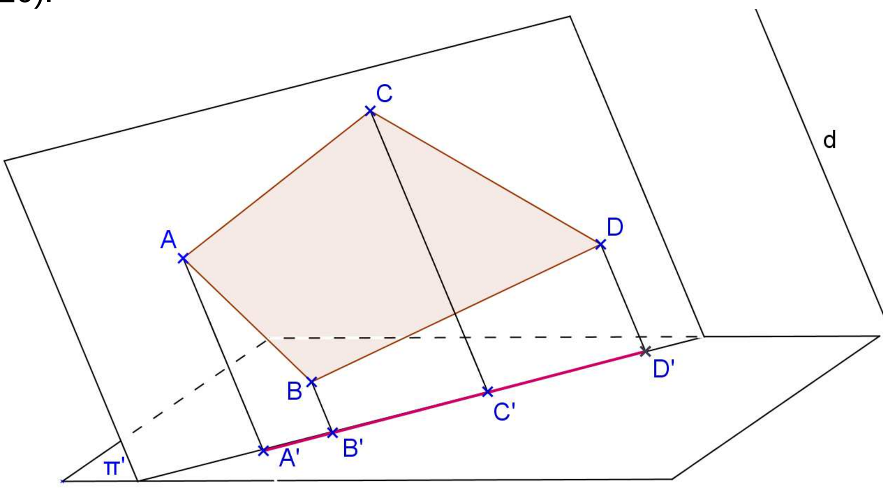


FIGURA 20– PROPRIEDADE 5

Observação: A recíproca da Propriedade 5 é verdadeira.

5.2 Propriedades das projeções cilíndricas ortogonais

Propriedade 6: Se um segmento é oblíquo ao plano de projeção π', então sua projeção ortogonal é menor que a sua verdadeira grandeza (Figura 21).

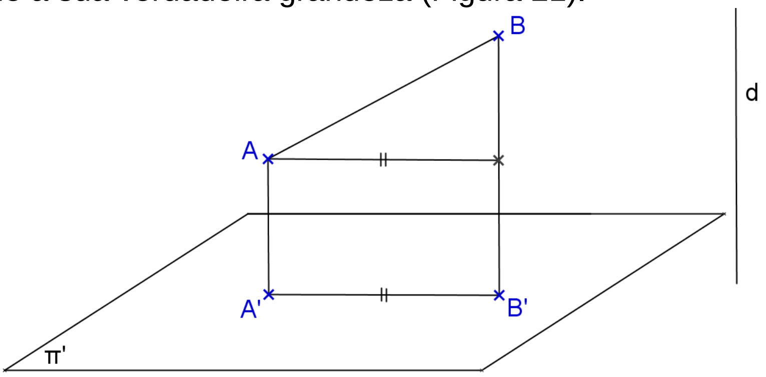


FIGURA 21 – PROPRIEDADE 6

Observação: A recíproca da Propriedade 6 é verdadeira.

Propriedade 7: Se duas retas são perpendiculares ou ortogonais entre si, sendo uma delas paralela ou pertencente ao plano de projeção e a outra não perpendicular a esse plano, então as projeções ortogonais dessas retas são perpendiculares entre si (Figura 22).

Resumindo:

$$\text{Se} \quad \begin{cases} r \perp s \ \text{ ou } \ r \dot{\perp} s & (1) \\ r \,//\, \pi' \ \text{ ou } \ r \subset \pi' & (2) \\ s \not\perp \pi' & (3) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r' \perp s' \ (4)$$

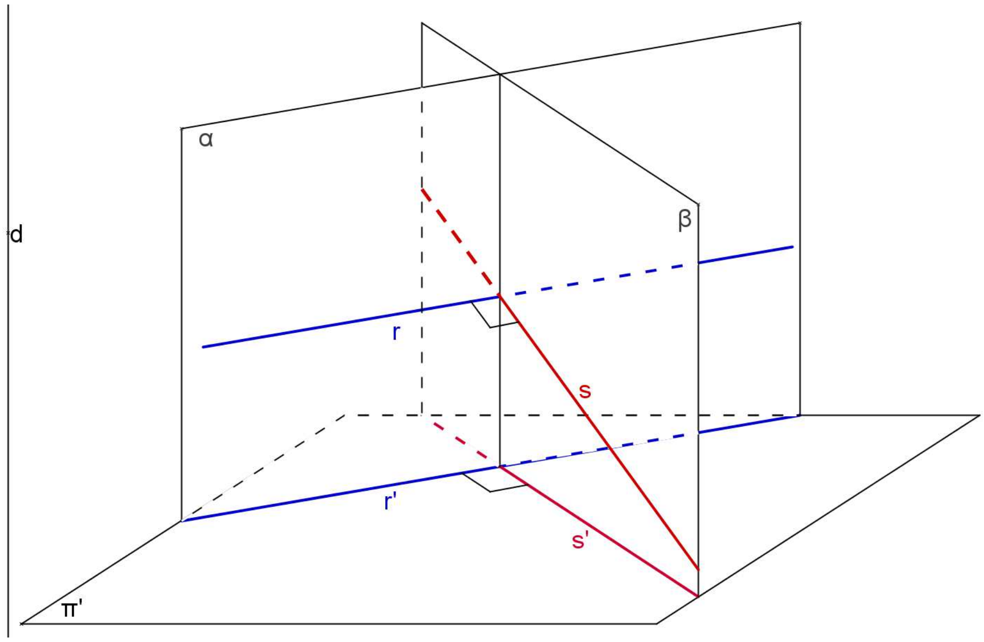


FIGURA 22 – PROPRIEDADE 7

Observação: As recíprocas da propriedade 7 são verdadeiras. São elas:

Recíproca 1: (2) + (3) +(4) $\Rightarrow$ (1)

Recíproca 2: (1) + (4) $\Rightarrow$ (2) + (3)

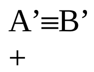
Exercícios:

Considere um sistema de projeção cilíndrica com somente um plano de projeção π'. Escrever ao lado de cada exercício as propriedades geométricas e as propriedades das projeções cilíndricas utilizadas.

1. Representar o ponto médio M do segmento dado AB.

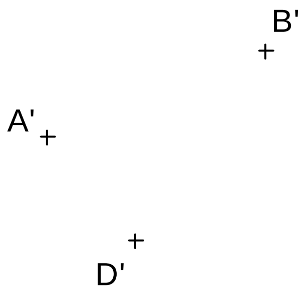
a)

b)

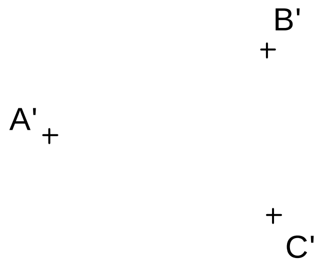


2. Representar o paralelogramo ABCD sendo dados três de seus vértices.

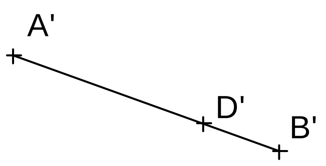
a)



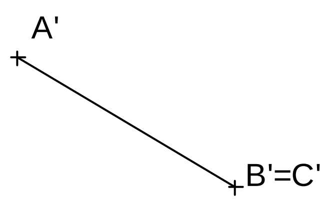
b)



c)



d)



3. Representar o paralelogramo ABCD sendo dados os pontos A e B e o ponto M de interseção das diagonais.

a)

A’
+

+
B’

+
M’

b)

A’≡B’
+

+
M’

c)

A’
+

+ M’≡B’

4. Representar o triângulo ABC sendo dados os vértices A e B e o baricentro G.

a)

A'
+

G'
+

B'+

b)

A’≡ B’
+

+
G’

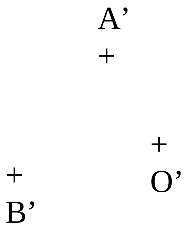
c)

A’≡ G’
+

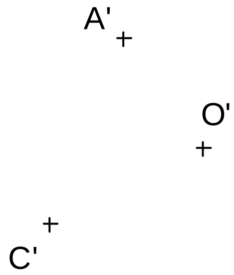
+
B’

5. Representar o hexágono regular ABCDEF sendo dados dois vértices e o centro O da circunferência circunscrita.

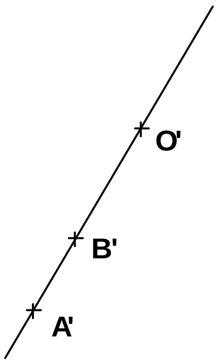
a)



b)

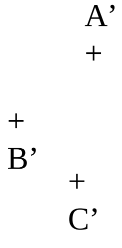


c)

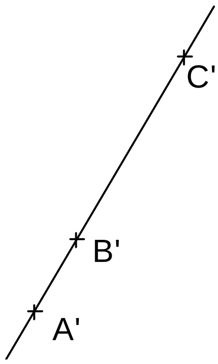


6. Representar o hexágono regular ABCDEF sendo dados A, B e C

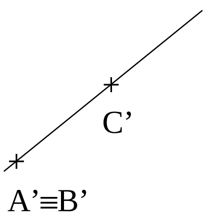
a)



b)



c)



Capítulo II – Representação do ponto

1. O PLANO DE REPRESENTAÇÃO

O plano π' situado na posição horizontal denomina-se Plano (ou Quadro) de Representação ou Plano de Projeção ou Plano de Comparação. Este plano divide o espaço em dois subespaços: superior e inferior (Figura 23). O centro de projeções, O_∞, é impróprio, pois a projeção é ortogonal.

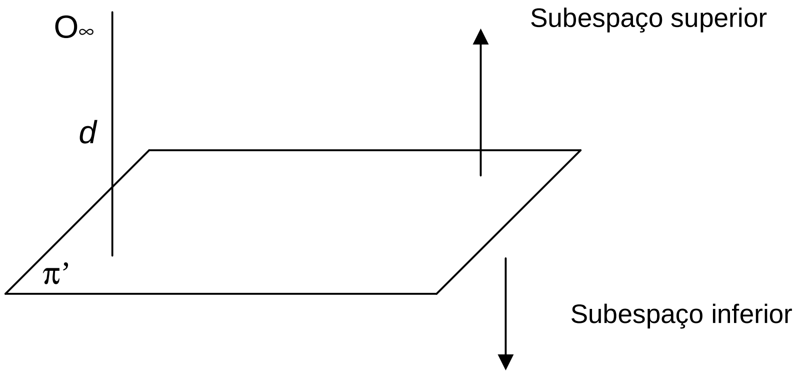


FIGURA 23 – PLANO DE PROJEÇÃO

2 REPRESENTAÇÃO DO PONTO

Seja o ponto A, considere sua projeção cilíndrica ortogonal A' sobre o plano π'. O ponto A não fica individualizado somente por sua projeção A', é necessário mais um elemento, utiliza-se a cota do ponto. Assim, o ponto A fica representado por A'(a), conforme figura 24.

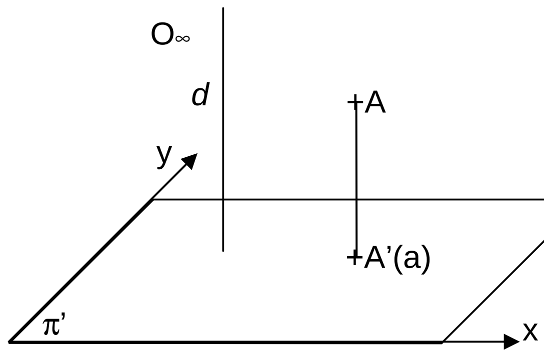


FIGURA 24 – REPRESENTAÇÃO DO PONTO

O método de projeção cotada é um sistema gráfico-algébrico, pois envolve uma projeção gráfica e um número.

A cota de um ponto é o número que expressa a distância do ponto P ao plano de projeção.

- Cota positiva = altura ou altitude
- Cota negativa = profundidade ou depressão
- π' é o lugar geométrico dos pontos de cota nula
- Os pontos de mesma cota constituem um plano paralelo ao π'.
- Os pontos pertencentes a um mesmo plano horizontal possuem a mesma cota.

A épura do ponto é a representação plana da figura espacial, conforme apresentado na figura 25. O ponto fica determinado no sistema cartesiano, pelas suas coordenadas cartesianas, A(x, y, z), onde:

x – representa o valor no eixo das abscissas;
y – representa o valor no eixo das ordenadas;
z – representa o valor de cota do ponto, ou seja, sua distância até o plano π'.

3. ÉPURA DO PONTO

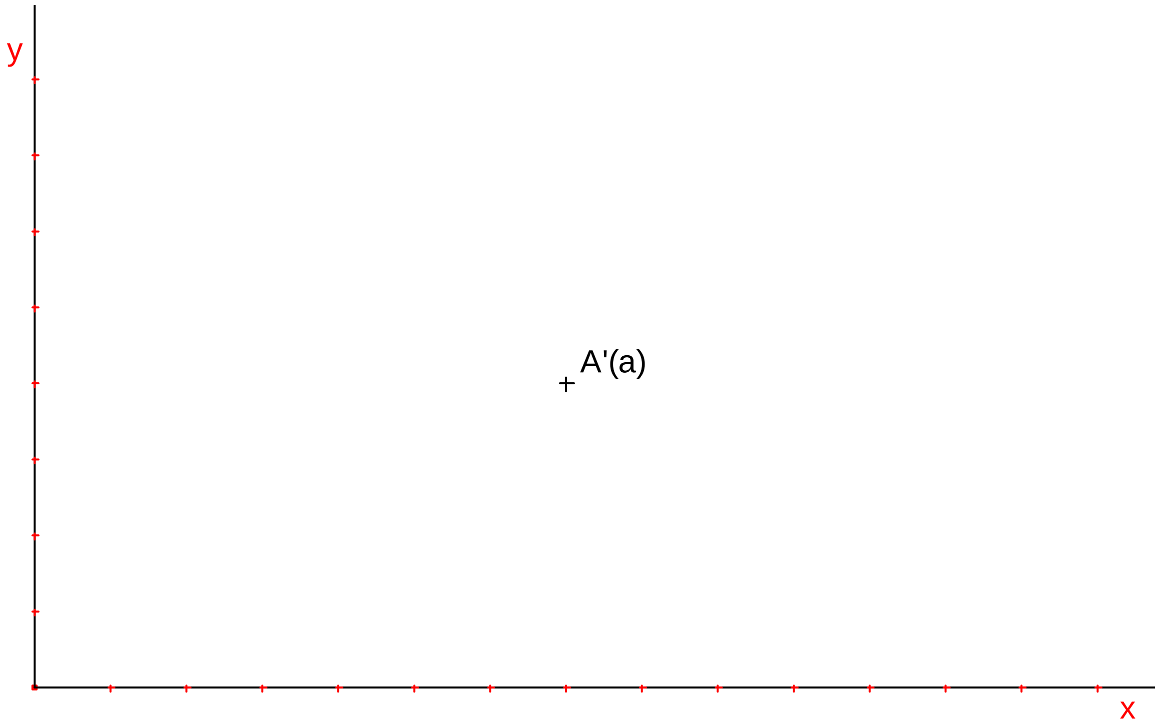
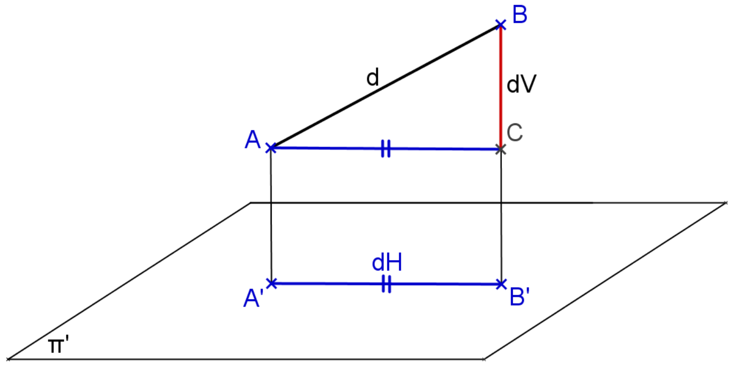


FIGURA 25 – REPRESENTAÇÃO DO PONTO EM ÉPURA

Exercício: Representar a épura dos pontos dados, utilizando como unidade o mm e a escala natural.
A(40,30,20), B(20,60,-30), C(90,70,40), D(90,70,10), E(80,40,0)

4 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Para obter a distância *d* entre os dois pontos A e B, ou seja, a verdadeira grandeza (VG) do segmento AB, pode-se utilizar o processo gráfico (Figura 26) ou o algébrico.



Distância vertical:
dV = |b-a|
Distância horizontal:
dH = A'B'
Distância
$d^2 = dV^2 + dH^2$

FIGURA 26 – DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

No processo algébrico, caso as cotas sejam diferentes, basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo; se os pontos possuem a mesma cota, então a distância entre eles é d=dH e se possuem a mesma reta projetante, então a distância entre eles é d=dV.

No processo gráfico, se os pontos possuem cotas distintas e projetantes distintas aplica-se o rebatimento; se os pontos possuem a mesma cota então a VG do segmento AB é A'B'; e se pertencem a uma mesma reta projetante, então basta encontrar a diferença entre cotas dos pontos.

5 REBATIMENTO DO PLANO PROJETANTE α SOBRE π':

Basta rebater o plano projetante α do segmento AB em torno do eixo απ′, obtendo-se a verdadeira grandeza (VG) da distância *d* entre A e B, bem como a distância horizontal dH e a vertical dV (Figura 27).

No espaço:

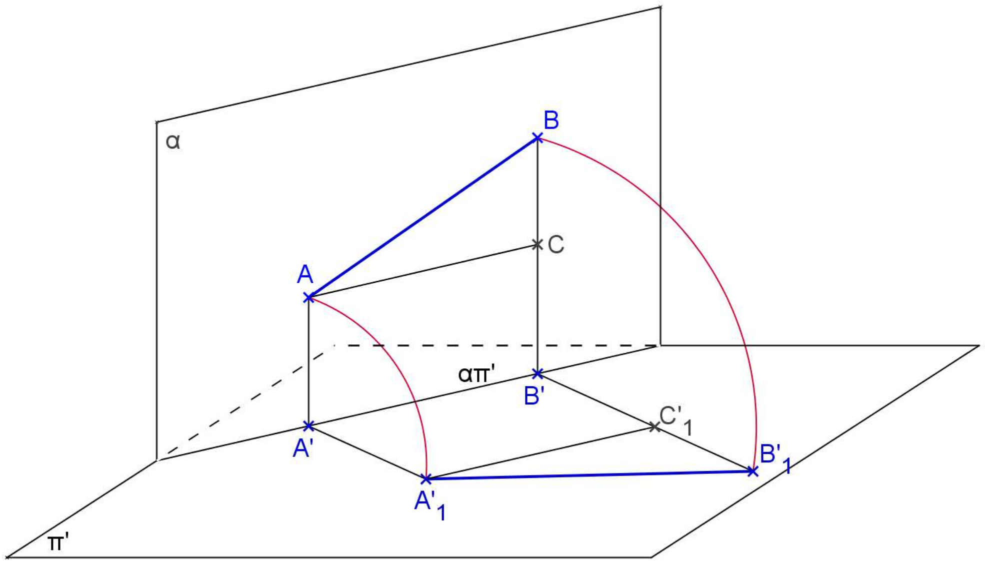


FIGURA 27 – REBATIMENTO DO PLANO α

Exercício: Encontrar, graficamente, a VG do segmento dado.
A unidade é o milímetro

a)

B'(30)

A'(20)

b)

C'50

D'(35)

2.4 Rebatimento do plano projetante α sobre β horizontal:

Basta rebater o plano projetante α do segmento AB em torno do eixo αβ obtendo o segmento A_1B_1, cuja VG é o segmento $A'_1B'_1$ (Figura 28).

No espaço:

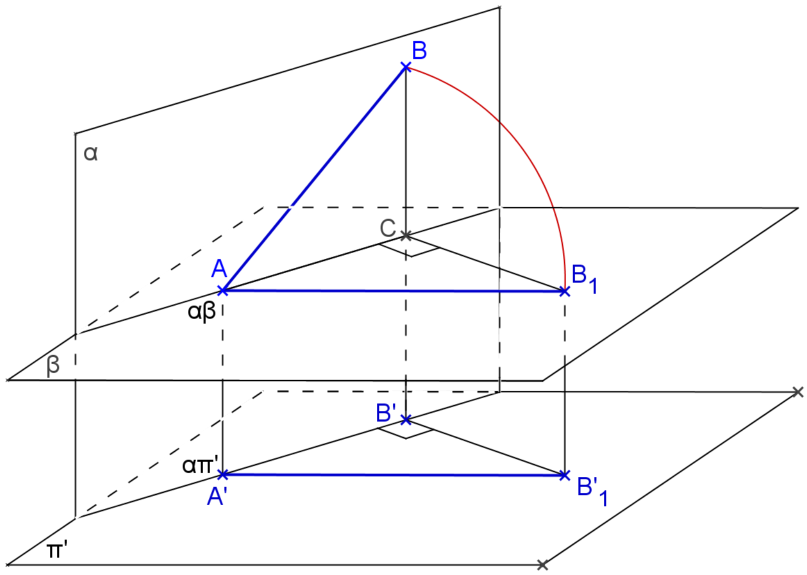


FIGURA 28 – REBATIMENTO DO PLANO α SOBRE β HORIZONTAL

Exercício: Encontrar a VG do segmento AB.

B'(30)

A'(20)

Exercícios Propostos

1. Representar a distância entre os pontos dados.
u mm

a) A(50,40,100) e B(100,80,60)

b) C(40,70,20) e D(60,30,-30)

c) E(30,60,100) F(30,60,80)

d) Dados em posição G e H

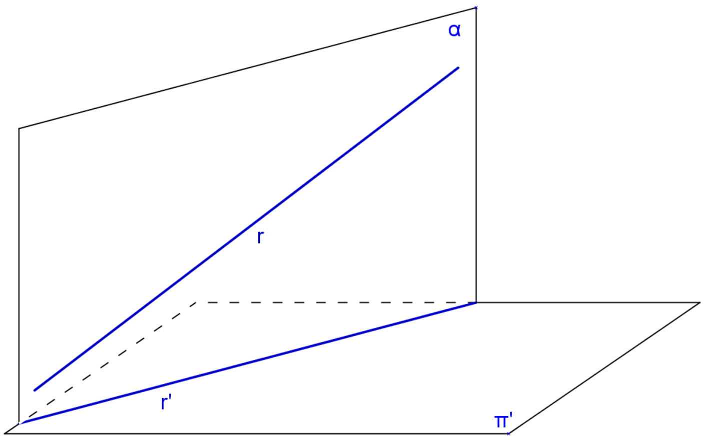
2) Na planta de um terreno foram assinalados dois pontos, um de cota 26m e outro de cota 17m. Sabendo-se que o desenho está na escala 1:100 e que em planta a distância entre os pontos é de 8cm, determinar a distância entre os pontos.

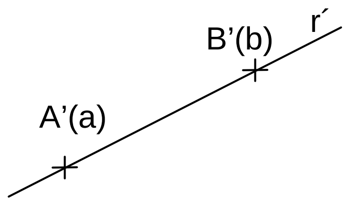
Capítulo III – Representação da reta

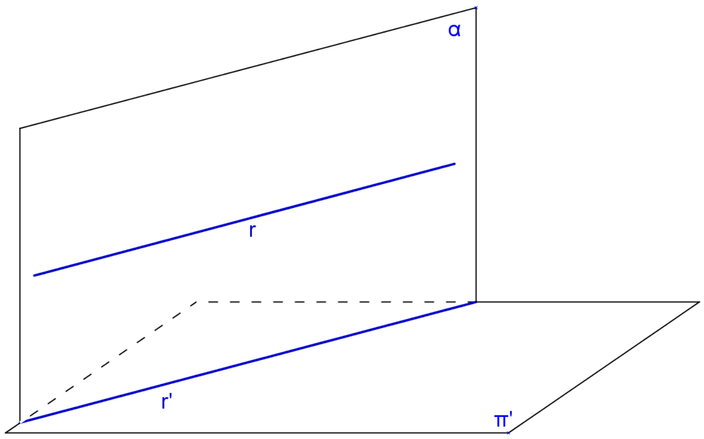
1. REPRESENTAÇÃO DA RETA

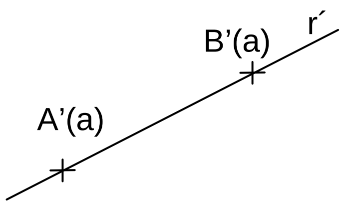
<u>Propriedade já vista</u>: Se r é uma reta então r' ou é uma reta (se r não for paralela à direção das projetantes *d*) ou um ponto (se r for paralela a direção das projetantes *d*)

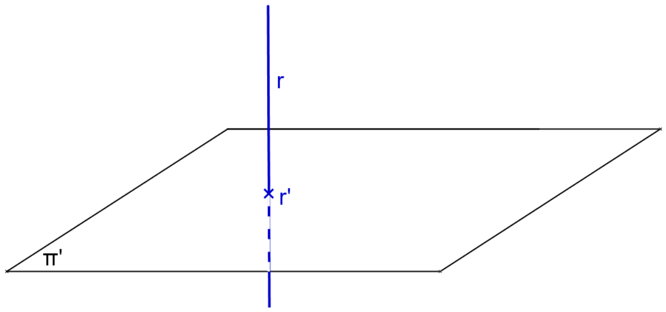
<u>Espaço</u> <u>Épura</u>

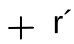












2. Posições Relativas de uma Reta em Relação ao Plano de Projeção

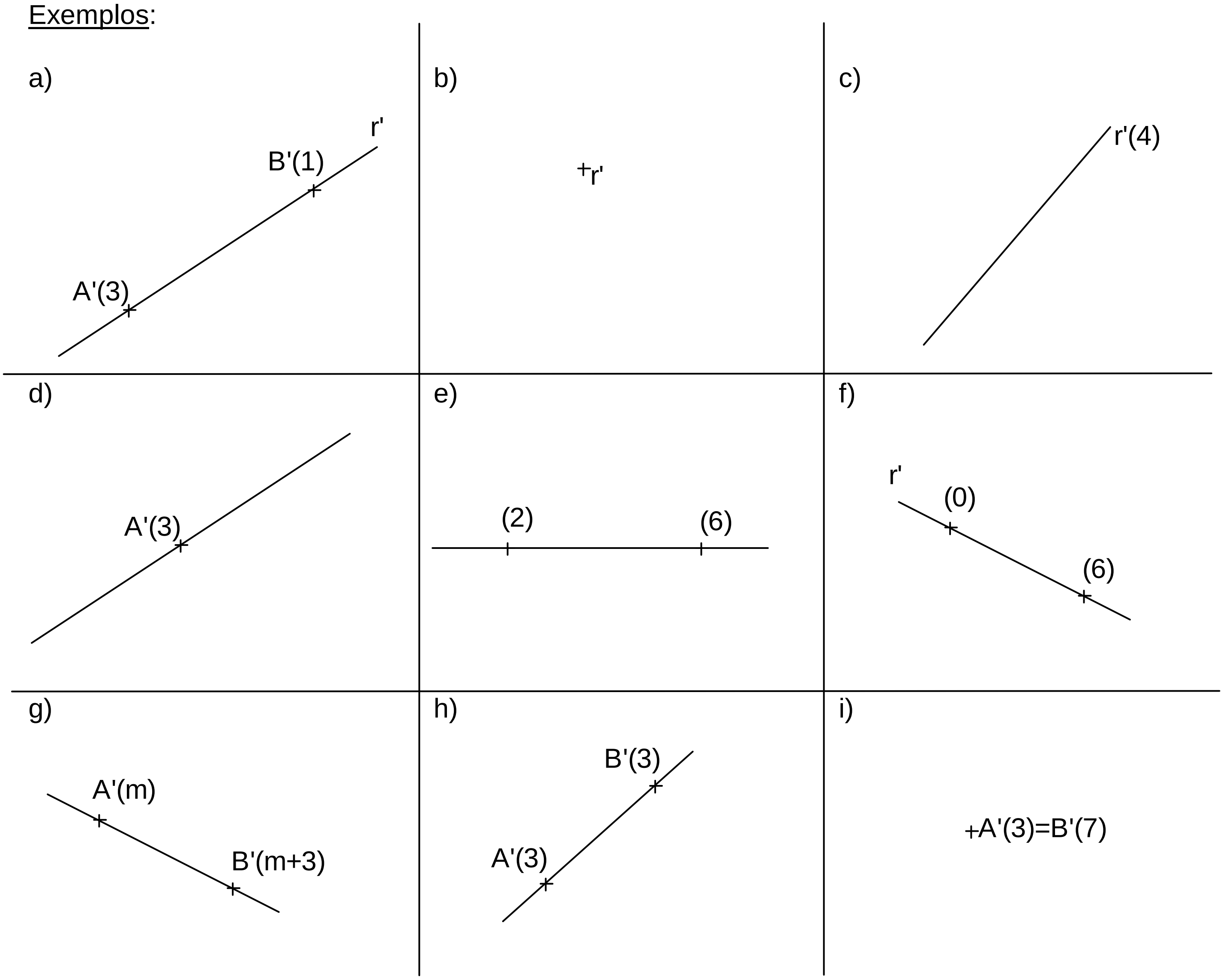
A reta pode ocupar posições distintas em relação ao Plano de Projeção, podendo ser:

1º) <u>Reta qualquer</u>: a reta qualquer é oblíqua em relação a π', forma ângulo entre 0º e 90º com π' e todos os seus pontos possuem cotas distintas.

2º) <u>Reta horizontal ou de nível</u>: a reta de nível é paralela a π', forma ângulo de 0º com π' e todos os seus pontos possuem a mesma cota.

3º) <u>Reta vertical</u>: a reta vertical é perpendicular a π' (reta projetante), forma ângulo de 90º com π' e todos os seus pontos tem projeções coincidentes com o traço da reta.

<u>Exemplos</u>:



3. ELEMENTOS DE UMA RETA

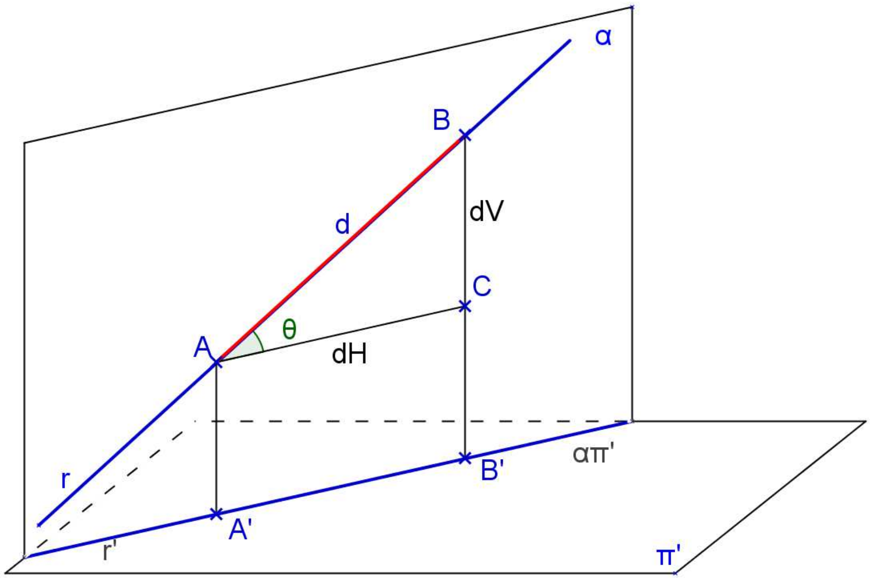
1º) Inclinação

A inclinação de uma reta é o menor ângulo θ que essa reta forma com o plano de representação, e pode ser obtido algebricamente, da seguinte forma:

como $\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{dV}{dH}$, onde dV = b - a (diferença de cotas dos pontos) e dH=A’B’ (projeção de AB)

então $\theta = arc\ \mathrm{tg}\,\dfrac{dV}{dH}$

Ou graficamente pelo rebatimento do plano projetante α da reta r.



2º) Coeficiente de redução

O coeficiente de redução é dado por $\rho = \cos\theta = \dfrac{dH}{d}$

3º) Declive:

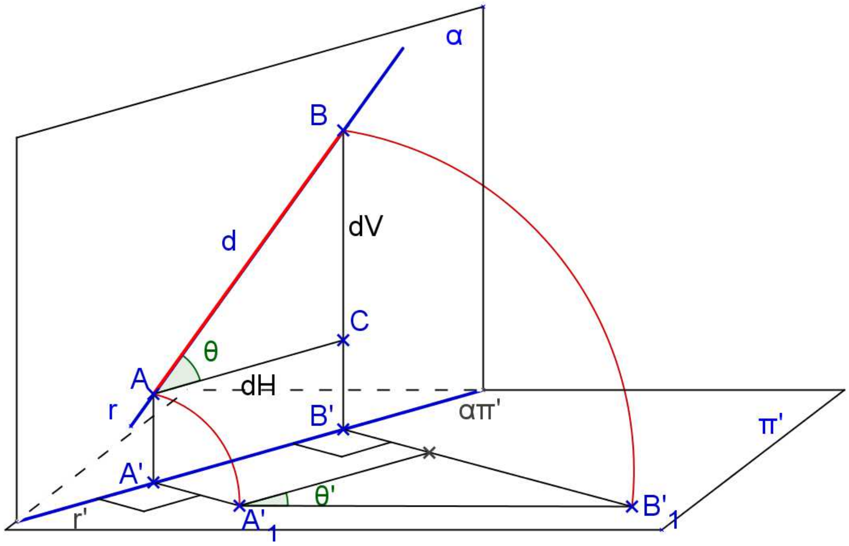
O declive de uma reta é a tangente da sua inclinação, ou seja, de = tg $\theta = \dfrac{dV}{dH}$

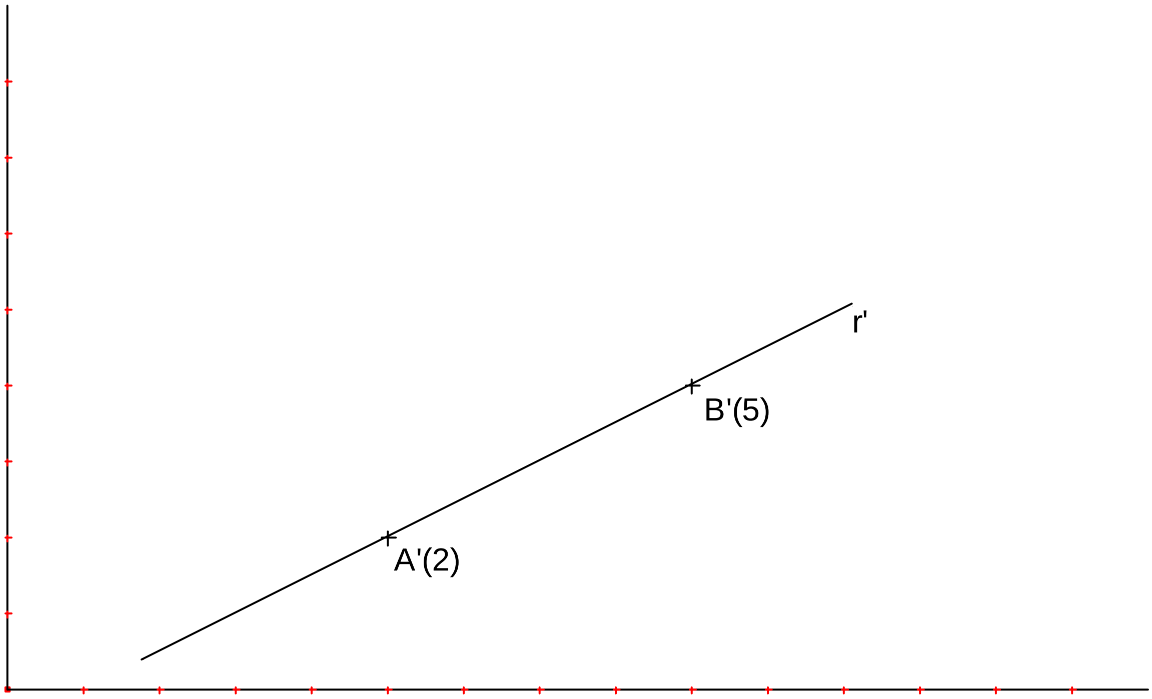
É comum exprimir o declive em porcentagem em vez de uma fração ou de um número decimal. Assim, em vez de se dizer, por exemplo, declive igual a 3/5 ou 0,6, usa-se dizer declive igual a 60%. Para inclinação zero não há declive. Para inclinação 90º o declive é infinito. E para inclinação 45º o declive é 100%.

O declive também é chamado de declividade ou rampa.

Exercício

Obter a inclinação da reta r(A,B) e a VG do segmento AB. Obter seu coeficiente de redução e seu declive. A unidade é o centímetro.

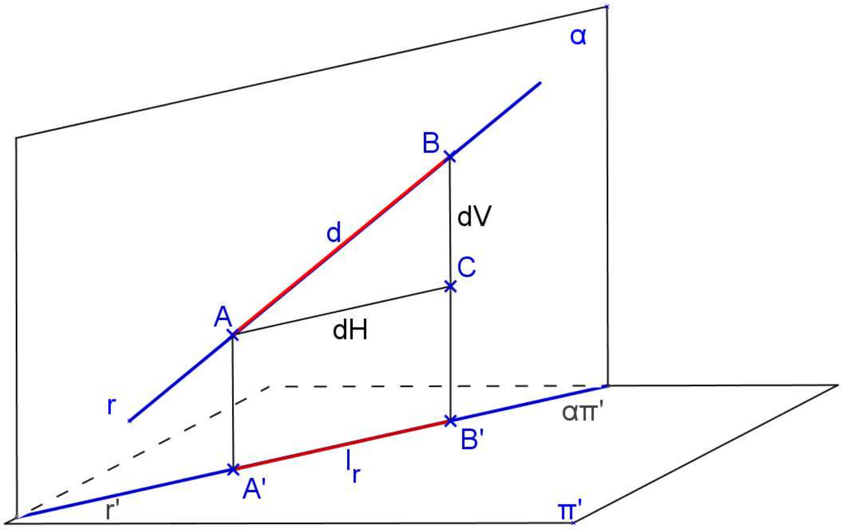




4º) Intervalo

O intervalo é uma distância horizontal de dois pontos de uma reta tais que a diferença de suas cotas seja igual a unidade.

Sejam A e B tais que |b-a|=1 unidade, sendo a e b as cotas dos pontos, respectivamente, então o intervalo I = dH = A'B'.



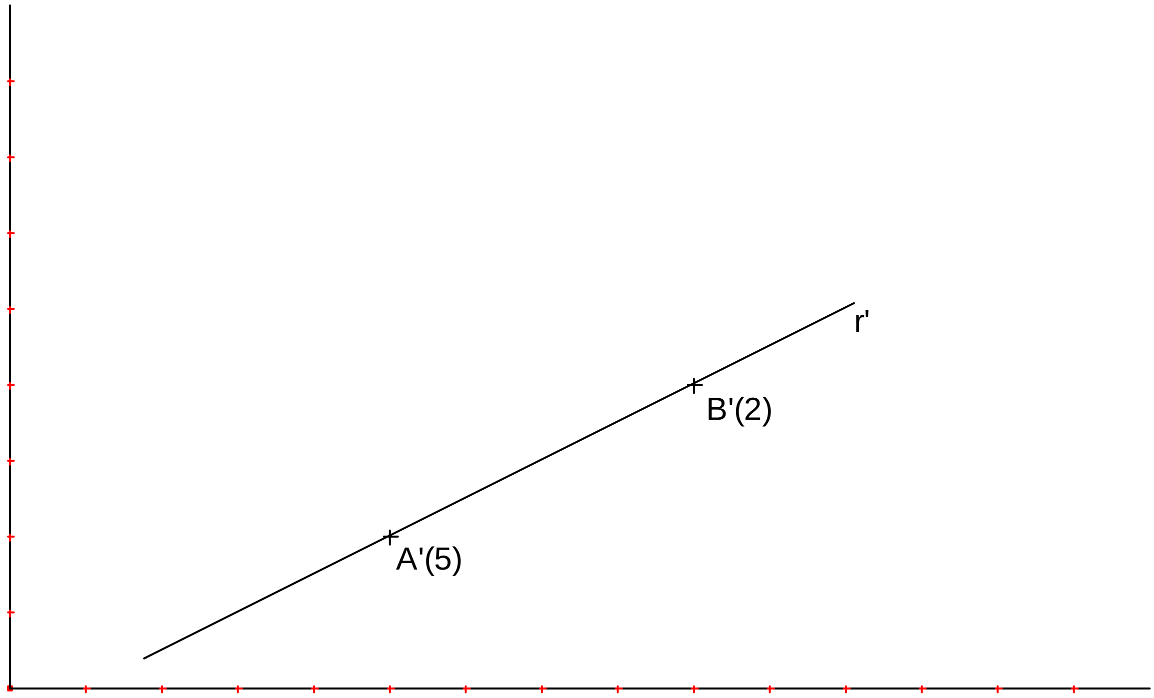
O declive é o inverso do intervalo unitário, pois:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{dV}}{\text{dH}} = \frac{b-a}{A'B'} = \frac{1}{A'B'} \;\therefore\; \text{tg}\,\theta = \frac{1}{A'B'} \Rightarrow \text{A'B'} = \frac{1}{\text{tg}\,\theta}$$

A equidistância é um múltiplo do intervalo.

Exercício:

Representar o intervalo da reta dada r(A,B)



5º) Escala de declive – Graduar uma reta

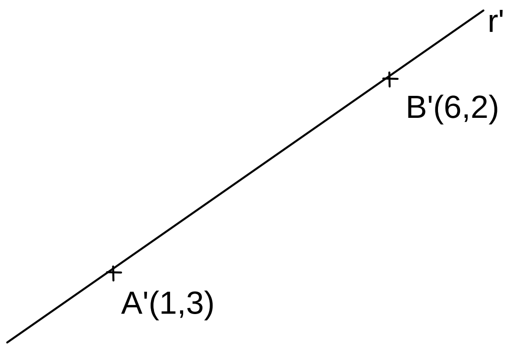
A escala de declive de uma reta r é a figura que se obtém representando sobre sua projeção r’ as projeções dos pontos de cotas inteiras. Graduar uma reta é obter a escala de declive.

- Marcando os pontos de cotas inteiras e consecutivas teremos o intervalo da reta.
- Representamos por g_r a graduação da reta r (pontos de cotas inteiras).

Exercício

Graduar a reta r definida pelos pontos A e B.
u cm

a)

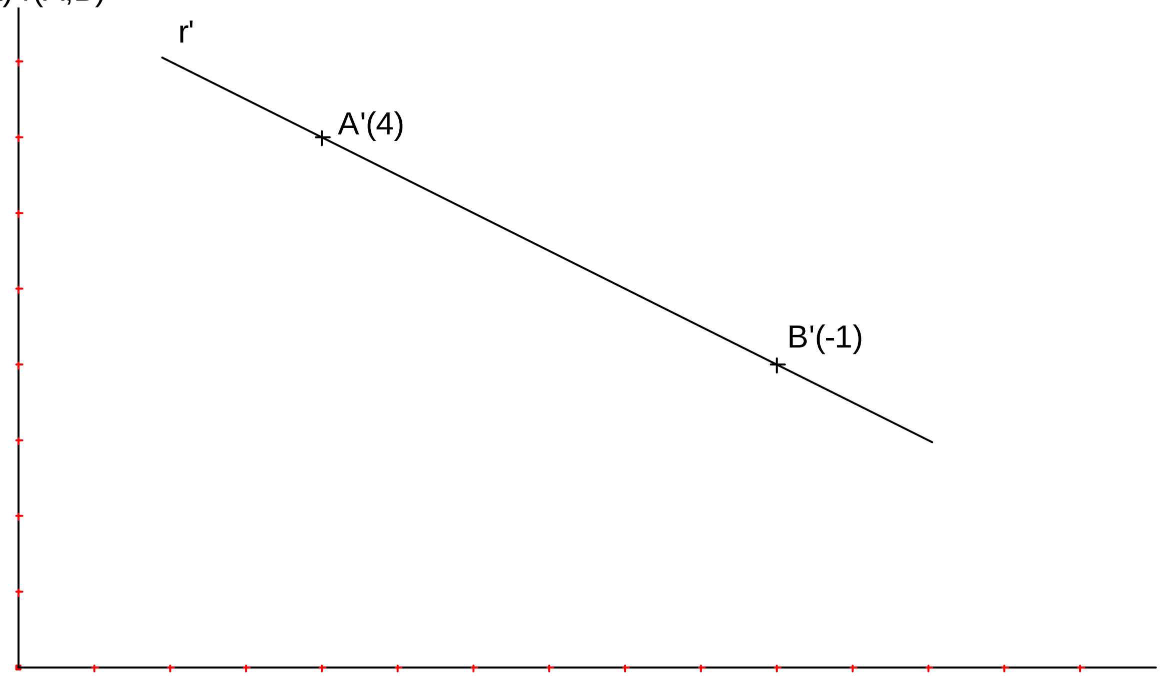


b) A(3 ; 5; 3,4) B(7 ; 2 ; -1,6)

Exercícios Propostos

1) Encontrar o traço de r sobre π'.
u cm

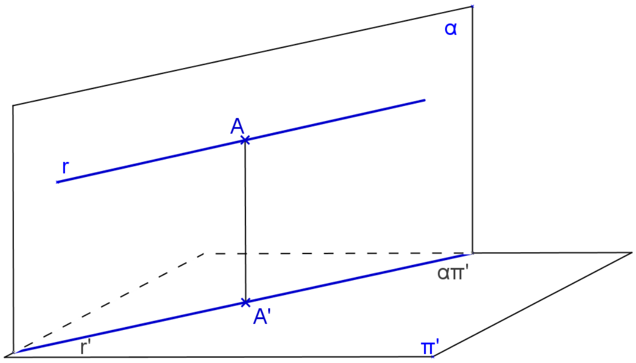
a) r(A,B)

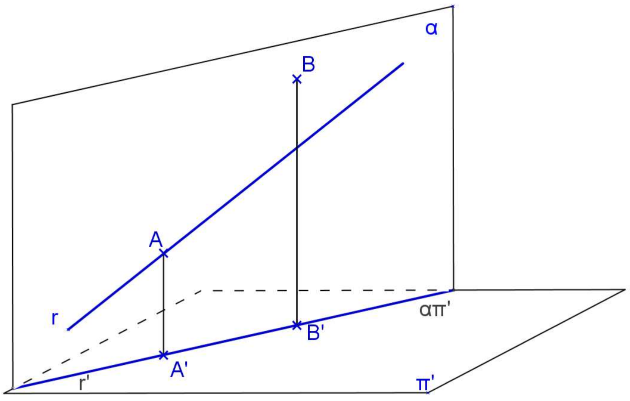


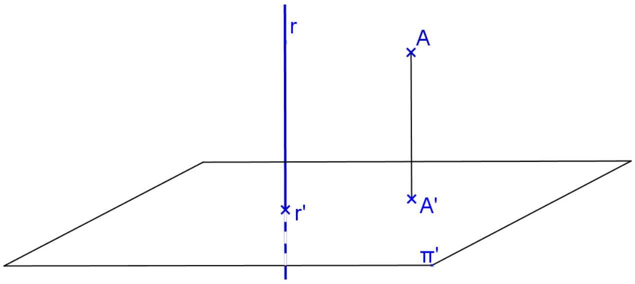
b) r(C,D), C(3, 2, 2) D(6, 4, 5)

4. Pertinência de ponto à reta

A condição para que um ponto pertença a uma reta é que sua projeção pertença à projeção da reta e que sua cota seja a cota de um ponto da reta.



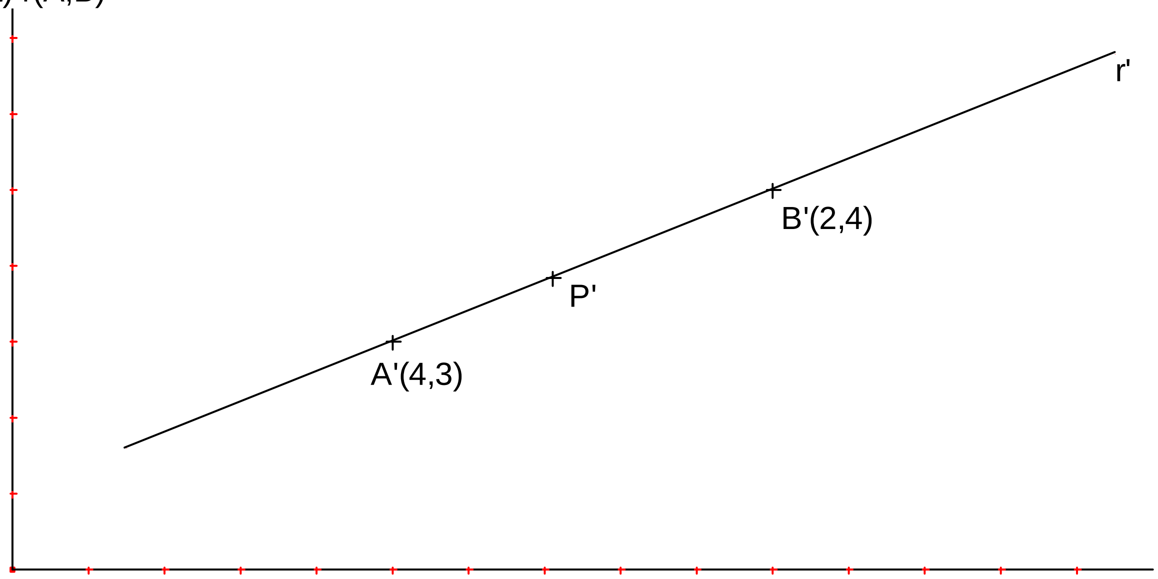




Exercícios

1) Obter o ponto P pertencente a uma reta dada r. Obter pontos de cotas inteiras da reta.
u cm

a) r(A,B)

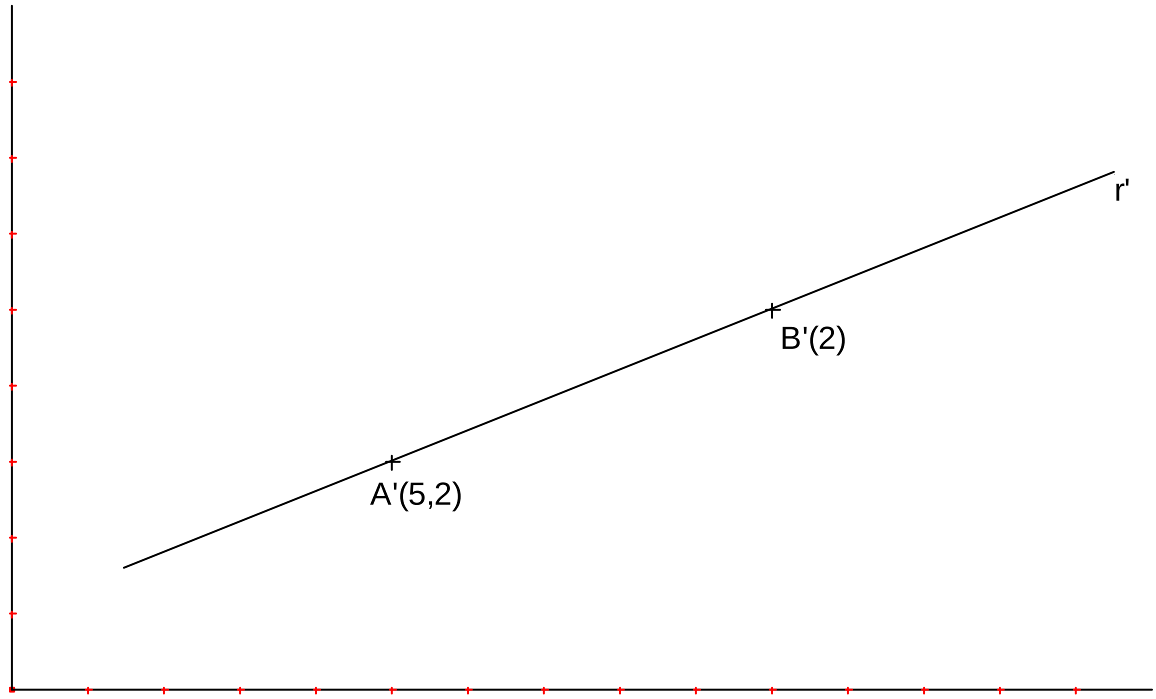


b) r(C, D), C(3, 3, 4) D(5, 7, 6) P(2, ?, ?)

c) r(E, F), E(8, 6, -2) F(12, 2, 5) P(?, 3, ?)

2) Representar um ponto P da reta dada r sendo dada a sua cota p.
u cm

a) r(A,B) p=4cm



b) r(C,D) C(4,5,4) D(8,2,2) e p=1cm

5. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Duas retas no espaço podem ser:

$$r \text{ e } s \begin{cases} \text{coplanares} & \begin{cases} \text{paralelas} \\ \text{concorrentes} \\ \text{coincidentes} \end{cases} \\ \text{não – coplanares ou reversas} \end{cases}$$

Vimos propriedade 2: Se r//s então r'//s' ou r'≡s' ou são pontuais.

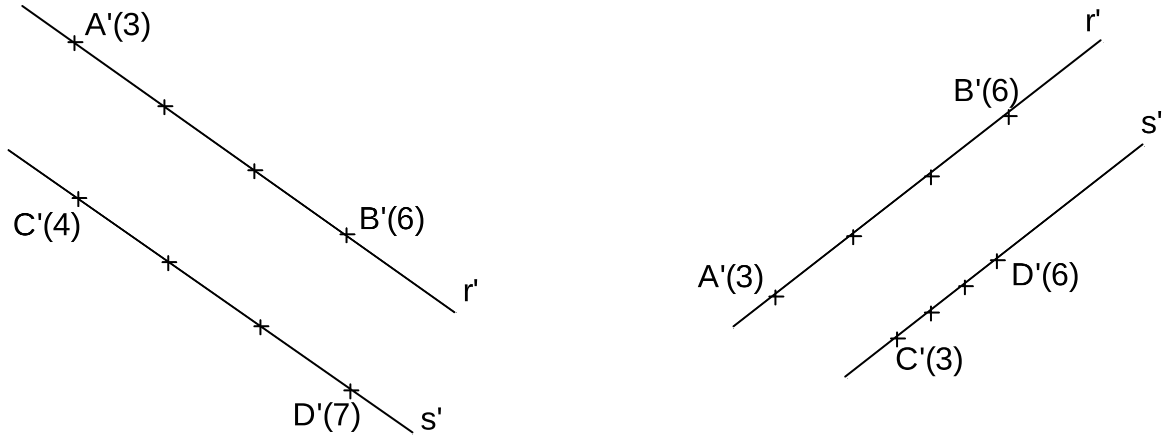
5.1. Condições de paralelismo

1º) Retas verticais
r e s verticais sempre serão paralelas ou coincidentes.

2º) Retas horizontais
r // s, ambas horizontais ⇔ r'//s'

3º) Retas quaisquer

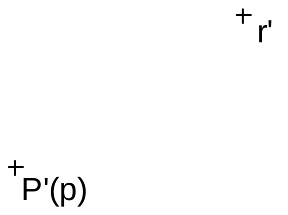
$$r \mathbin{//} s, \text{ ambas quaisquer} \Leftrightarrow \begin{cases} r' \mathbin{//} s' \text{ ou } r' \equiv s' \text{ e} \\ I_r = I_s \text{ e} \\ g_r \text{ e } g_s \text{ crescem no mesmo sentido} \end{cases}$$



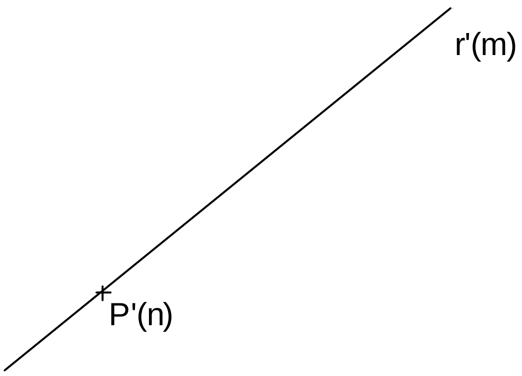
Exercício:

Representar a reta s pertencente a um ponto dado P e paralela a uma reta dada r.

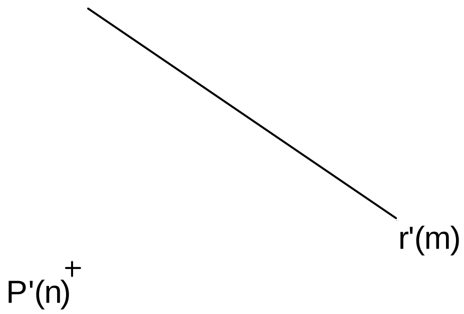
a)



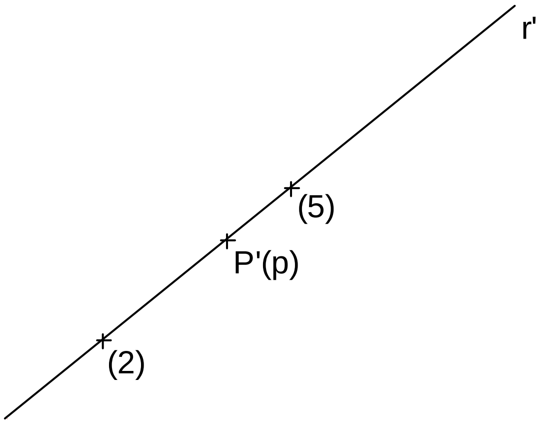
b)



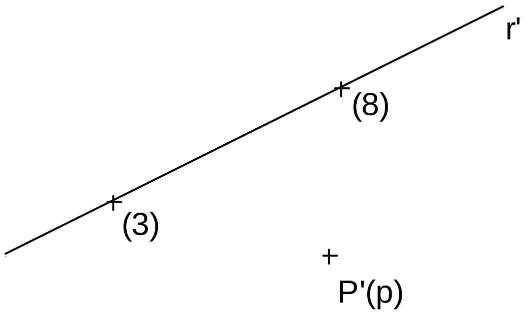
c)



d)



e)



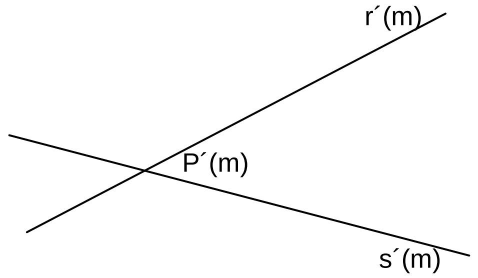
5.2. Condições de incidência

Sejam r(A,B) e s(C,D)

$$r \text{ pode ser } \begin{cases} \text{horizontal} \\ \text{vertical} \\ \text{qualquer} \end{cases} \quad \text{e s pode ser } \begin{cases} \text{horizontal} \\ \text{vertical} \\ \text{qualquer} \end{cases}$$

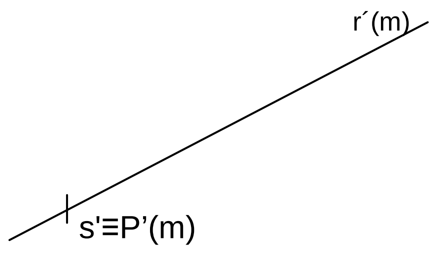
1º) <u>r horizontal e s horizontal</u>

r X s ⇔ Cotas iguais e projeções concorrentes.



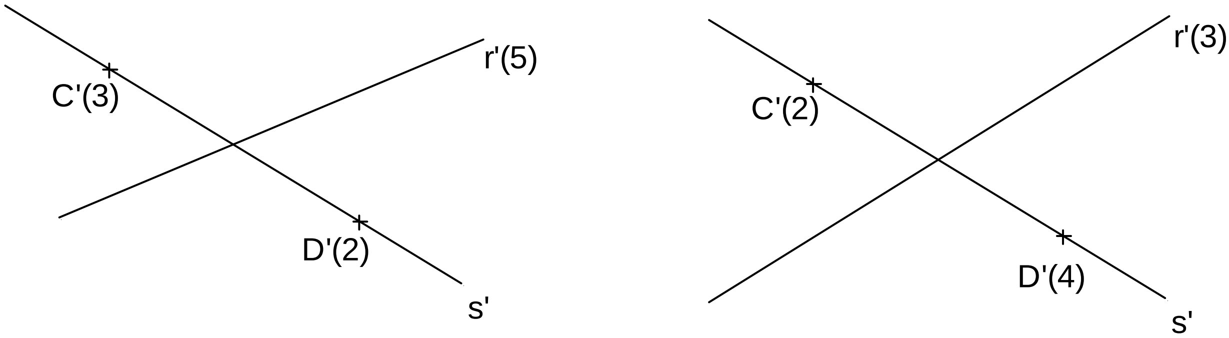
2º) <u>r horizontal e s vertical</u>

r X s ⇔ s’ ∈ r’



3º) r horizontal e s qualquer

$$r \text{ X } s \Leftrightarrow \begin{cases} - r' \text{ X } s' \\ - \text{(rs) tem mesma cota quando} \\ \quad \text{considerado de r e de s} \end{cases}$$

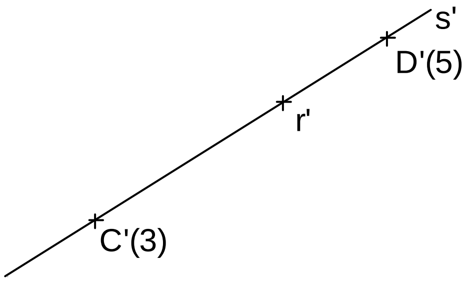


4º) r vertical e s vertical

Serão paralelas ou coincidentes.

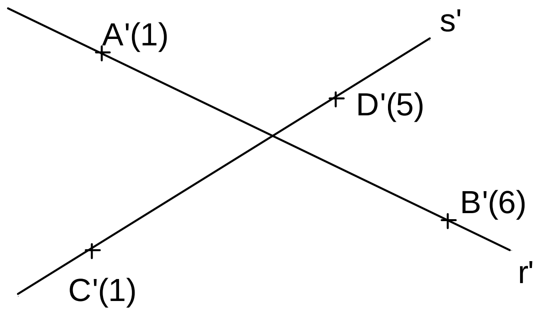
5º) r vertical e s qualquer

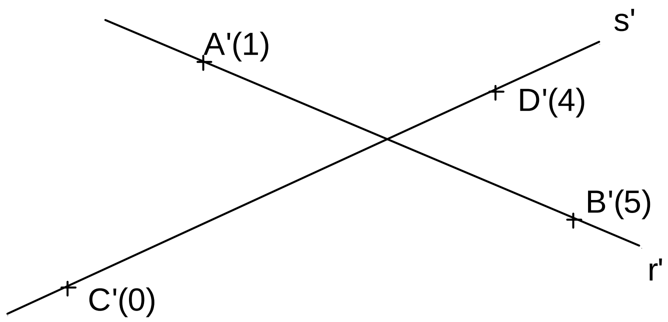
r X s $\Leftrightarrow$ r' $\in$ s'



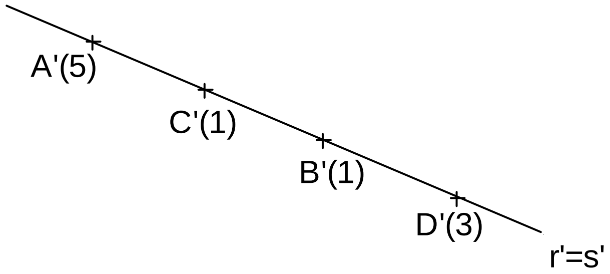
6º) r qualquer e s qualquer

a) Planos projetantes distintos e não paralelos – podem ser concorrentes ou reversas





b) Mesmo plano projetante – podem ser concorrentes ou paralelas r(A, B), s(C, D).



6. RETAS PERPENDICULARES OU ORTOGONAIS

Relembrando a Propriedade:

(1) $r \perp s$ (ou $r \perp s$)
Se (2) $r \,//\, \pi'$ (ou $r \subset \pi'$) $\Rightarrow$ (4) $r' \perp s'$
(3) $s \not\perp \pi'$

As recíprocas são válidas:

(2) $r \,//\, \pi'$ (ou $r \subset \pi'$)
Se (3) $s \not\perp \pi'$ $\Rightarrow$ (1) $r \perp s$ (ou $r \perp s$)
(4) $r' \perp s'$

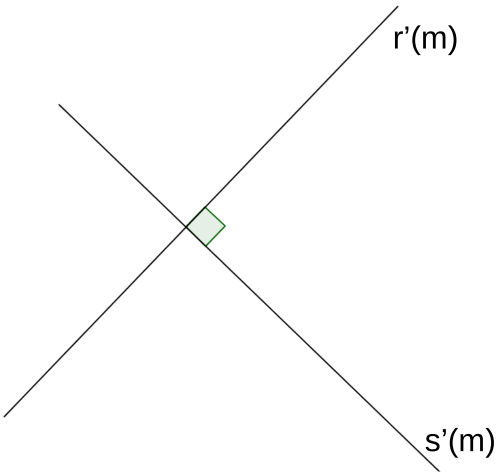
Se (1) $r \perp s$ (ou $r \perp s$) $\Rightarrow$ (3) $s \not\perp \pi'$
(4) $r' \perp s'$ (2) $r \,//\, \pi'$ (ou $r \subset \pi'$)

Na projeção cilíndrica ortogonal tem-se que um ângulo não reto somente se projeta em VG quando dois lados forem paralelos ao plano de projeção. Porém, se o ângulo for reto, basta um só lado ser paralelo (ou estar contido) e o outro ser não perpendicular ao plano de projeção para que ele tenha projeção ortogonal em VG.

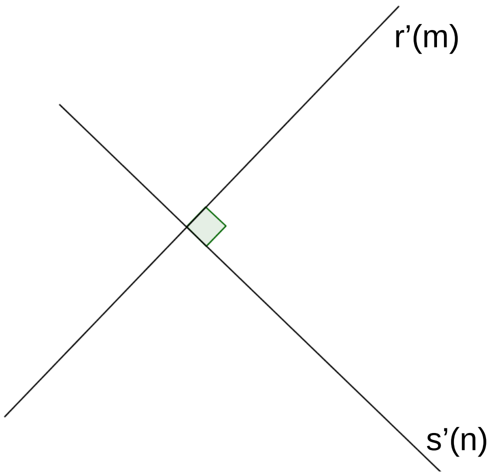
Sejam duas retas r e s então podemos ter:

1º) <u>r horizontal e s horizontal</u>

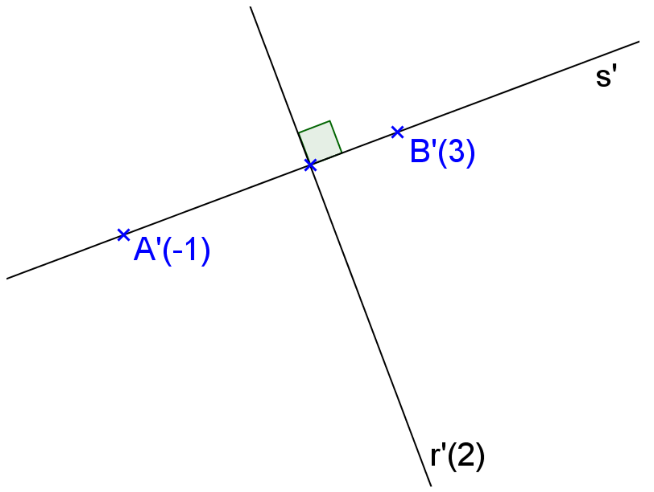
a) perpendiculares – ângulo reto e cotas iguais



b) ortogonais – ângulo reto e cotas diferentes

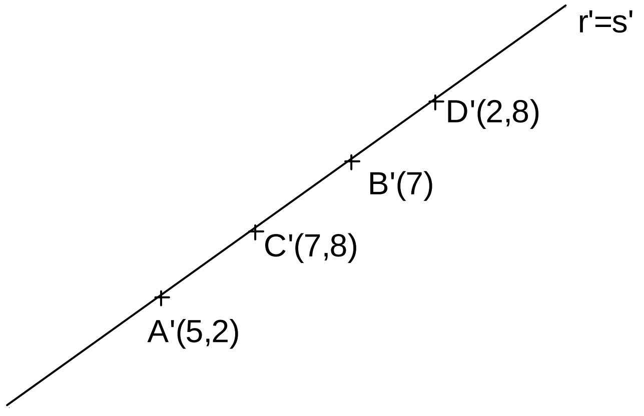


2º) r horizontal e s qualquer e pertencentes a planos projetantes distintos e não paralelos

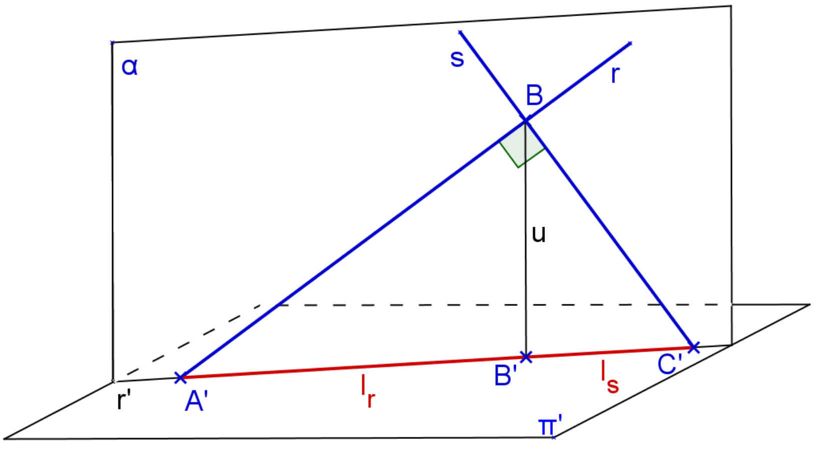


3º) r qualquer e s qualquer
E pertencentes ao mesmo plano projetante ou a planos projetantes paralelos

Solução 1: rebater o plano projetante



Solução 2: trabalhar com o intervalo (ou a eqüidistância) delas

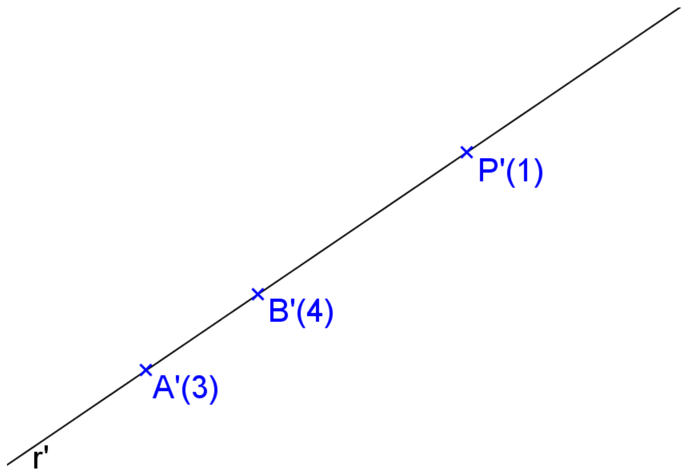


$$\begin{cases} r' // s' \text{ ou } r' \equiv s' \\ I_r = \dfrac{1}{I_s} \\ g_r \uparrow \; g_s \downarrow \end{cases}$$

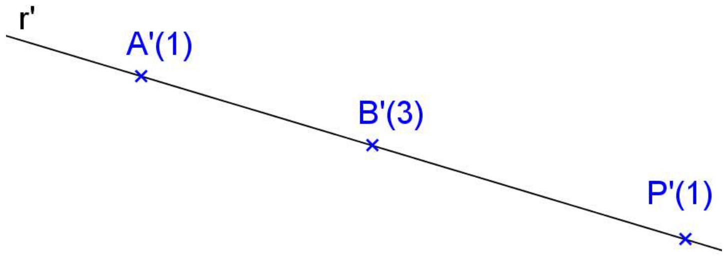
Exercícios Propostos:

1) Representar a reta s pertencente ao ponto dado P e perpendicular a uma reta dada r(A,B).

a)

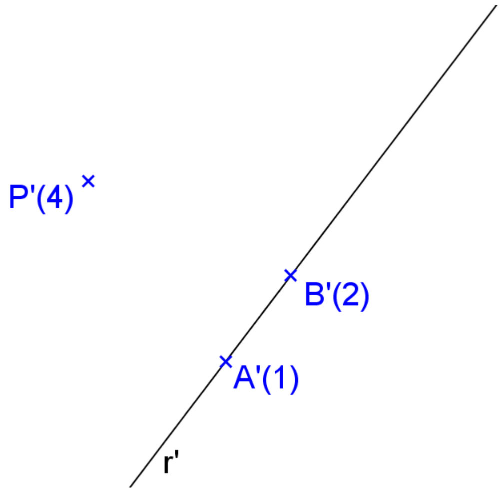


b)

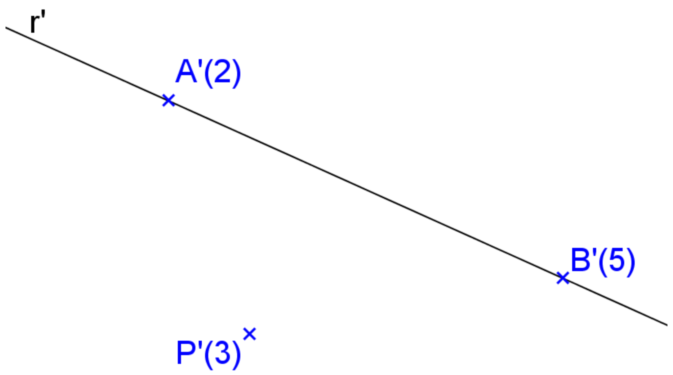


2) Representar a reta s pertencente ao ponto dado P e ortogonal a uma reta dada r(A,B), sabendo-se que seus planos projetantes são paralelos.

a)



b)



Capítulo IV – Representação do plano

1. Representação do plano

Um plano fica determinado por:

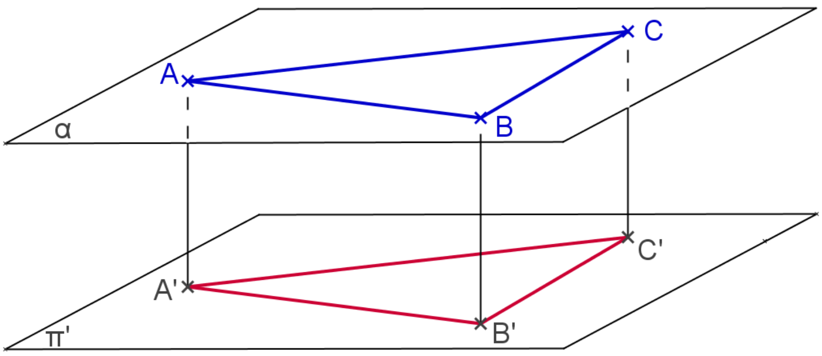
- Três pontos não colineares;
- Um ponto e uma reta que não se pertencem;
- Duas retas concorrentes ou paralelas.

2. Posições relativas de um plano em relação ao Plano de Projeção

$$\alpha \text{ e } \pi' \text{ podem ser } \begin{cases} \text{paralelos} \\ \text{perpendiculares (projetantes)} \\ \text{oblíquos} \end{cases}$$

2.1 Plano horizontal (ou de nível)

Espaço:



Épura:

+A'(m)

Propriedades:

a) Cota constante
b) Quantidade de pontos que determinam o plano:
c) Retas contidas no plano:
d) VG:
e) Reta perpendicular:

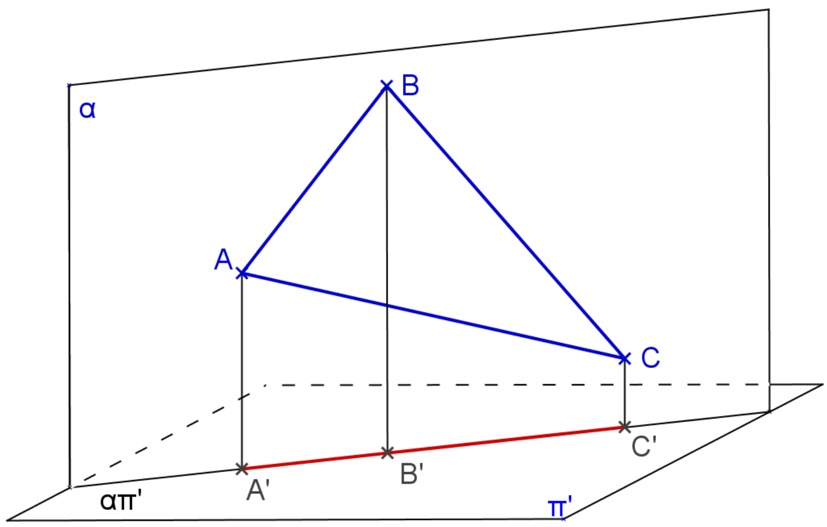
Exercícios

1. Represente a projeção cotada de uma pirâmide de base quadrada, V-ABCD regular, com a base contida no plano horizontal α(A,B) e altura de 4,3cm.

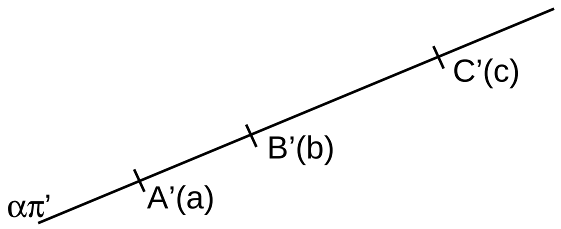
2. Represente a projeção cotada de uma pirâmide de base hexagonal, V-ABCDEF, com a base contida no plano horizontal α(A,B), dados os pontos A, B e V.

2.2. Plano vertical (ou projetante)

Espaço:



Épura:



<u>Propriedades</u>:

a) Plano projetante: qualquer figura contida neste plano tem sua projeção reduzida a um segmento ou a uma reta. Assim, r pertence a $\alpha \Leftrightarrow$ r' pertence a $\alpha\pi'$.

b) Quantidade de pontos que determinam o plano:

c) Retas contidas no plano:

d) VG:

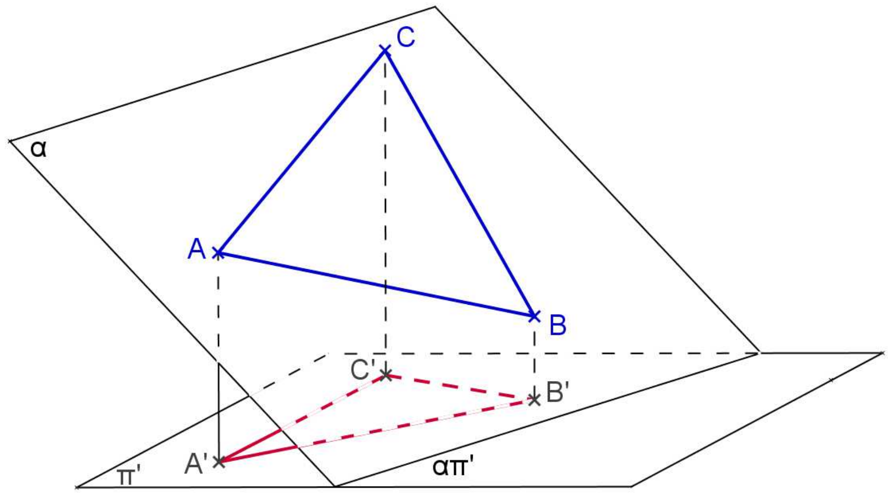
e) Reta perpendicular:

Exercício

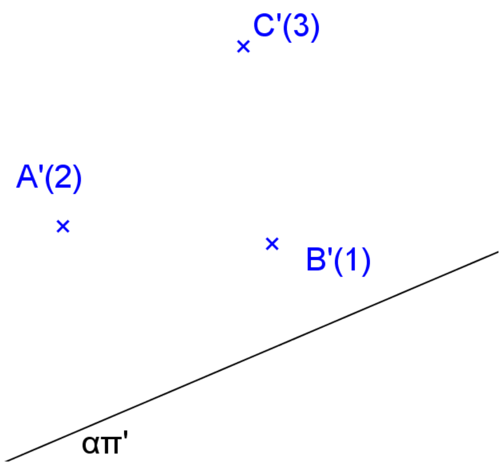
Represente as projeções da pirâmide regular, de base quadrada, V-ABCD, com a base contida no plano vertical α(A,B) e altura de 4cm.

2.3. Plano qualquer

Espaço:



Épura:



<u>Propriedades</u>:

a) Quantidade de pontos que determinam o plano:

b) Retas contidas no plano:

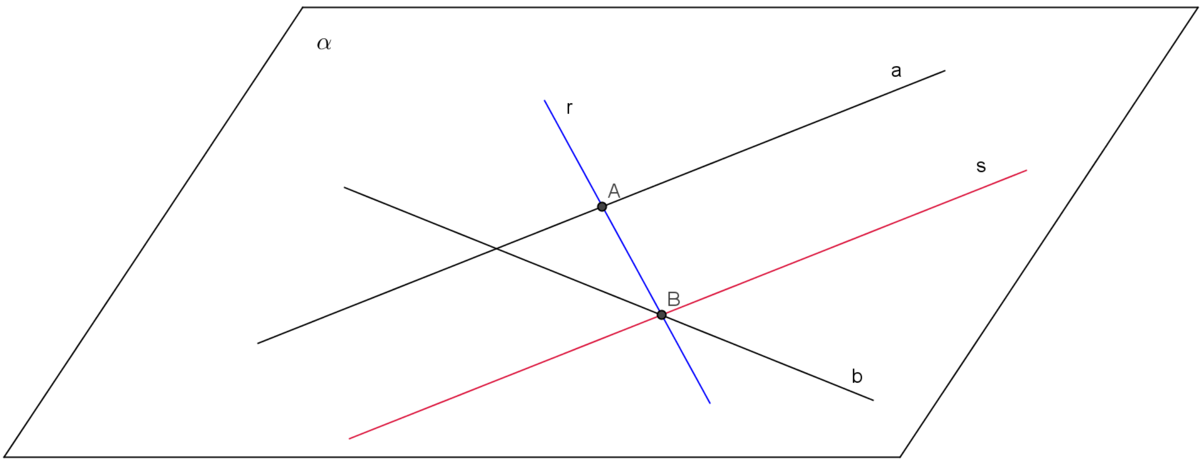
c) VG:

d) Reta perpendicular:

3. PERTINÊNCIA DE PONTO E RETA A UM PLANO QUALQUER

3.1. Pertinência de reta a plano qualquer

$$r \subset \alpha \iff \begin{cases} r \text{ X } a,\ r \text{ X } b \text{, em pontos distintos, onde } a, b \subset \alpha \\ r \text{ X } a,\ r\ //\ b, \text{ onde } a, b \subset \alpha \end{cases}$$



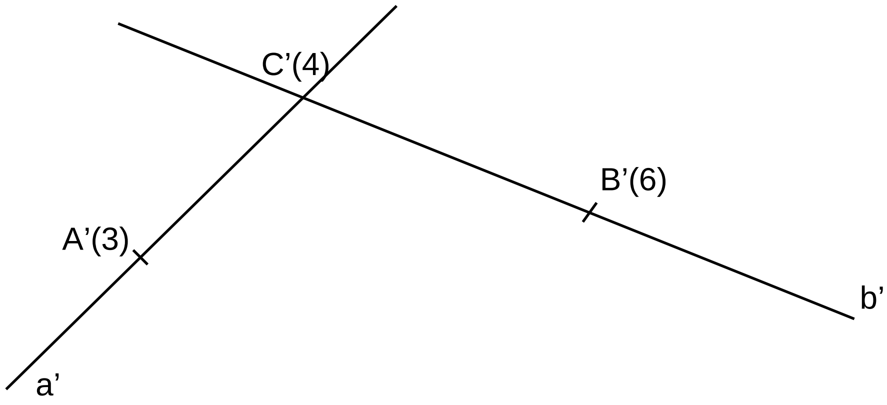
3.2. Pertinência de ponto a plano qualquer

$P \in \alpha \Leftrightarrow P \in r \text{ e } r \subset \alpha$

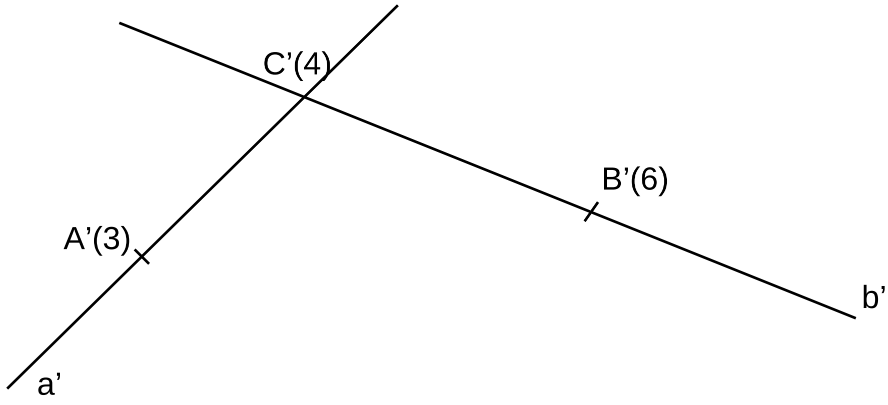
Exercícios:

1) Representar uma reta r pertencente ao plano dado α(a,b)

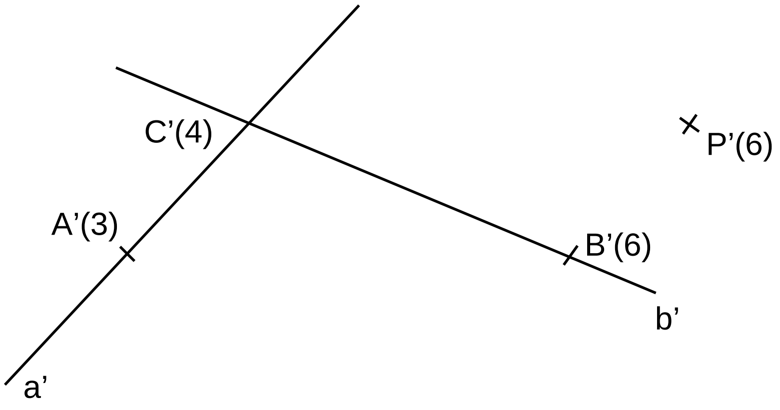
a) considerar rXa e r//b



b) considerar rXa e rXb

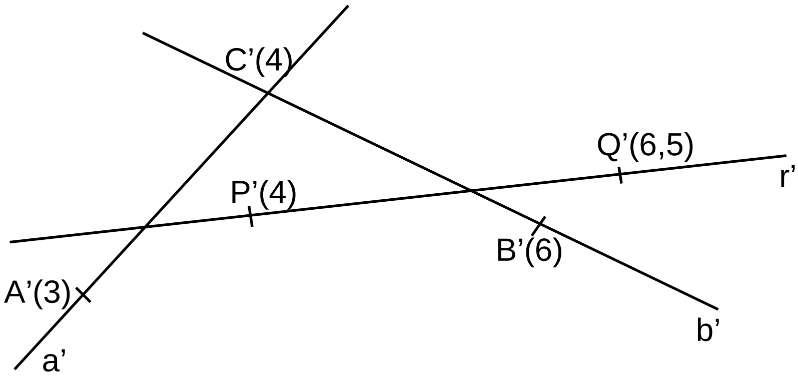


2) Verificar se o ponto P pertence ao plano α(a,b)

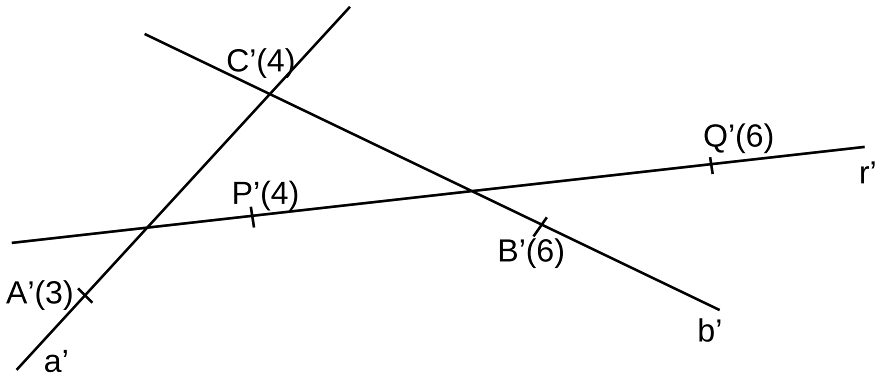


3) Verificar se a reta dada r(P,Q) pertence ao plano dado α(a,b)

a)



b)

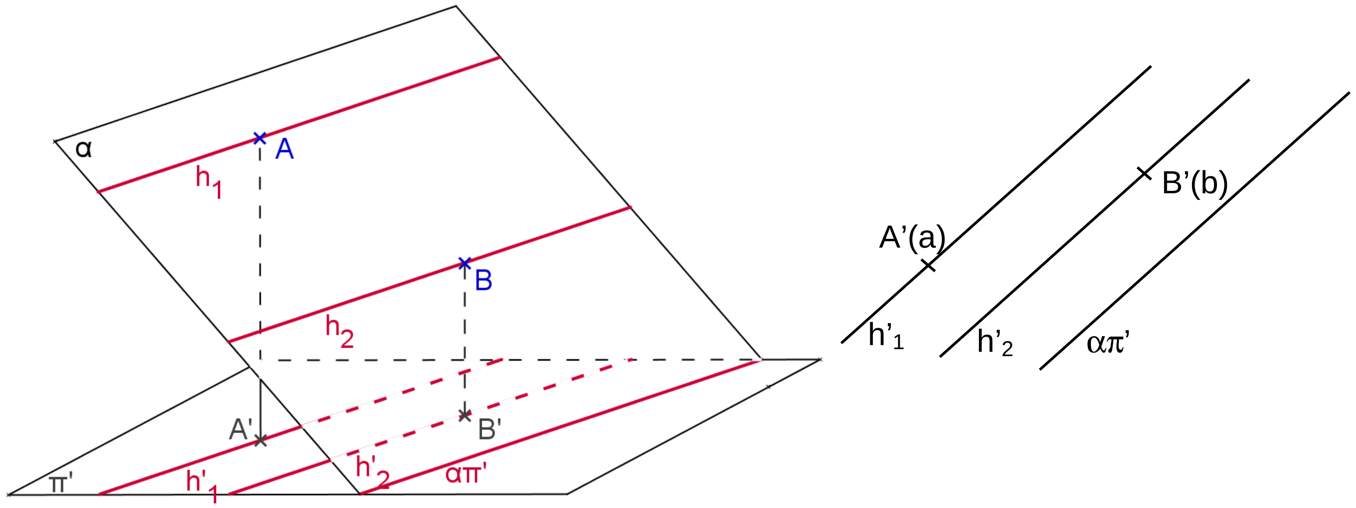


3.3 Elementos de um plano qualquer

1º) Horizontais de um plano

As horizontais de um plano qualquer são as retas de cota constante, ou seja, são as retas horizontais que estão contidas no plano.

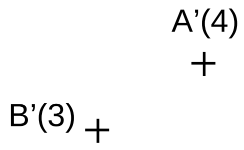
<u>Observação</u>: As horizontais de um plano são sempre paralelas entre si



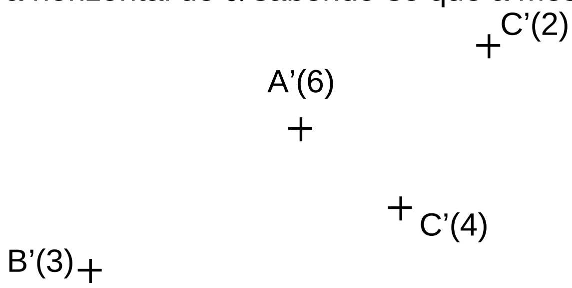
Exercícios:

1. Dado o plano α(A,B,C), encontrar a horizontal do plano conduzida pelo ponto B.
Dados: A(60, 60, 50) B(10, 20, 25) C(80, 10, 10)

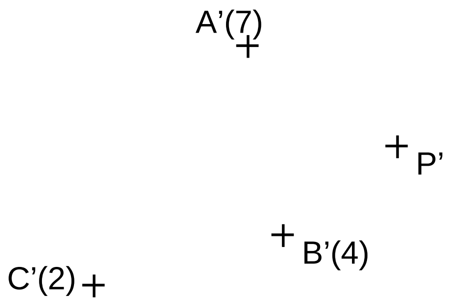
2. Determinar o traço do plano α(A,B,C) sobre o plano π′ (απ′).



3. Representar a horizontal de α sabendo-se que a mesma tem uma cota c=1 dada.



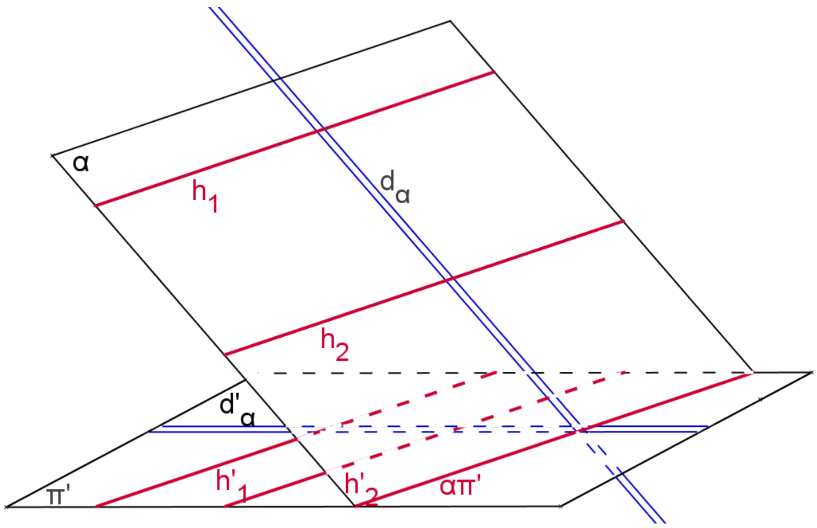
4. Obter a cota de um ponto P pertencente a um plano α(A,B,C) qualquer, sendo dada a sua projeção.

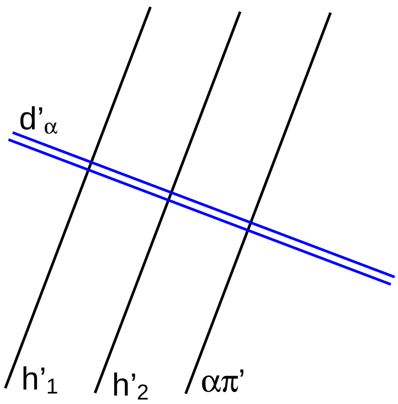


5. Dado o plano α(A,B,C) representar a reta r conduzida pelo ponto D do plano α e paralela à reta AC.
Dados: A(10, 40, 30) B(70, 60, 80) C(40, 10, 50) D(70, 40, ?)

2º) Reta de declive de um plano

Definição: a reta de declive de um plano é uma reta deste plano que é perpendicular às horizontais desse plano.

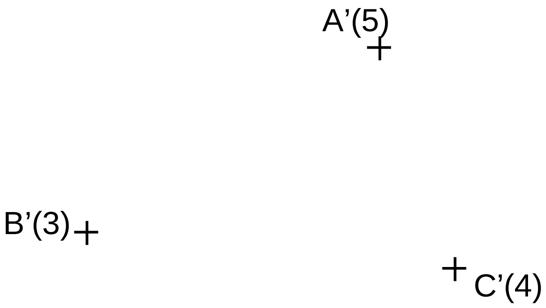




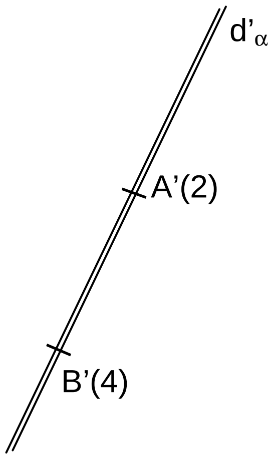
Propriedades:
1ª) Todas as retas de declive de α são paralelas entre si.
2ª) Graduar a reta de declive de um plano significa representar sua escala de declive.
3ª) Uma reta de declive de um plano qualquer é suficiente para representá-lo.

Exercícios:

1. Representar uma das retas de declive de um plano α(A,B,C) qualquer dado.



2. Dado o plano qualquer α por uma reta d_α de declive, representar outras retas deste plano.



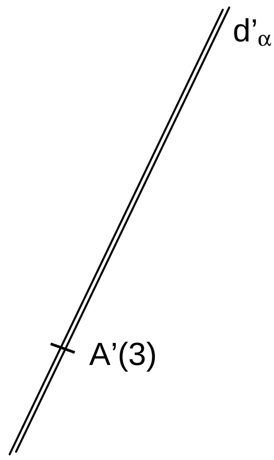
3º) Inclinação de um plano

Propriedades:
1ª) A inclinação de um plano é a inclinação de uma de suas retas de declive.
2ª) O ângulo entre α e π' é o ângulo formado por d e π'.

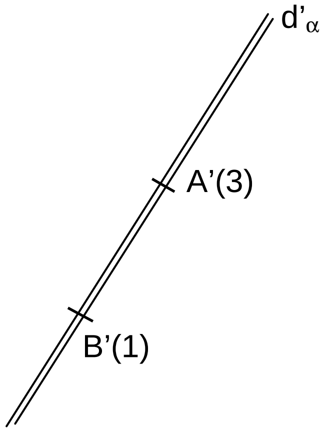
Exercícios:

1. Encontrar o ângulo que o plano α(A, B, C) forma com o plano π'.
Dados: A(10, 20, 15), B(40, 70, 50) C(70, 10, -10)

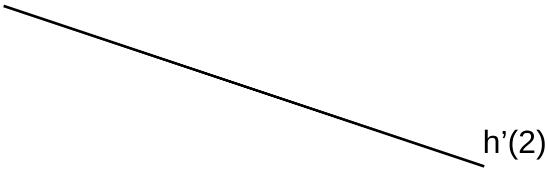
2. Representar o plano α(d) que forma 30º com o plano π'.



3. Encontrar o ângulo θ que o plano $\alpha(d_\alpha)$ forma com π'.

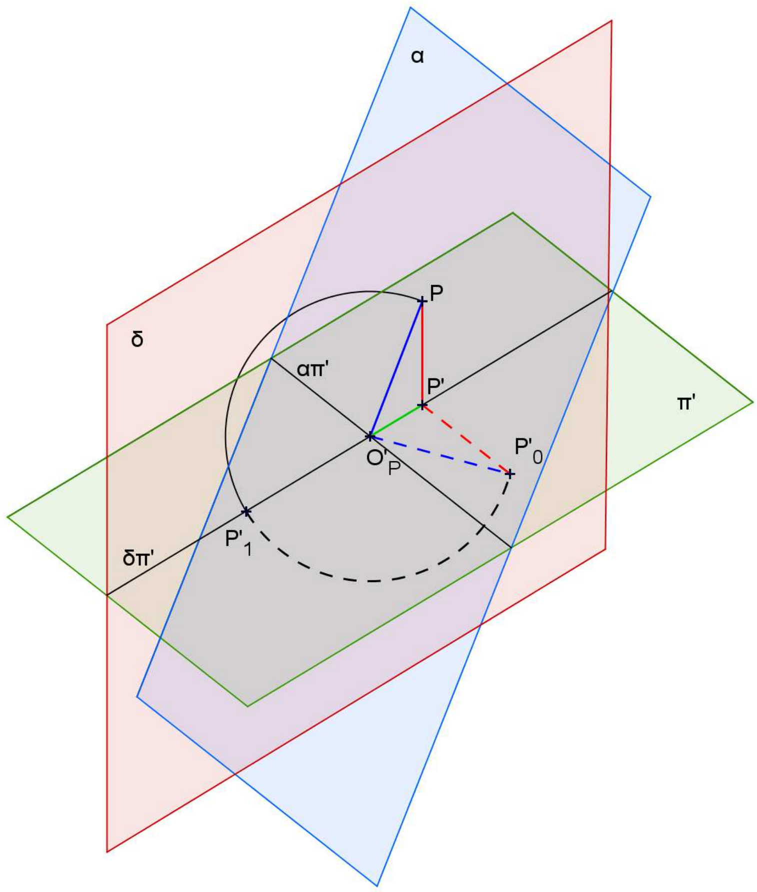


4. Representar um plano α que contenha a reta dada h e forme ângulo de 60º com π'.



4. REBATIMENTO DO PLANO QUALQUER

Para determinar a verdadeira grandeza de uma figura contida num plano qualquer, deve-se efetuar o rebatimento do mesmo sobre o plano horizontal π', ou sobre um outro plano paralelo à π'. O plano α é rotacionado em torno do eixo $\alpha\pi'$, que é o eixo de rotação do plano α, até coincidir com o plano π'. O movimento do plano α em torno do eixo, descreve um arco de circunferência que está contido num plano perpendicular ao plano π', plano γ e, portanto a projeção deste arco será um segmento de reta contido no traço do plano γ sobre o plano π'. Para determinar a verdadeira grandeza deste arco, o plano vertical, γ, que contém o arco é rebatido em torno de seu eixo $\gamma\pi'$. O triângulo OPP' é o triângulo fundamental do rebatimento, sua verdadeira grandeza é representada pelo triângulo OP'_0P'.



Exercícios:

1. Dado o plano α (A, B, C), pede-se: encontrar a Verdadeira Grandeza (V.G.) do triângulo ABC.
Dados: A (30, 70, 0) B(80, 40, 0) C(80, 80, 40)

2. Encontrar a verdadeira grandeza do triângulo ABC.
Dados: A (50,30,30) B(20,60,70) C(80,70,10)

3. Encontrar a projeção cotada de um triângulo equilátero ABC inscrito na circunferência definida pelos pontos A, P e Q, sendo A um de seus vértices.

Dados: A (100,70,10), P(70,90,70) Q(60,70,40)

4. Representar um quadrado ABCD, contido no plano α (A, P, Q), sabendo que o lado AB é horizontal.

Dados: A (50,40,10) P(70,20,40) Q(90,60,50)

5. POSIÇÃO RELATIVA ENTRE DOIS PLANOS

Dados dois planos quaisquer α e β no espaço, eles podem ser:

$$\alpha \text{ e } \beta \text{ podem ser} \begin{cases} \text{coincidentes} \\ \text{paralelos} \\ \text{secantes } (\perp \text{ ou } \angle) \end{cases}$$

5.1. Condições de paralelismo de dois planos

Sejam α e β dois planos distintos, então:

a) Se α e β são horizontais, então α é paralelo à β;

b) Se α e β são verticais, então α é paralelo à β se $\alpha\pi' \mathbin{//} \beta\pi'$;

c) Se α e β são planos quaisquer, então α é paralelo à β se suas retas de declive forem paralelas, ou seja, suas escalas de declive estão situadas em retas paralelas, seus intervalos são congruentes e suas cotas crescem no mesmo sentido sobre as escalas de declive.

<u>Exercício</u>: Conduzir pelo ponto P, um plano β paralelo ao plano α(A, B, C).
Dados: A(2, 3, 5) B(4, 5, 7) C(6, 1, 3) P(11, 4, 1)

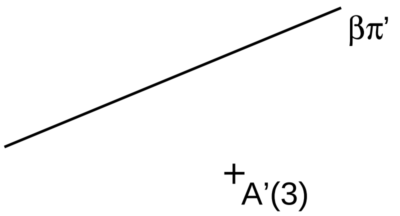
5.2. Planos Não paralelos: Interseção de planos

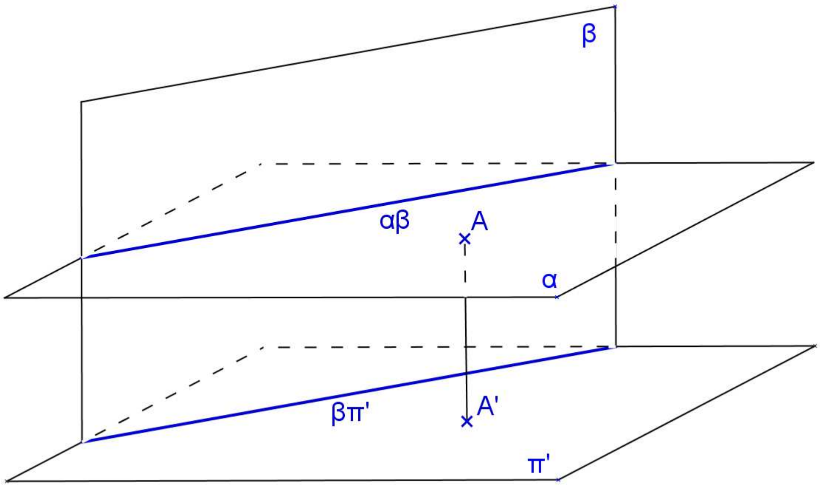
- Dois planos não paralelos α e β, são concorrentes quando possuem uma reta comum ($\alpha\beta$).
- O traço de um plano horizontal α sobre um plano vertical β é uma reta horizontal ($\alpha\beta$) que possui a mesma cota do plano horizontal α.
- Para determinar o traço entre dois planos quaisquer, utilizam-se planos auxiliares, geralmente horizontais, que facilitam a resolução do problema.

  Pode-se considerar os seguintes casos:

1º) α // π' e β // π': neste caso o traço $(\alpha\beta)_\infty$ ou não existe.

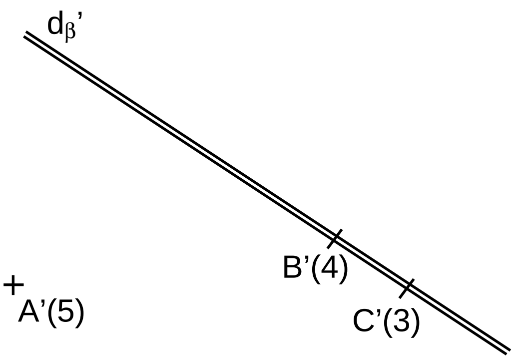
2º) α // π' e $\beta \perp \pi'$: neste caso $(\alpha\beta)' \equiv \beta\pi'$ onde $(\alpha\beta)'_{(\alpha)}$

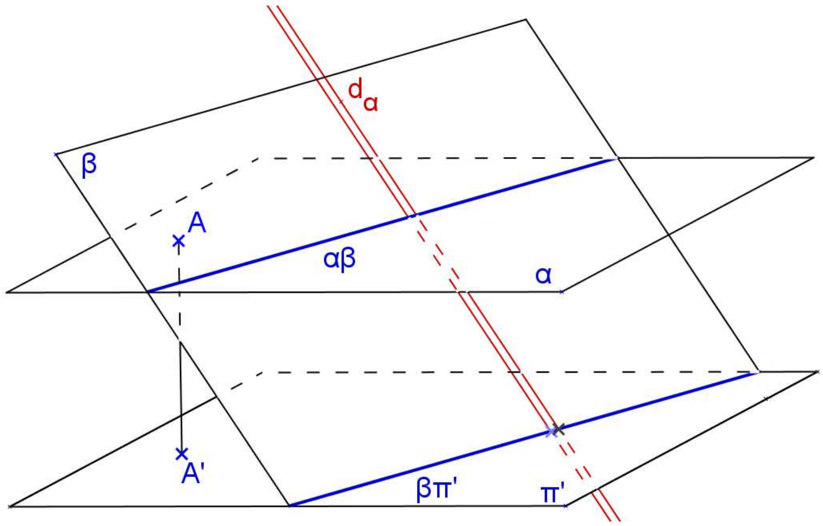




3º) α // π' e $\beta \not\perp \pi'$: neste caso $\alpha\beta$ // π'.

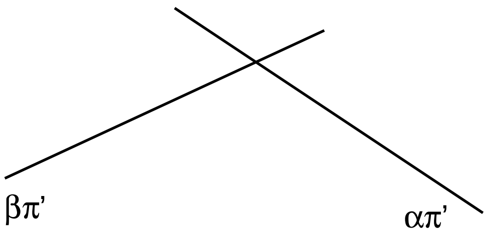
a)

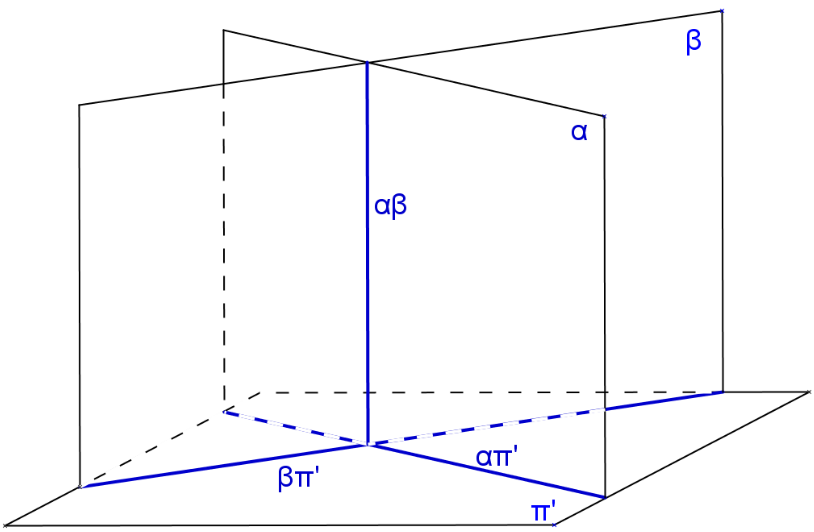




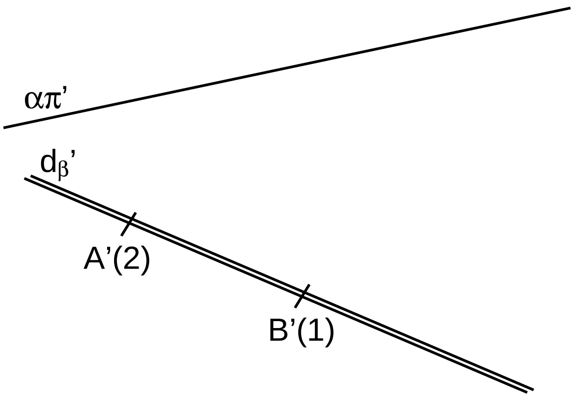
b) α é horizontal de cota c = 50, e β (A, B, C), onde: A(50, 10, 20) B(20, 50 ,50) C(70, 30, 30)

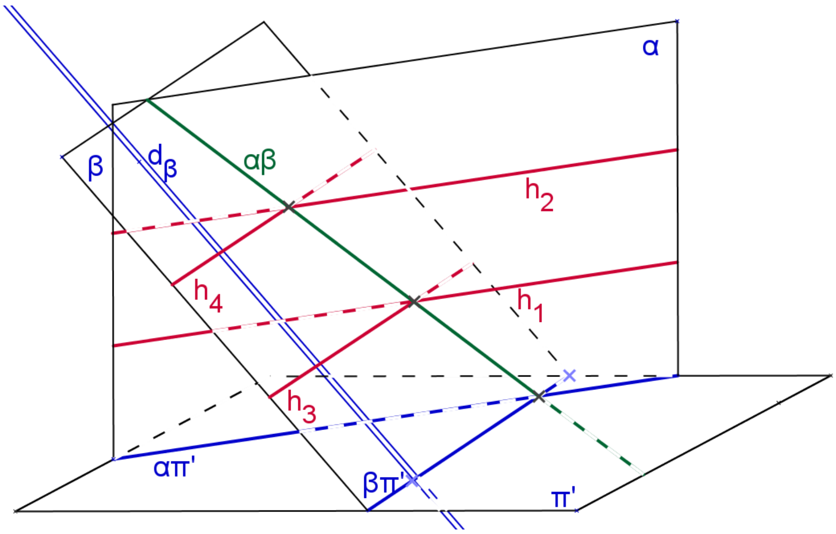
4º) <u>$\alpha \perp \pi$' e $\beta \perp \pi$'</u>: neste caso $\alpha\beta \perp \pi'$, ou seja, $\alpha\beta$ é uma reta vertical.



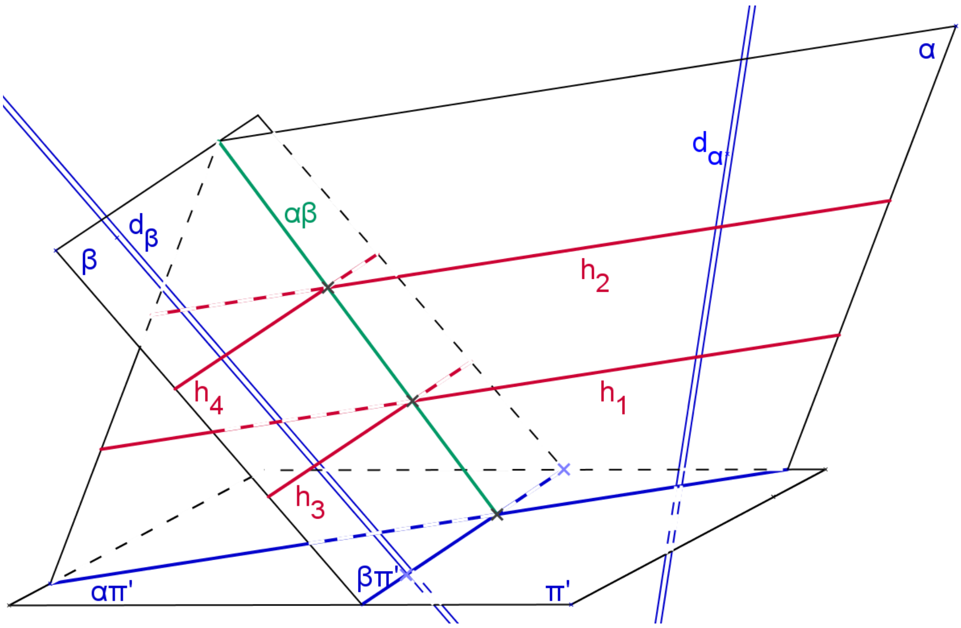


5º) $\alpha \perp \pi'$ e $\beta \not\perp \pi'$:

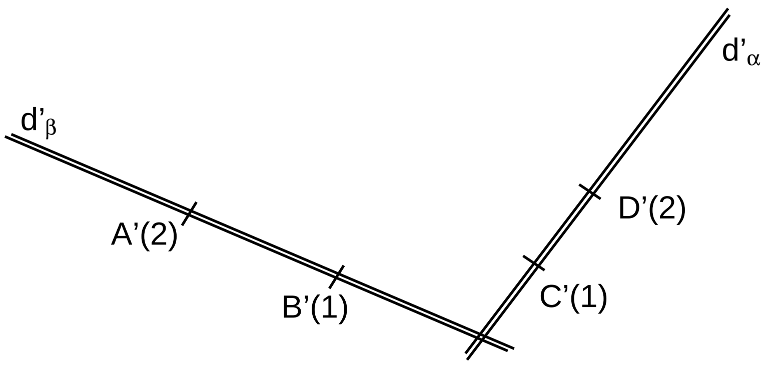




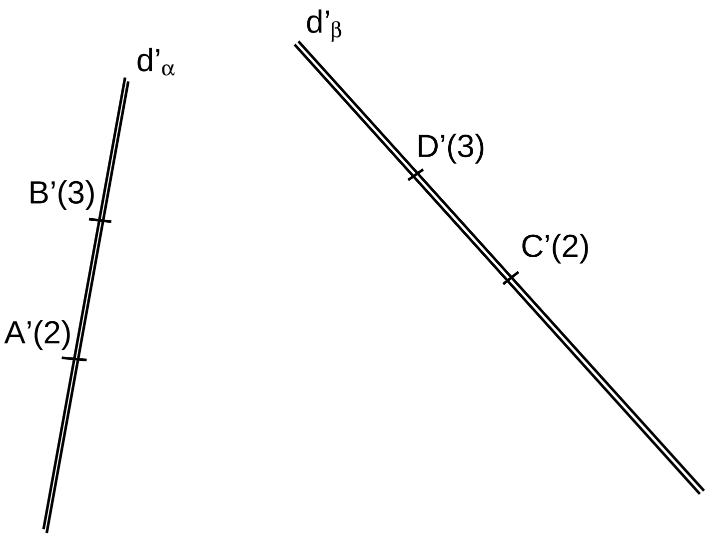
6º) <u>$\alpha \not\perp \pi'$ e $\beta \not\perp \pi'$</u>: Sejam $\alpha(d_\alpha)$ e $\beta(d_\beta)$

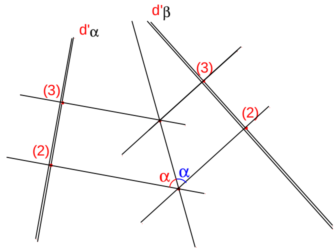


a) α e β são dados por suas retas de declive.



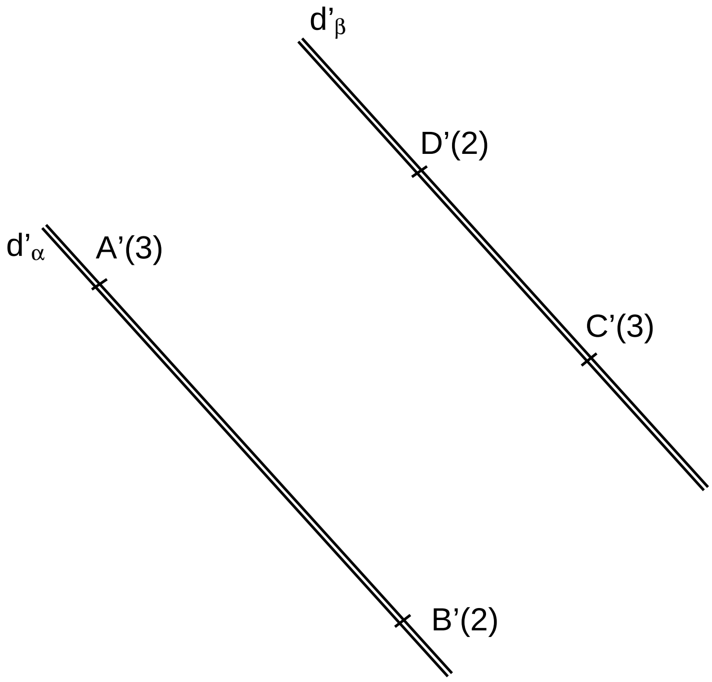
b) Os intervalos de α e β são iguais





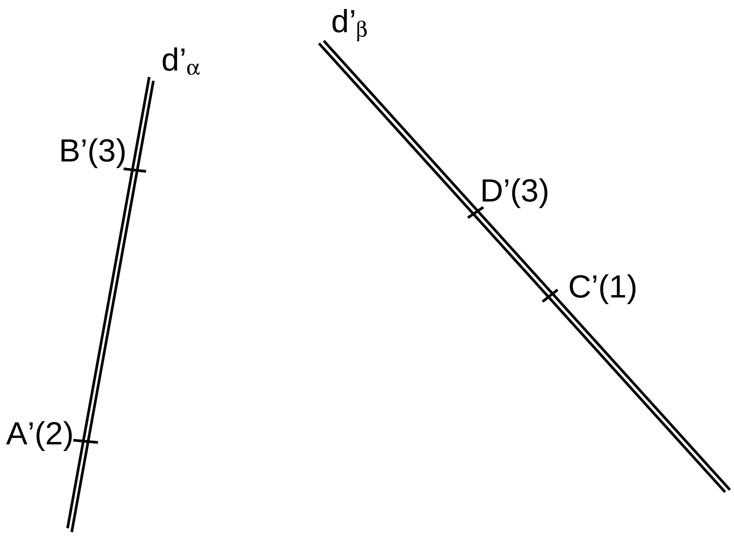
Observação: Quando dois planos estão igualmente inclinados então eles se cortam segundo uma reta que é a bissetriz do ângulo formado pelas suas horizontais.

c) As projeções de d_α e d_β são paralelas.



d) α(A, B, C) e β(D, E, F), onde: A(0, 40, 70) B(80, 80, 30) C(50, 0, 10)
D(20, 90, 20) E(-10, 10 40) F(70, 20, 30)

e)



f) $\alpha(d_\alpha)$, $\beta(d_\beta)$, $d_\alpha(A,B)$, d_β (C,D)
Dados: A(5,7,6) B(2,3,1) C(7,6,4) D(9,4,2)

g) $\alpha(d_\alpha)$, $\beta(d_\beta)$, $d_\alpha(A,B)$, d_β (C,D)
Dados: A(3,4,3) B(2,7,5) C(6,2,7) D(10,6,2)

6. Posições Relativas entre Retas e Planos

De acordo com sua posição no espaço, um plano e uma reta podem ser: paralelos, concorrentes ou a reta pode estar contida no plano.

6.1 Reta Paralela a Plano

Uma reta r é paralela a um plano α quando é paralela a uma das retas desse plano.

Se o plano α for vertical, a reta r será paralela ao plano α se sua projeção r' for paralela ao traço $\alpha\pi'$.

Se o plano α for horizontal, a reta r é paralela a α quando for paralela a uma das horizontais de α e possuir cota diferente da cota do plano.

Exercício: Conduzir pelo ponto P, uma reta r, paralela ao plano α, definido pelos pontos A, B e C.

Dados: A(10, 10, 20) B(70, 30, 50) C(40, 80, -10) P(60, 10, 30).

6.2 Reta concorrente com plano

Uma reta concorrente a um plano pode ser:

- Perpendicular ao plano;
- Oblíqua ao plano.

6.3 Reta Oblíqua ao plano

Definição: Uma reta é oblíqua a um plano, quando forma com o mesmo, ângulo diferente de 0^o ou 90^o.

6.4 Reta perpendicular a plano

- Se r é uma reta vertical, então qualquer plano α horizontal é perpendicular à reta;
- Se r é uma reta horizontal, então um plano α, perpendicular a esta reta, é vertical e $\alpha\pi'$ é perpendicular à r';
- Se a reta r é qualquer, então um plano α, perpendicular à reta r, é qualquer e é perpendicular às retas de declive do plano α. Para que a reta r seja perpendicular ao plano α é necessário e suficiente que suas escalas de declive estejam situadas em retas paralelas, que seus intervalos sejam inversos um do outro e que as graduações das escalas de declive cresçam em sentidos opostos.

Exercício: Conduzir pelo ponto P(100, 30, 40) uma reta r, perpendicular ao plano α (A, B, C). Onde A(0, 70, 10), B(80, 80, 50) e C(70, 0, 25)

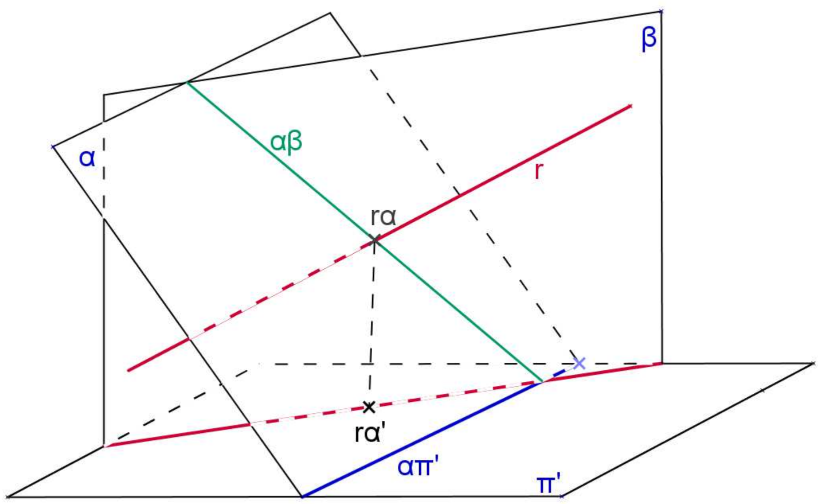
7. Problemas Fundamentais de Posição

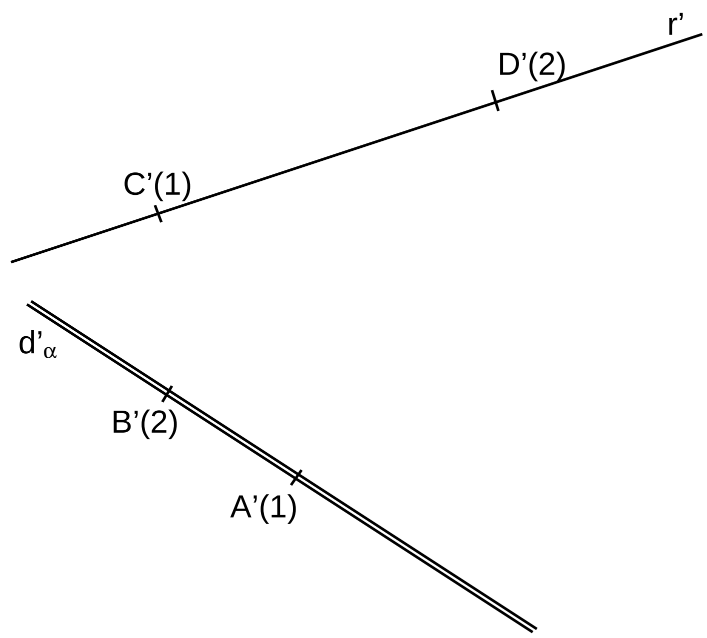
Os problemas fundamentais de posição são:

- O ponto definido por uma reta e um plano;
- A reta definida por dois pontos;
- O plano definido por um ponto e uma reta;
- A reta definida por dois planos.

7.1 O ponto definido por uma reta e um plano

Um ponto pode ser definido pela interseção de uma reta e um plano não paralelos. Para determinar o traço de uma reta r sobre um plano α, considera-se um plano auxiliar β pertencente à reta r, determina-se então a reta $\alpha\beta$, interseção do plano α com o plano β. O traço da reta r sobre a reta $\alpha\beta$ é o ponto $(r\alpha\beta)$, comum à reta r e ao plano α. Em geral o plano auxiliar β é o plano projetante da reta r.





Exercícios:

1) Dado o plano α pelos pontos A(0,60,20), B(30,0,30) e C(70,50,70), determinar o traço da reta r (D, E), onde D(0,40,90) e E(70,30,10) sobre o mesmo.

2) Dado o plano α, por sua reta de declive d(A,B), determinar o traço da reta r(C, D) sobre o mesmo. Onde A(10,10,10), B(40,30,50), C(70,10,20) e D(50,20,40).

7.2 A reta definida por dois planos

Uma reta pode ser definida por dois planos.

Problema: Sejam os planos α e β distintos, determinar a reta $\alpha\beta$.

a) Se os planos α e β são verticais e não paralelos, então a reta $\alpha\beta$ é uma reta vertical e $(\alpha\beta)$' é a interseção de $\alpha\pi'$ com $\beta\pi'$.

b) Se o plano α é vertical e o plano β é qualquer, a reta $\alpha\beta$ é uma reta qualquer e $(\alpha\beta)' \equiv \alpha\pi'$.

c) Se os planos α e β são quaisquer, a reta $\alpha\beta$ é uma reta qualquer.

Exercícios:

1) Representar a projeção cotada da reta $\alpha\beta$, interseção dos planos α(A, B, C) e β (D, E, F).
Onde: A(0, 40 ,70), B(80, 80, 30), C(50, 0, 10), D(20, 90, 20), E(-10, 10 ,40) e F(70, 20, 30)

2) Representar a projeção cotada da reta $\alpha\beta$, interseção dos planos α (d_α) e β (d_β). Onde: A(20, 20, 40), B(40, 50, 70), C(70, 10, 10), D(50, 40, 50)

PARTE 3 - INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS TELHADOS

Em geral chama-se telhado qualquer tipo de cobertura em uma edificação. Porém, o telhado, rigorosamente, é apenas uma categoria de cobertura, em geral caracterizado por possuir um ou mais planos inclinados em relação à linha horizontal (diferente, por exemplo, das lajes planas ou das cúpulas). A cada um destes planos inclinados, dá-se o nome de água.

As coberturas se apoiam em uma estrutura chamada armação, que pode ser de madeira, ferro ou concreto.

A maioria das coberturas é formada de material comercial chamado telha, existindo, também, as chapas onduladas.

Não só para guiar o escoamento das águas das chuvas, mas também para aumentar a resistência, as telhas e chapas onduladas, geralmente, não são planas. Ainda assim, praticamente, esse material é considerado como se fosse plano, e as coberturas feitas com dito material são chamadas coberturas planas.

Como a maioria das coberturas é feita de telhas, na prática costuma-se chamar uma cobertura de telhado, mesmo que o material seja outro.

Parte 3 - Aplicações

1. TERMINOLOGIA

Embora não seja objetivo detalhar a terminologia de todos os elementos de uma cobertura, citam-se algumas explicações indispensáveis à compreensão do estudo a ser feito.

A terminologia usada em coberturas planas nem sempre pode ser aplicada com exatidão em algumas coberturas especiais, sendo sua aplicação feita por extensão ou analogia.

a) Respaldo – a parte elevada de uma parede onde deve assentar a cobertura é arrematada para definir sua altura. Essa parte final é chamada respaldo. Estes podem estar todos no mesmo nível ou não, como podem ser horizontais ou inclinados.

b) Planta – é a projeção ortogonal de uma cobertura em um plano horizontal. Na planta se desenha a poligonal da cobertura, o sentido do escoamento das águas das chuvas, e outros elementos que definam a cobertura. A planta serve também como base para o cálculo do material a ser empregado.

c) Água – cada parte de uma cobertura que conduz uma determinada porção das águas da chuva, chama-se água.

d) Cumeeira – Quando as águas de uma cobertura são separadas por uma linha horizontal comum, essa linha se chama cumeeira.

e) Espigão – Quando as águas de uma cobertura são separadas por uma linha inclinada comum, essa linha se chama espigão.

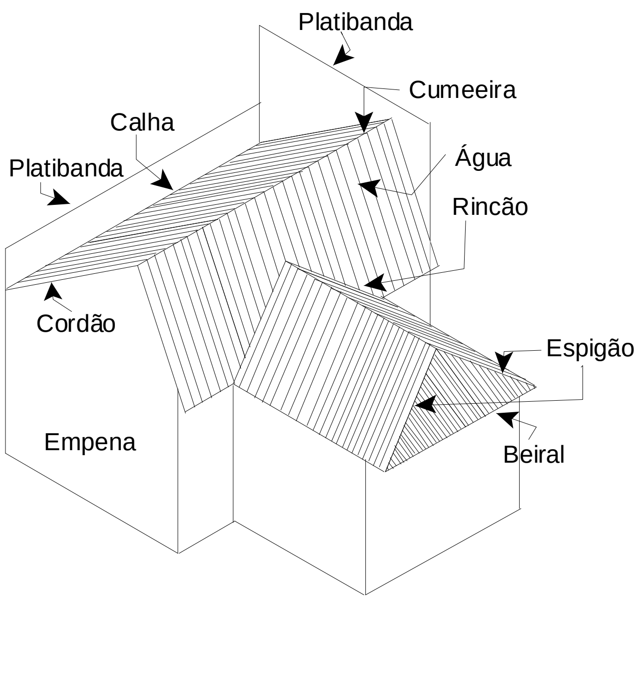
f) Rincão - Quando as águas de uma cobertura se reúnem em uma linha inclinada comum que lhes dão escoamento em conjunto, essa linha chama-se rincão.

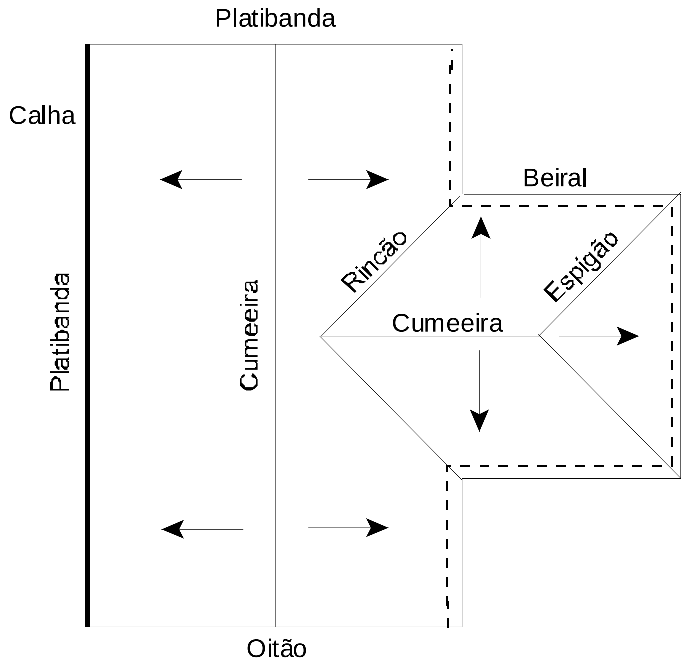
g) Calha – Quando as águas que se escoam numa cobertura caem diretamente numa peça que as conduz, essa peça se chama calha.

h) Beiral – As coberturas nunca devem ser executadas de modo que as águas das chuvas caiam em cima de paredes, pelos inconvenientes que causam. Assim, as águas ou são recolhidas em calhas ou são deixadas cair diretamente no solo. Este último caso é obtido fazendo-se com que a cobertura seja saliente. A distância entre a extremidade da parede e a cobertura chama-se beiral. Em planta, indica-se a construção em linha pontilhada para mostrar a existência de beiral. Há casos em que mesmo havendo beiral, coloca-se uma calha na extremidade da cobertura.

i) Platibanda – Quando as águas de uma cobertura são limitadas por parede de maior altura do que essas águas, a diferença entre a altura do respaldo e a da parede chama-se platibanda. Se as águas das chuvas ao descerem pela cobertura incidirem na platibanda, coloca-se uma calha entre a cobertura e a platibanda.

j) Inclinação – Chama-se inclinação das águas de uma cobertura o menor ângulo que cada uma dessas águas faz com o plano horizontal. A inclinação de cada água de uma cobertura é, portanto, a inclinação da sua linha de maior declive. Assim, a inclinação sempre é perpendicular às cumeeiras e oblíqua aos rincões e espigões. As águas de uma cobertura podem ter todas a mesma inclinação ou terem inclinações diferentes.





2. REPRESENTAÇÃO DE TELHADOS

A representação de uma cobertura é feita por meio de sua planta que é determinada por uma poligonal. Os respaldos das paredes podem estar na mesma altura ou em alturas diferentes. Portanto, pode-se considerar os seguintes casos:
Respaldos no mesmo nível
Respaldos em níveis diferentes (são somente usadas em casos especiais, quando há indicação, podem se tornar antiestéticas e onerosas)

Além disso, nem sempre as águas de uma cobertura têm a mesma inclinação, logo, cada um dos casos anteriores pode ser subdividido em:

- Águas com mesma inclinação.
- Águas com inclinações diferentes.

Qualquer que seja o caso, o problema se resume na procura da interseção de superfícies; essa interseção pode ser uma cumeeira, um espigão ou um rincão. As superfícies são as águas da cobertura, e tratando-se de coberturas planas, a linha comum sempre será uma reta.

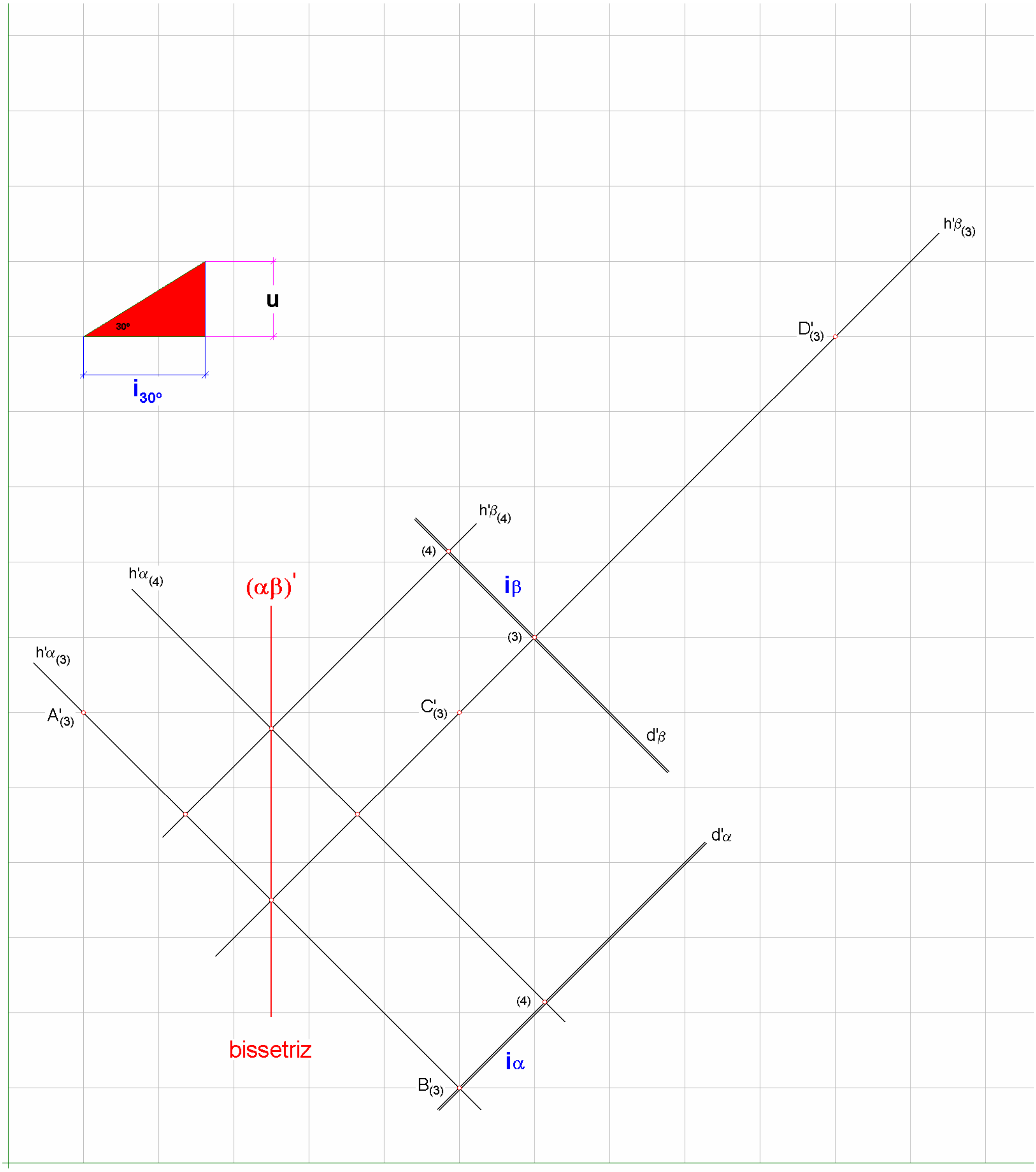
O processo geral para a determinação das interseções consiste em achar os pontos comuns das horizontais de mesma cota, que são, evidentemente, pontos da interseção procurada.

No caso de águas de mesma inclinação em respaldos de mesmo nível tem-se o seguinte processo: como as horizontais de mesma cota distam igualmente dos lados da poligonal, as interseções procuradas são as bissetrizes desses lados. Assim, este processo consiste na determinação de bissetrizes, e é chamado processo das bissetrizes.

3.1 Representação de Telhados - Águas com mesma inclinação

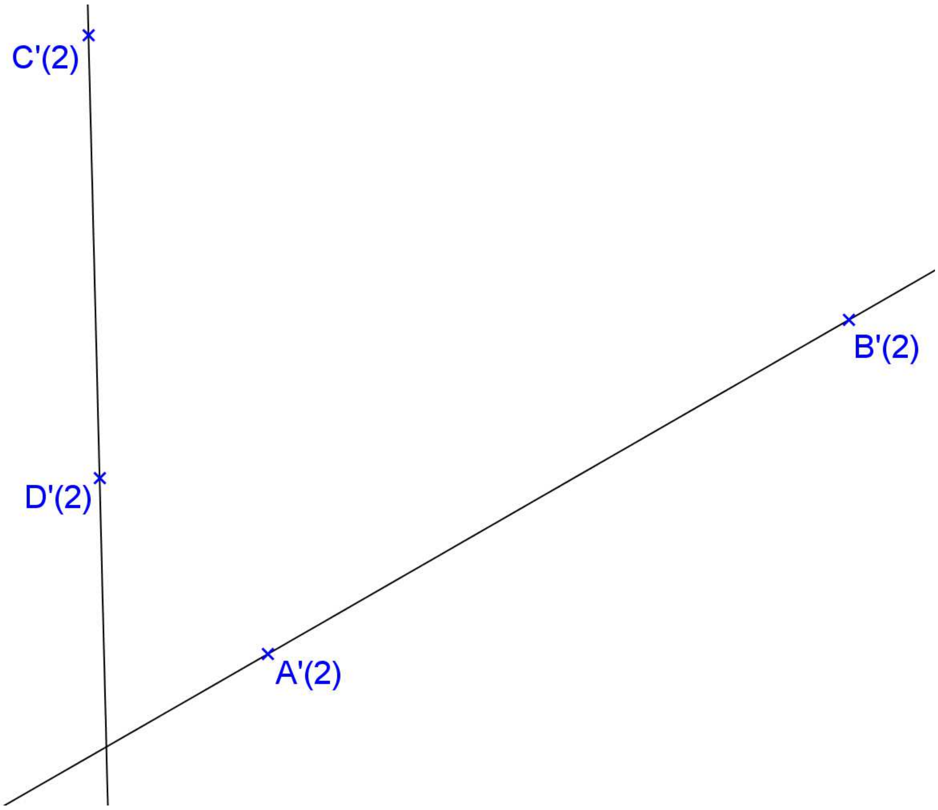
1.Dadas as projeções cotadas das retas r(A, B) e s(C, D), encontre a interseção (αβ) dos dois planos, sabendo-se que:

- As retas r e s pertencem respectivamente aos planos α e β;
- O plano α e o plano β fazem ângulo de 30° com o plano horizontal de projeção;
- Dados: A, B, C e D;
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100.



2. Dadas as projeções cotadas das retas r(A, B) e s(C, D), encontre a interseção ($\alpha\beta$) dos dois planos, sabendo-se que:

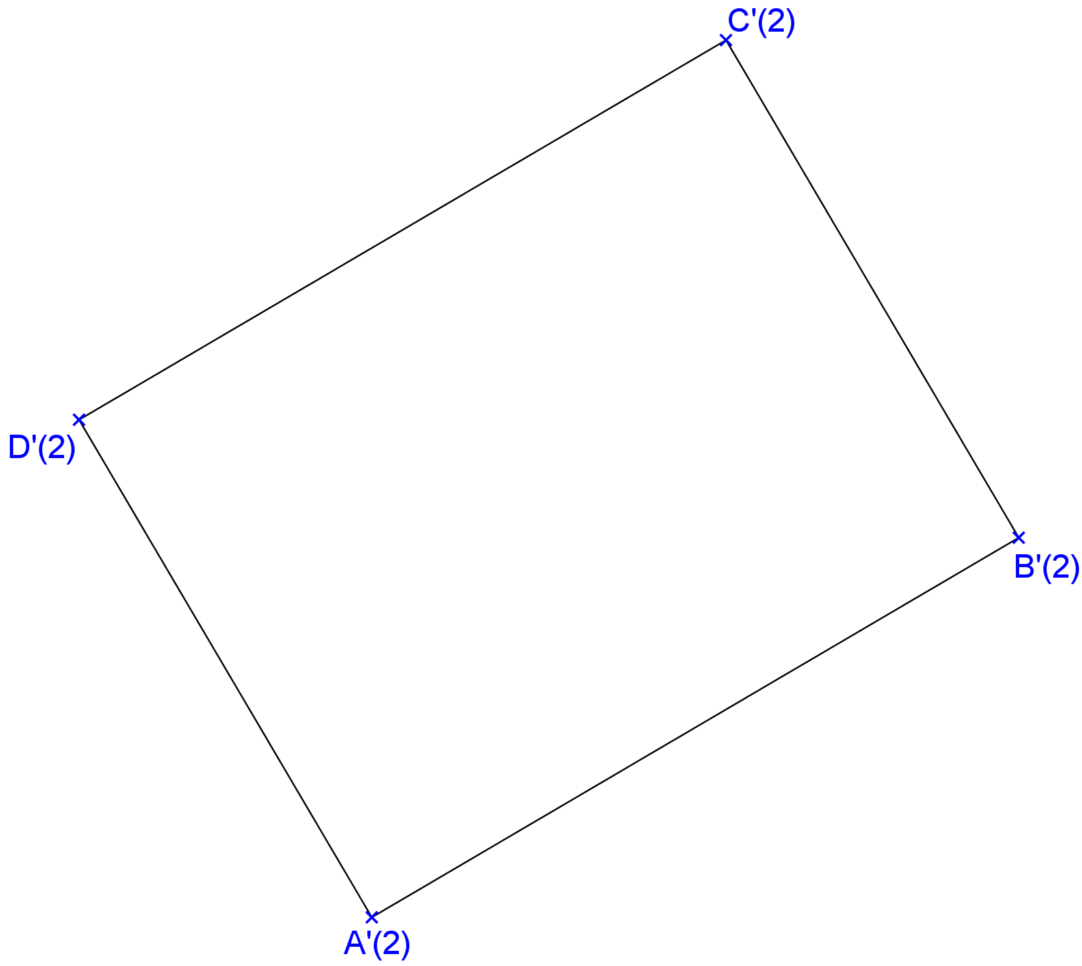
- As retas r e s pertencem respectivamente aos planos α e β;
- O plano α e o plano β fazem ângulo de 30° com o plano horizontal de projeção;
- Dados: A, B, C, D;
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100.



3. São dadas as projeções cotadas das retas a(A,B), b(B,C), c(C,D) e d(D,A). Considerando a poligonal ABCD como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível, pede-se achar as interseções das águas do mesmo, sabendo-se que:

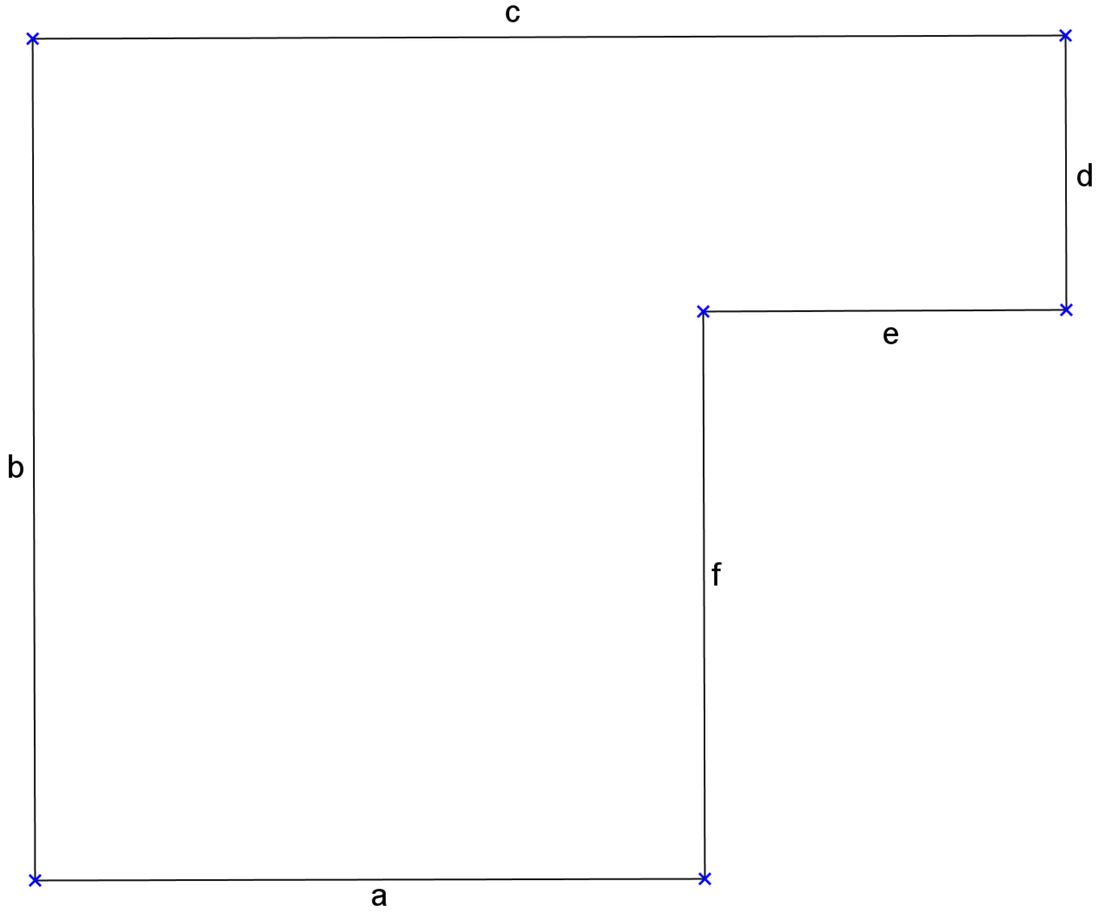
- As águas que contém as linhas de beiral a, b, c e d possuem a mesma inclinação de 30° com o plano horizontal de projeção;
- Dados: A, B, C e D;
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100.

Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira principal (a de maior cota) e indicar a declividade do espigão bc.



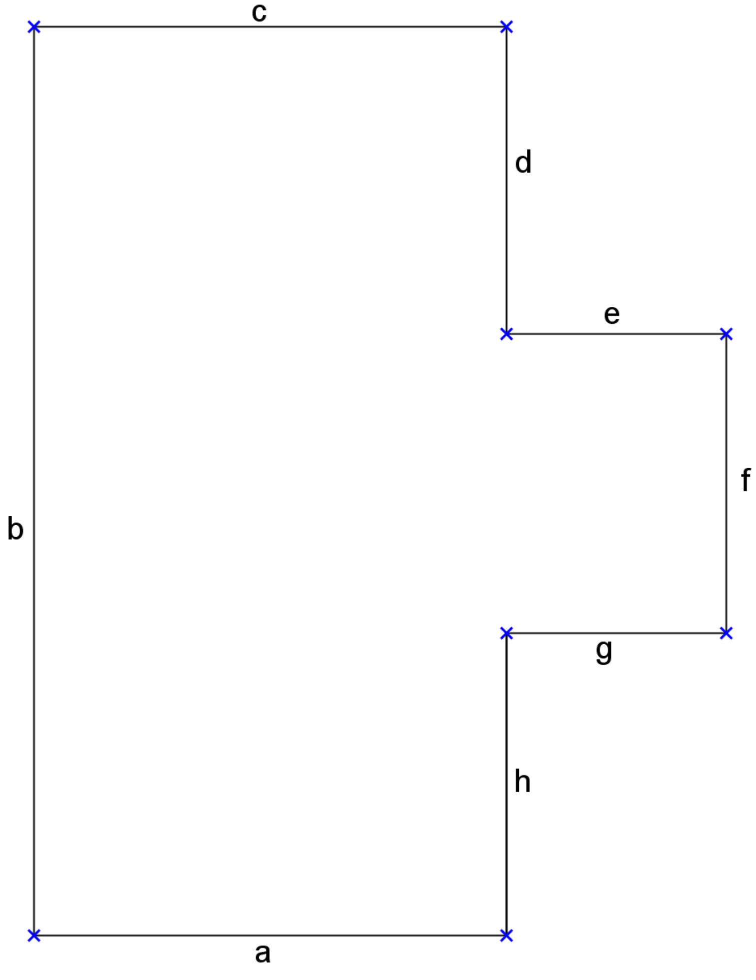
4. Considerando-se a poligonal abaixo como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível (com cota = 2,20m), encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que as águas têm todas a mesma declividade.

- Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira principal e indicar a declividade do rincão ef.
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100, inclinação de 45°



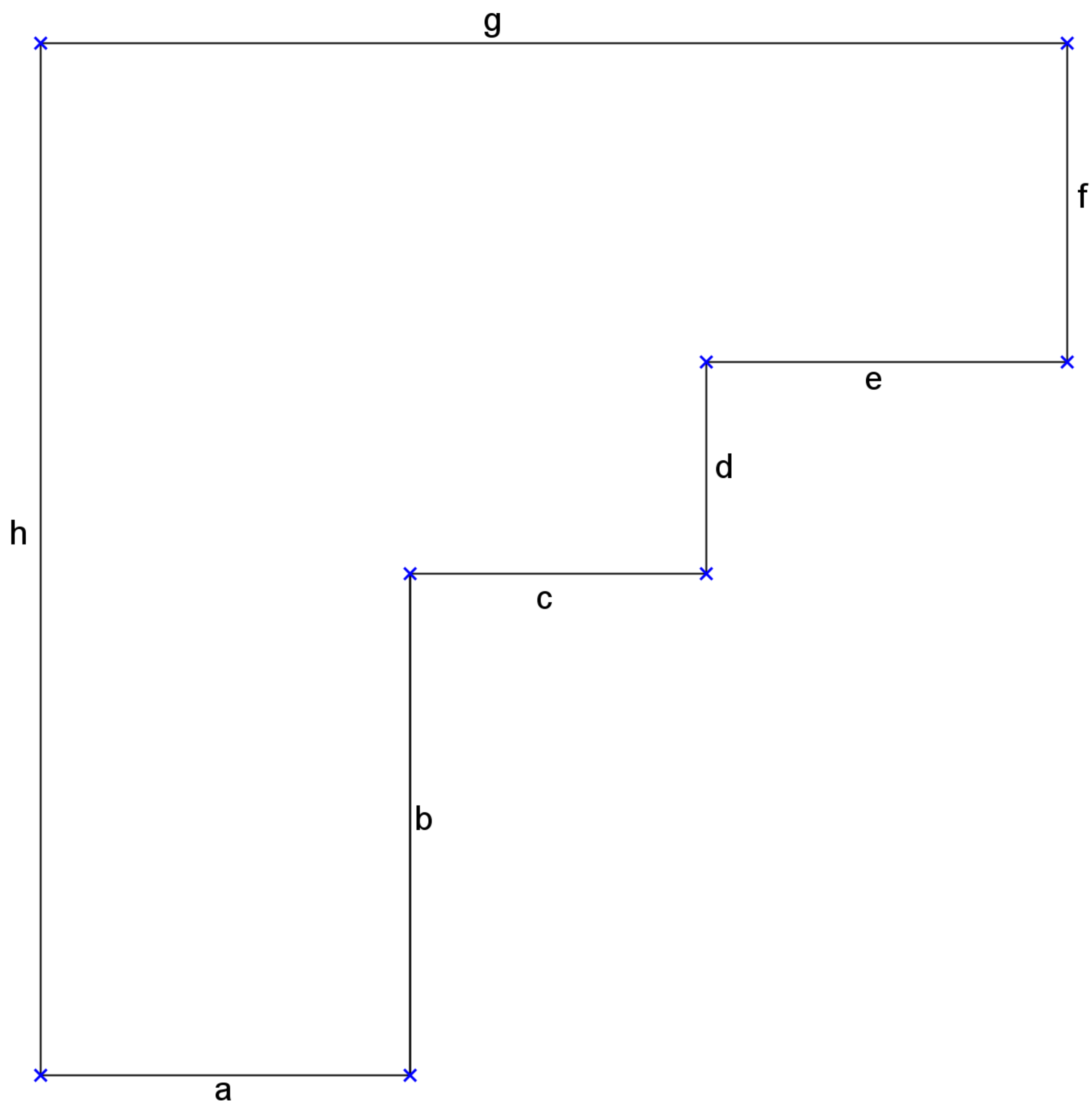
5. Considerando-se a poligonal abaixo como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível (com cota = 2,20m), encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que as águas têm todas a mesma declividade.

- Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira principal e indicar a declividade do espigão bc.
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100, inclinação de 30°



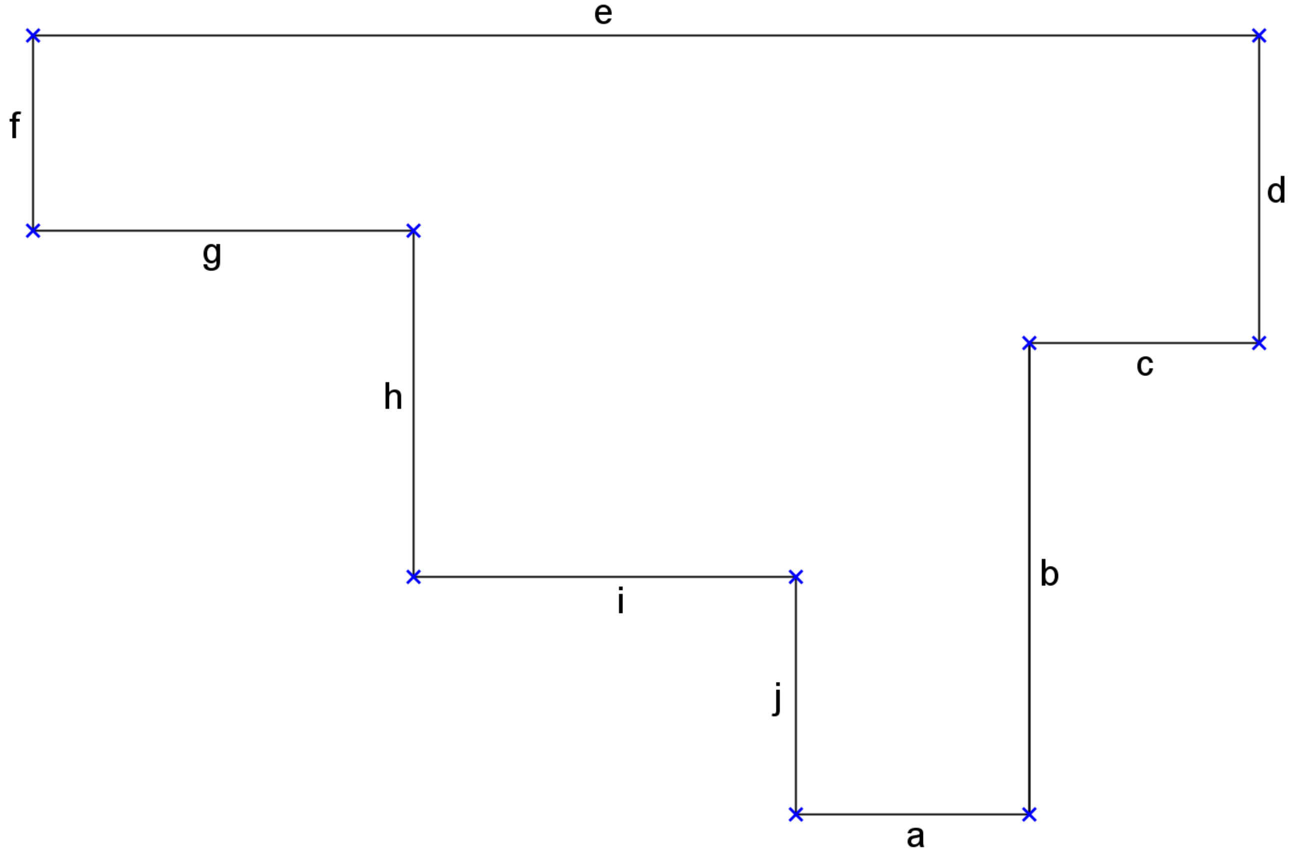
6. Considerando-se a poligonal abaixo como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível (com cota = 2,20m), encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que as águas têm todas a mesma inclinação de 30°.

- Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira principal e indicar a declividade do rincão bc.



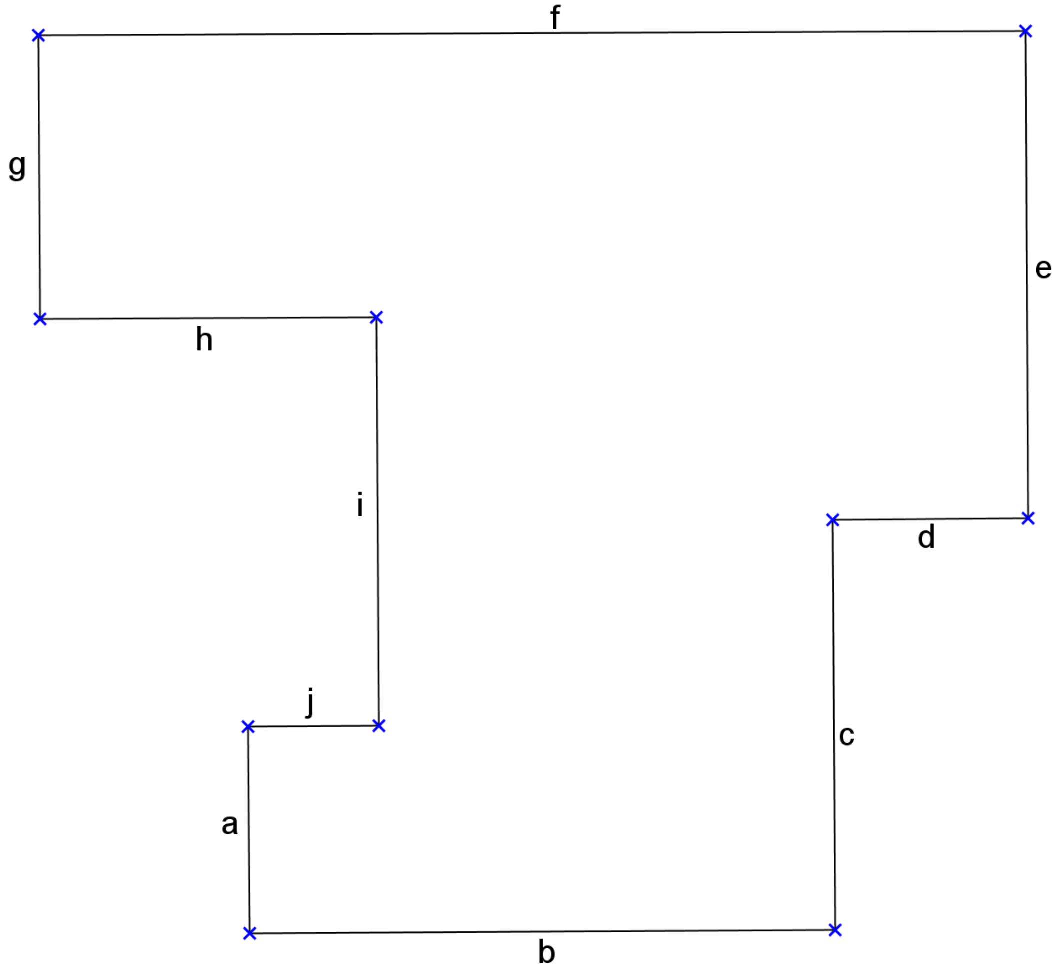
7. Considerando-se a poligonal abaixo como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível (com cota = 2,20m), encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que as águas têm todas a mesma inclinação de 30°.

- Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira principal e indicar a declividade do espigão hi.



8. Considerando-se a poligonal abaixo como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível (com cota = 2,20m), encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que as águas têm todas a mesma declividade de 45º.

- Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira principal e indicar a declividade do espigão bc.

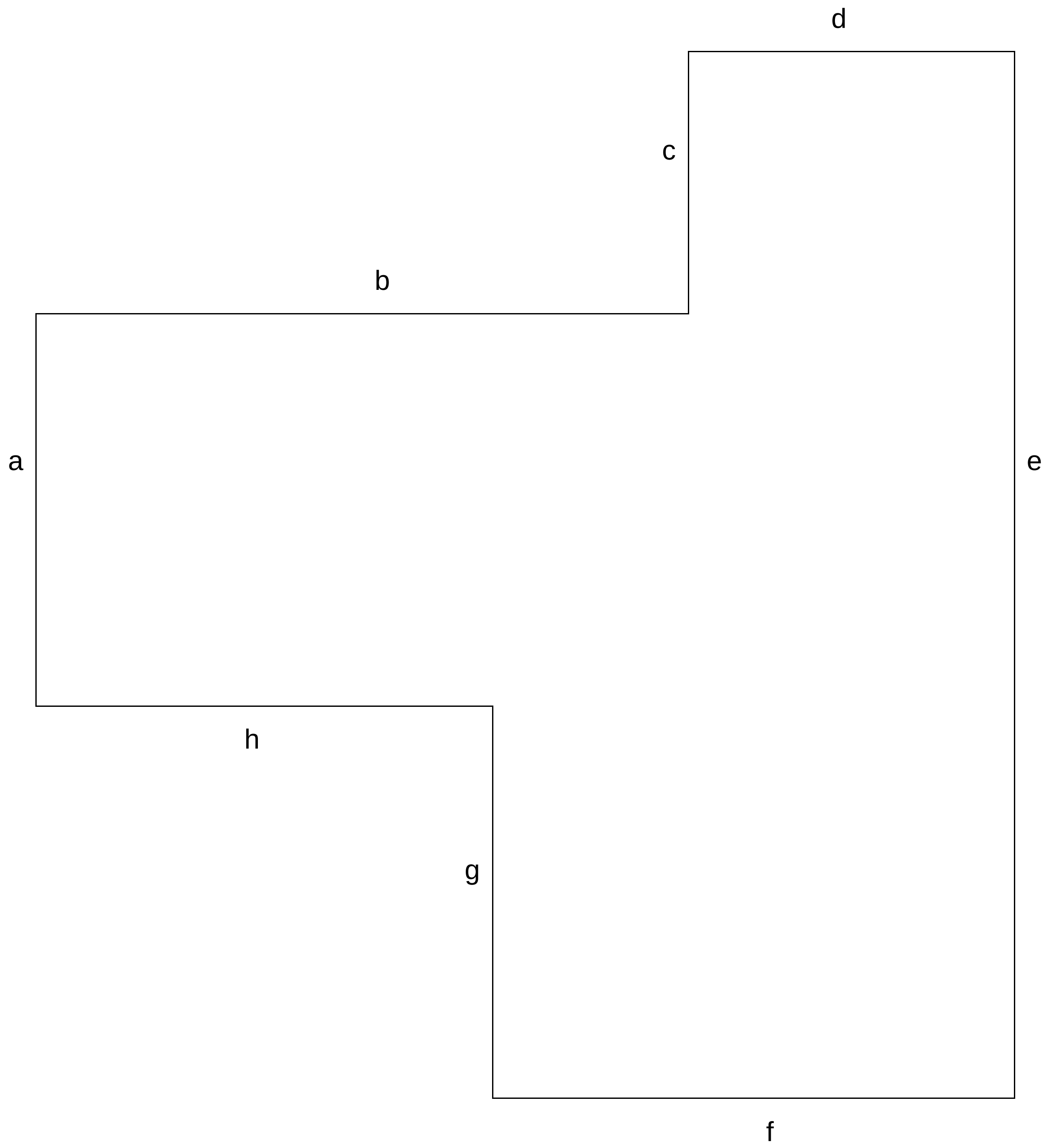


9. Considerando-se a poligonal como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível, pede-se:

- as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo;
- indicar o sentido de escoamento das águas;
- achar a cota da cumeeira principal;
- a declividade do espigão (ah) e seu comprimento

Sabendo-se que:

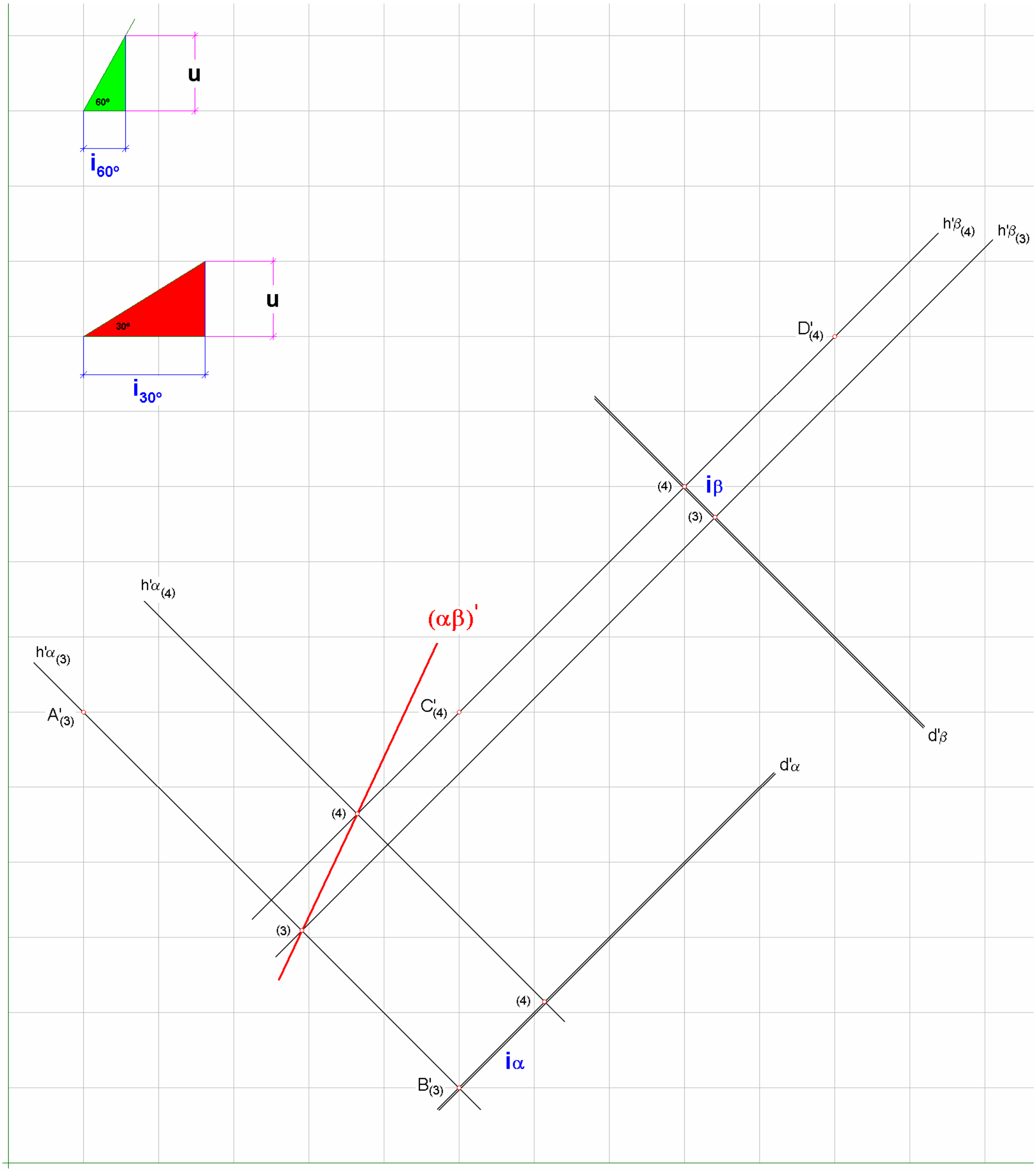
- todas as linhas de beiral tem cota 2,80m;
- todas as águas tem declividade de 30%;
- a linha de beiral e possui platibanda e as demais possuem calhas;
- u = 1m (unidade de cota)
- escala 1:100



3.2 Representação de telhados - Águas com inclinações diferentes

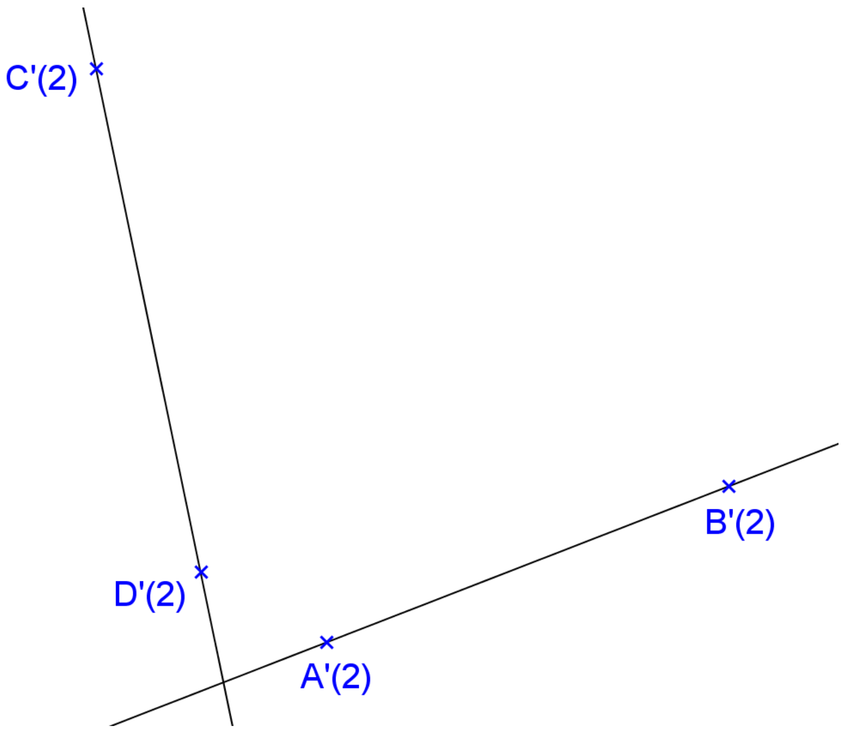
1. Dadas as projeções cotadas das retas r(A, B) e s(C, D), encontre a interseção ($\alpha\beta$) dos dois planos, sabendo-se que:

- As retas r e s pertencem respectivamente aos planos α e β;
- O plano α faz ângulo de 30° com o plano horizontal de projeção e o plano β faz ângulo de 60° com o plano horizontal de projeção;
- Dados: A, B, C e D;
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100



2. Dadas as projeções cotadas das retas r(A, B) e s(C, D), encontre a interseção ($\alpha\beta$) dos dois planos, sabendo-se que:

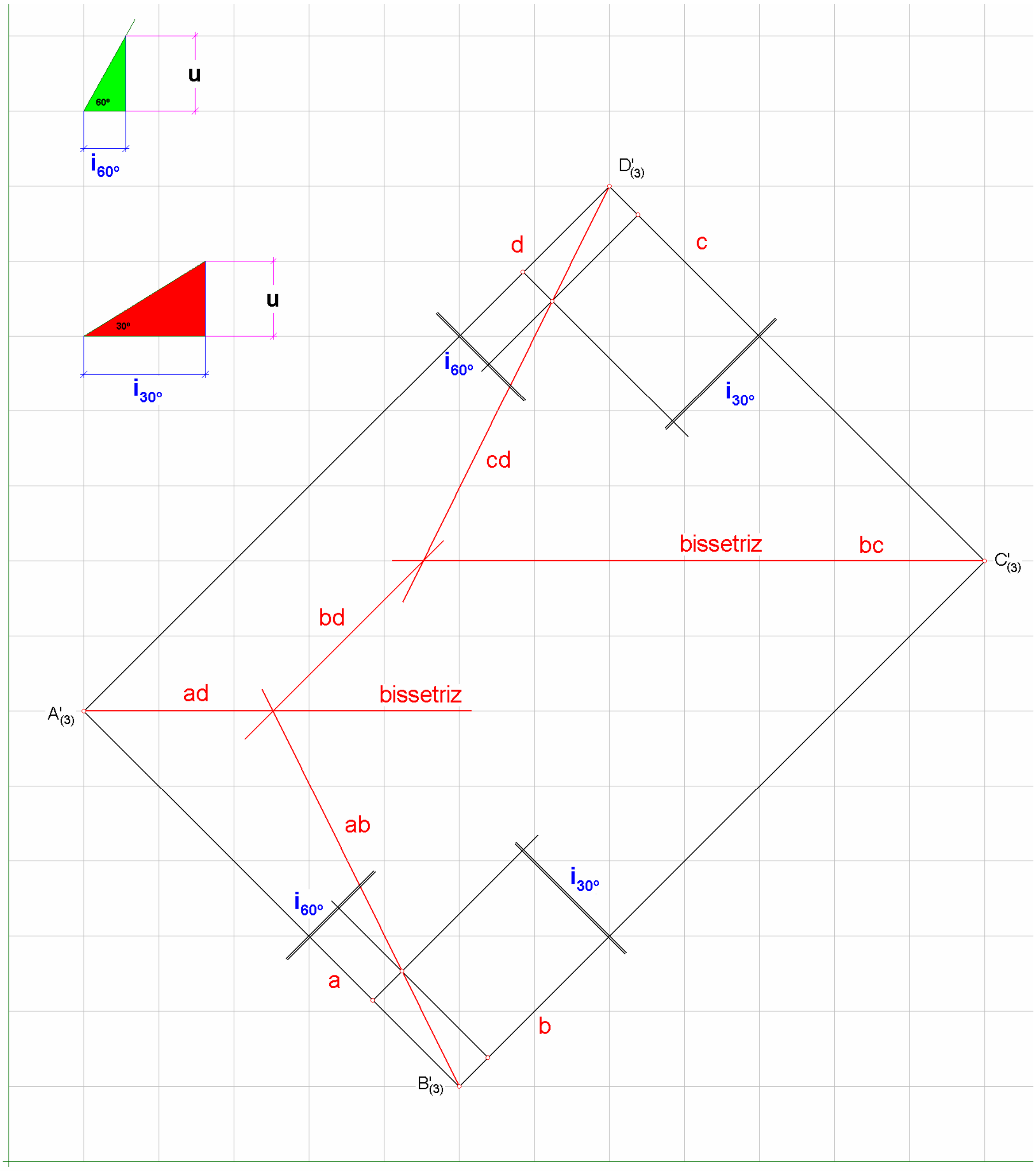
- As retas r e s pertencem respectivamente aos planos α e β;
- O plano α faz ângulo de 30° com o plano horizontal de projeção e o plano β faz ângulo de 45° com o plano horizontal de projeção;
- Dados: A, B, C e D;
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100.



3. Dadas as projeções cotadas das retas a(A, B), b(B, C), c(C, D) e d(D, A), considerando-se a poligonal como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível, encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que:

- As águas que contém as linhas de beiral a e d têm inclinação igual a 60°;
- As águas que contém as linhas de beiral b e c têm inclinação igual a 30°;
- Dados: A, B, C e D;
- u = unidade de cota = 1m / escala = 1:100.

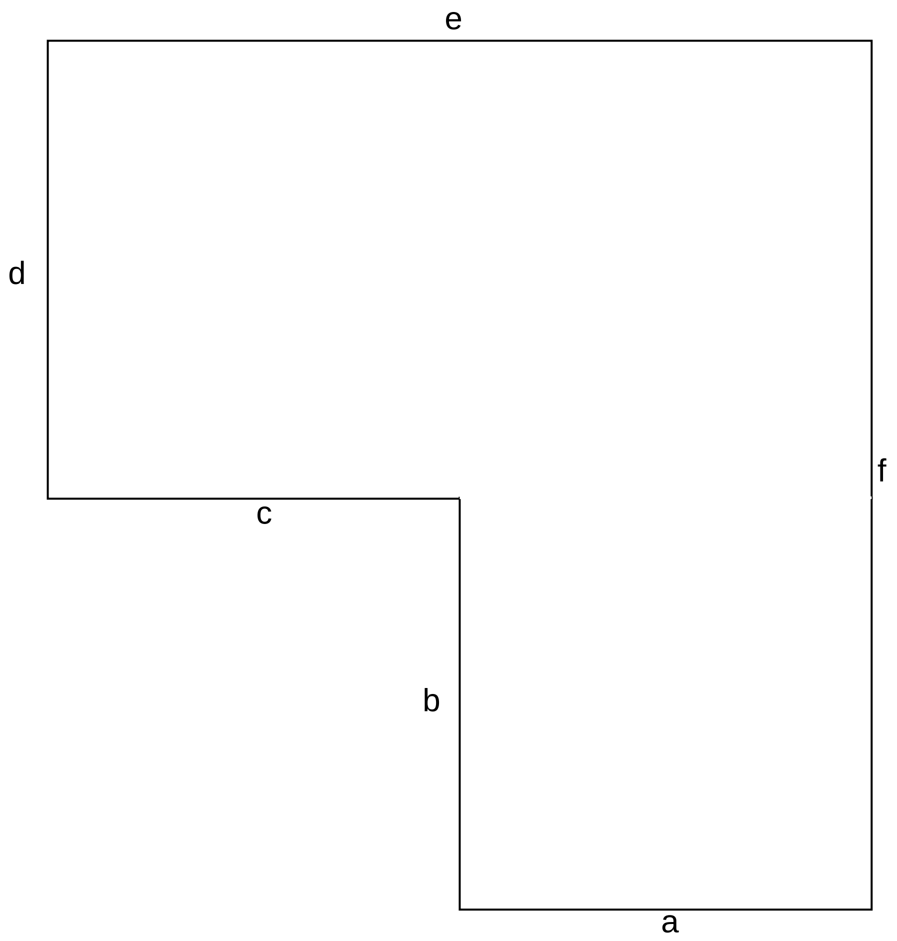
Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira e indicar a declividade do espigão bc.



4. Considerando-se a poligonal como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível, encontre as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que:

- As águas que contém as linhas de beiral “a” e “d” têm inclinação igual a 60°;
- As outras águas têm inclinação igual a 30°;

Indicar o sentido de escoamento das águas, achar a cota da cumeeira e indicar a declividade do espigão ef.

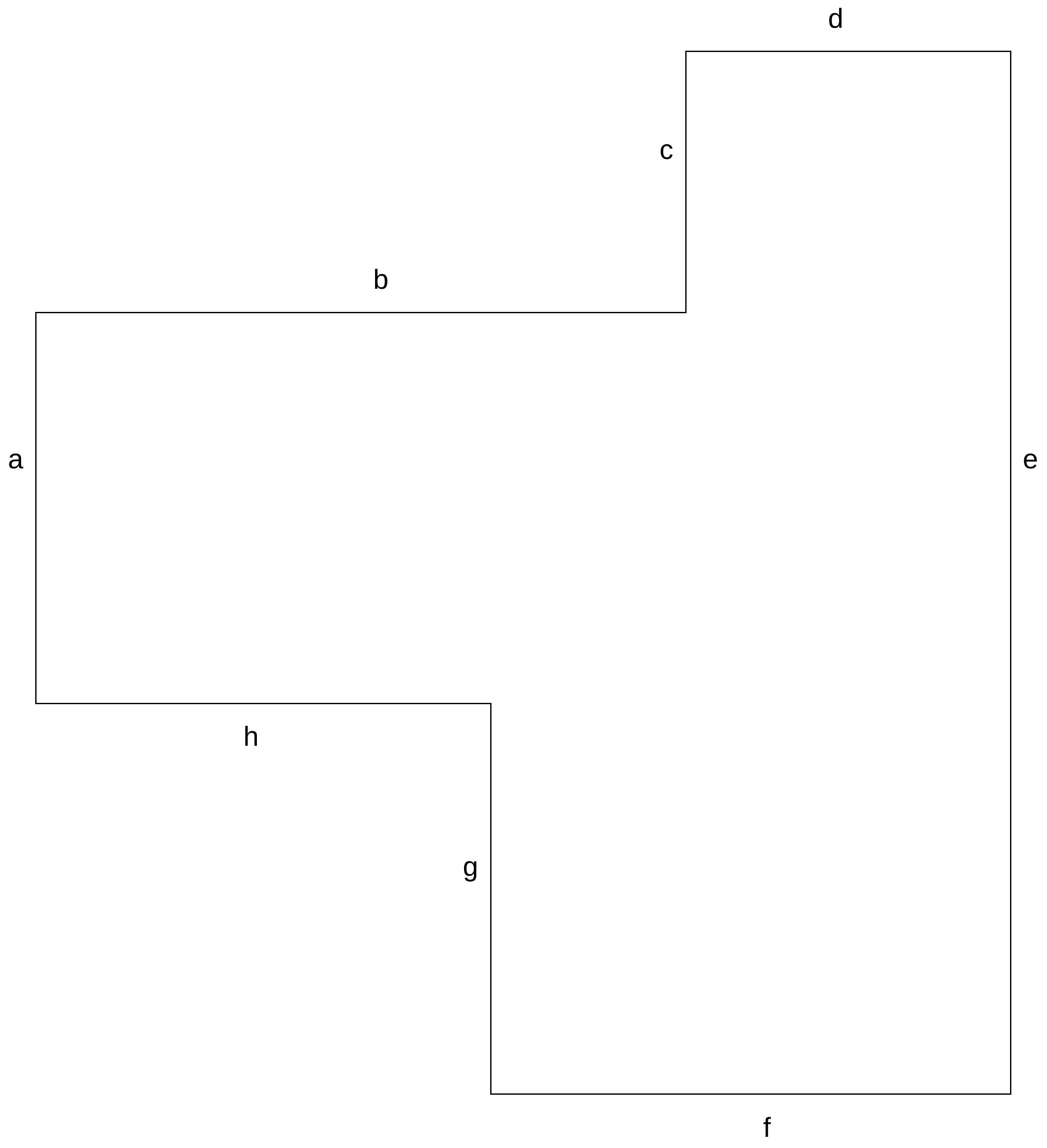


5. Considerando-se a poligonal como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível, pede-se:

- as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo;
- indicar o sentido de escoamento das águas;
- achar a cota da cumeeira principal;
- a declividade do espigão (ah) e seu comprimento

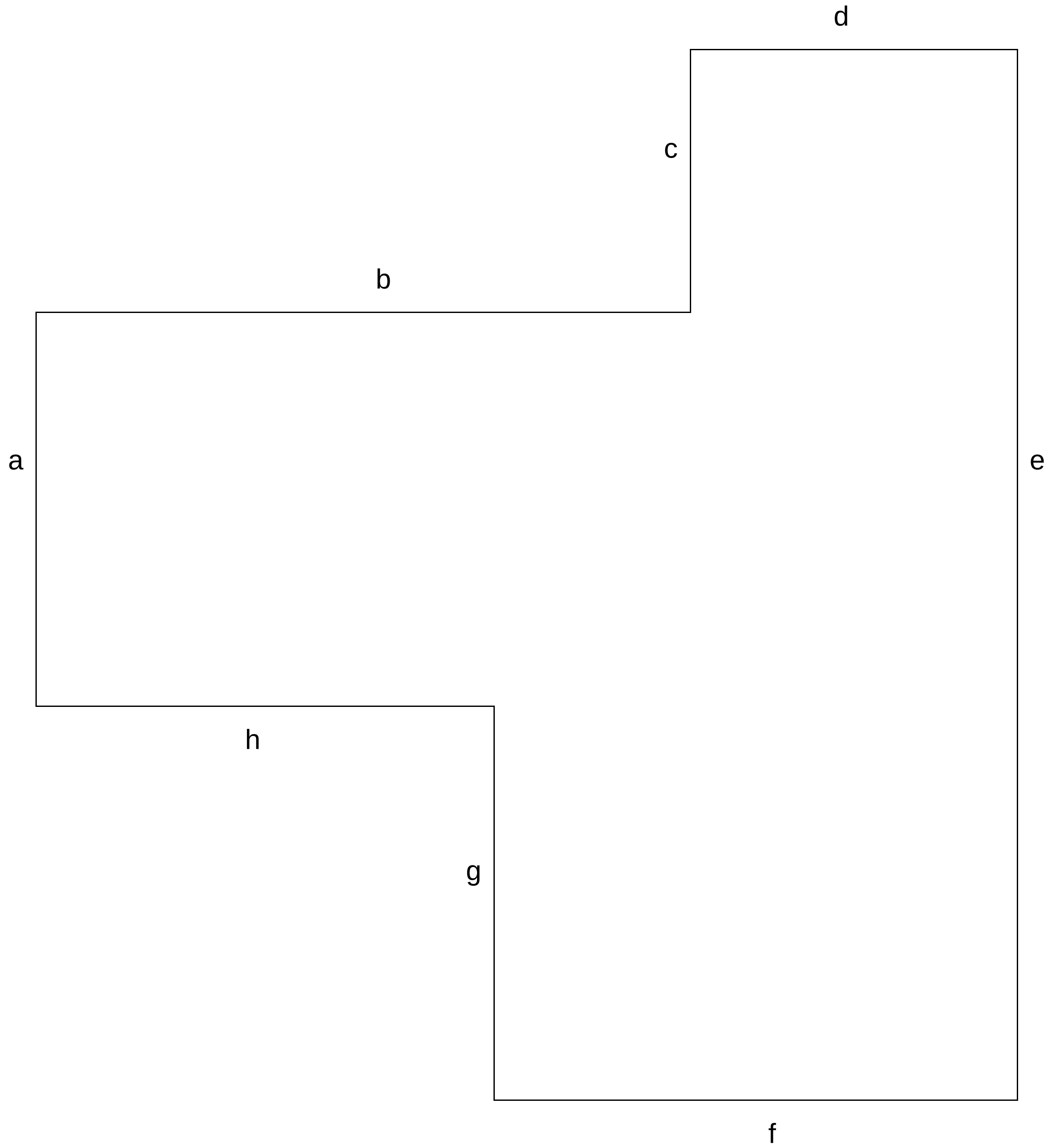
Sabendo-se que:

- todas as linhas de beiral tem cota 2,80m;
- a água que tem a linha de beiral “g” tem declividade de 60% e todas as outras têm declividade de 45%;
- a linha de beiral e possui platibanda e as demais possuem calhas;
- u = 1m (unidade de cota)
- escala 1:100



6. Considerando-se a poligonal como sendo a linha de beiral de um telhado pede-se:
- as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo;
- indicar o sentido de escoamento das águas;
- achar a cota da cumeeira principal;
- a declividade do espigão (ah) e seu comprimento

Sabendo-se que:
- as linhas de beiral a, b e h têm cota 2,20m e todas as demais têm cota 2,80m;
- a água que tem a linha de beiral g tem inclinação igual a 60° e todas as outras têm inclinação igual a 45°;
- a linha de beiral d é um oitão a linha e possui platibanda;
- u = 1m (unidade de cota)
- escala 1:100



4. SUPERFÍCIES TOPOGRÁFICAS

Uma superfície topográfica é uma superfície que não pode ser determinada por meio de uma equação, ou seja, sua forma não é geometricamente determinada. Assim, as soluções dos problemas que envolvam uma superfície topográfica não são exatas.

Numa planta topográfica, uma curva de nível caracteriza-se como uma linha imaginária que une todos os pontos de igual altitude de uma região representada. É chamada de "curva", pois normalmente a linha que resulta do estudo das altitudes de um terreno são, em geral, manifestadas por curvas associadas a valores de altitude em metros (m). A curva de nível serve para identificar e unir todos os pontos de igual altitude de uma determinada região. Um exemplo de representação das curvas de nível é apresentado na figura seguinte.

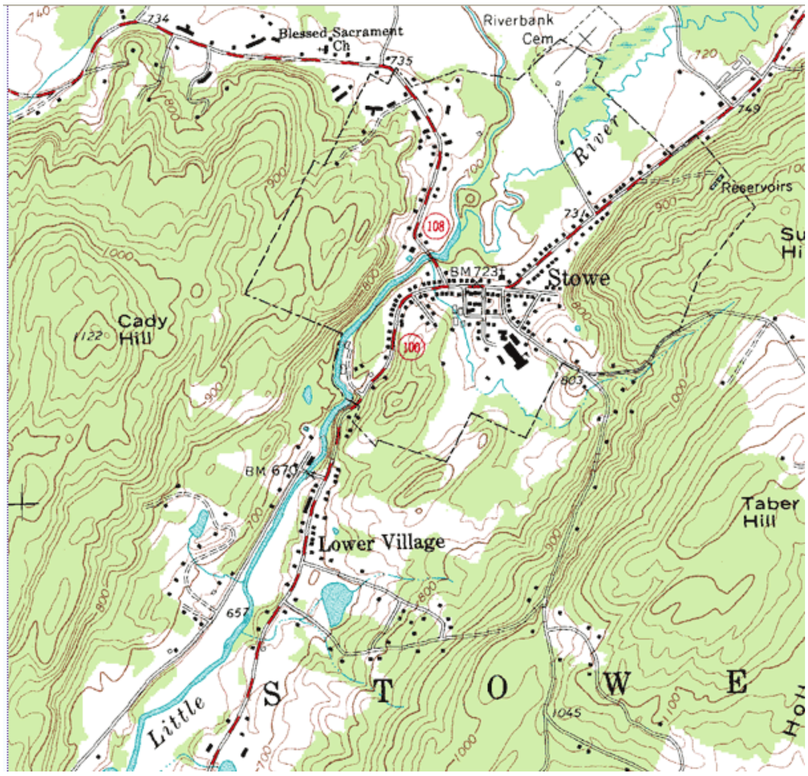


Figura 1 – Superfície Topográfica

As curvas de nível são resultantes da seção plana feita por vários planos paralelos, horizontais (ou de nível) com uma superfície da terra. Nelas são indicadas as distâncias verticais acima, ou abaixo, de um plano de referência de nível. Começando no nível médio dos mares, que é a curva de nível zero, cada curva de nível tem um determinado valor. A distância vertical entre as curvas de nível é conhecida como equidistância, cujo valor é encontrado nas informações marginais da carta topográfica.

4.1 Levantamento

O levantamento é uma operação pela qual são obtidos os elementos necessários aos cálculos e respectivas representações de obras ou porções de superfícies.

O levantamento pode ser:

4.1 Planimétrico – visa a representação sem a preocupação com o relevo, ou seja, a representação preocupa-se apenas com a representação dos pontos sem a representação das cotas.

4.2 Altimétrico – é o levantamento que visa a representação do relevo mostrando as altitudes, portanto representando as cotas dos pontos.

4.3 Planta Topográfica – a planta topográfica é a representação dos pontos de igual altitude sobre um plano horizontal, sua escala é superior a 1:100.000

4.4 Planta Geográfica ou carta – é a planta cuja escala é inferior a 1:100.000.

Em geral, nas plantas topográficas não é necessário especificar a unidade que representa as cotas, pois salvo indicação em legenda, a unidade utilizada é sempre o metro.

4.2 Princípio da Representação Topográfica

Uma das aplicações práticas do método das projeções cotadas consiste em representar sobre um plano uma porção da superfície da terra, levando em conta seu relevo. Esta representação é feita através de linhas horizontais que contém o conjunto de pontos de mesma cota.

Ao seccionar uma superfície da terra por planos de nível eqüidistantes entre si, esta interseção gera linhas horizontais de mesma cota, que são as curvas de nível. Na figura 2 os planos α e β são planos de nível equidistantes e os pontos representados sobre eles são as curvas de nível.

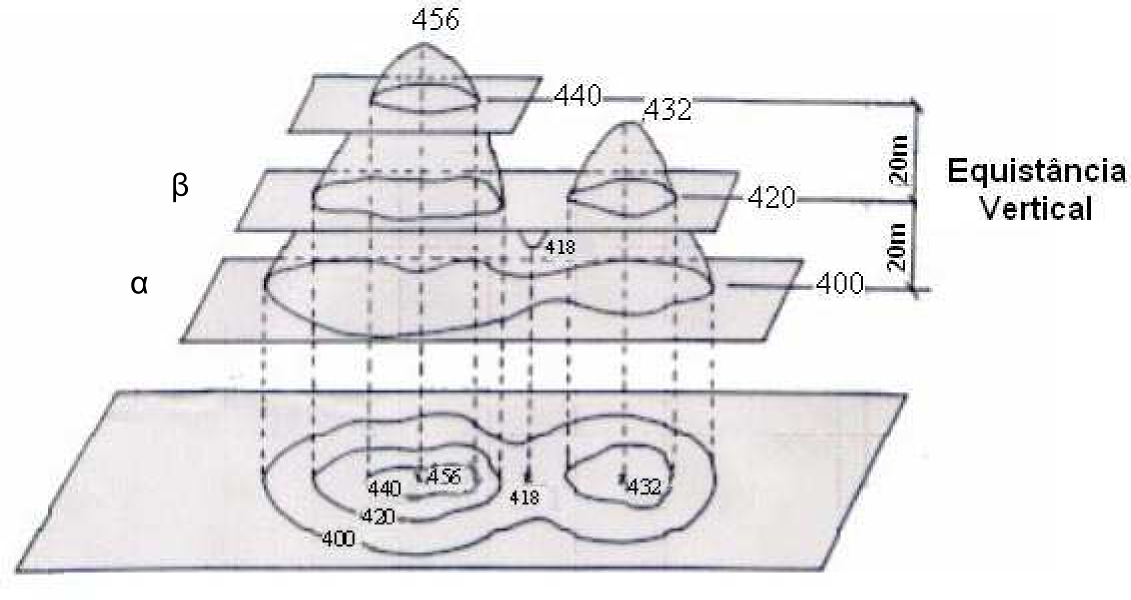


Figura 2 – Superfície Topográfica

4.3 Traçado das curvas de nível

O traçado das curvas de nível é feito considerando pontos de cotas inteiras e de acordo com a natureza do trabalho. Sobre cada segmento, determina-se o ponto de cota inteira, a união dos pontos de mesma cota geram a curva de nível.

A superfície topográfica assemelha-se a vários troncos de cone superpostos onde cada base inferior de um é a base superior do outro. Na figura 3 é apresentado um exemplo da representação das curvas de nível.

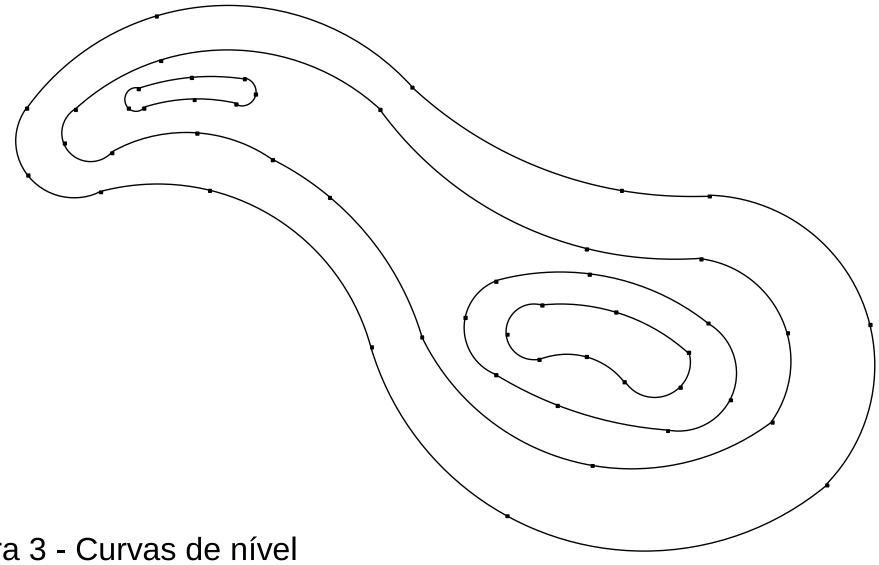


Figura 3 - Curvas de nível

Para encontrar os pontos de cotas inteiras, utiliza-se o método da triangularização, ou seja, na malha onde será representada a planta contendo as curvas de nível, os segmentos são divididos de forma a representar os pontos de cotas inteiras. Um exemplo é apresentado na figura 4.

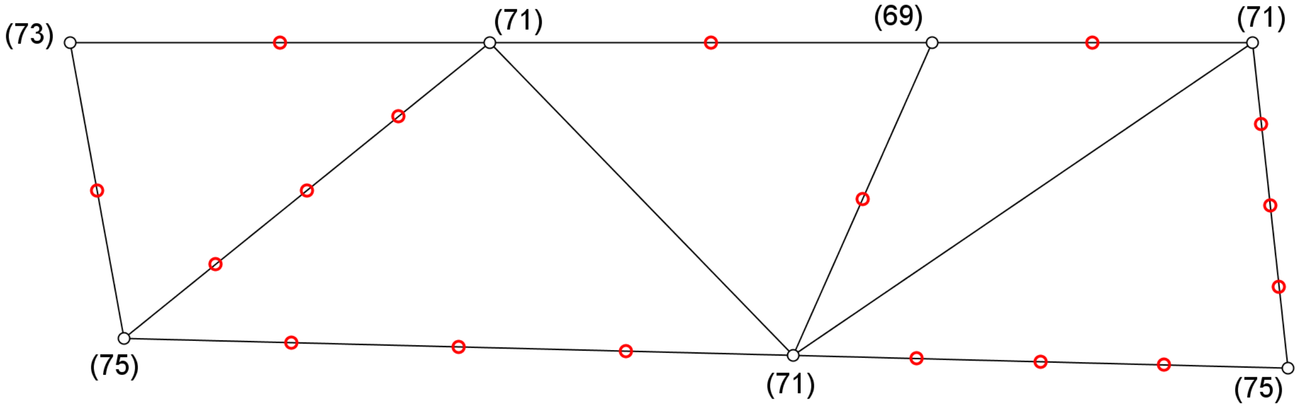
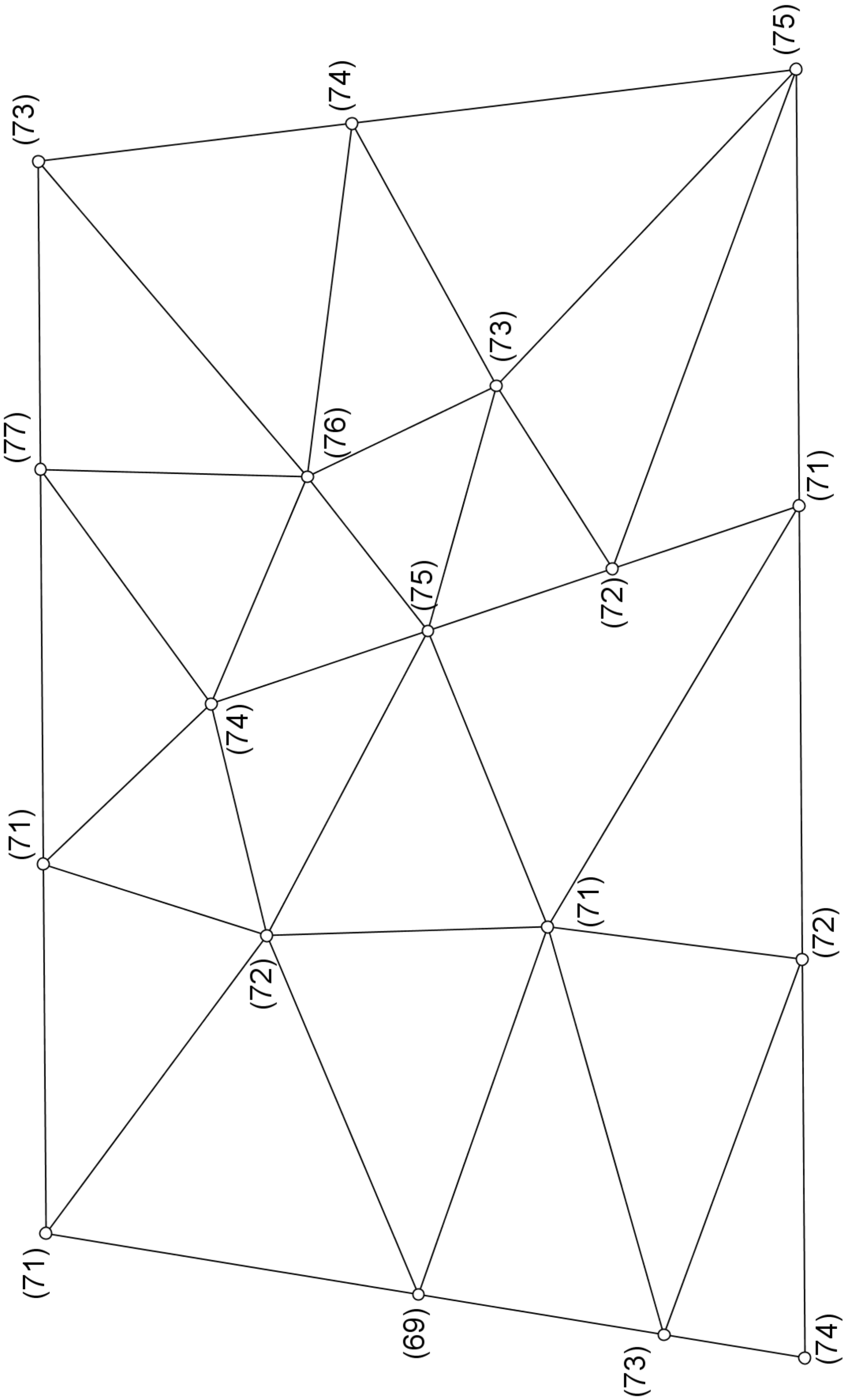


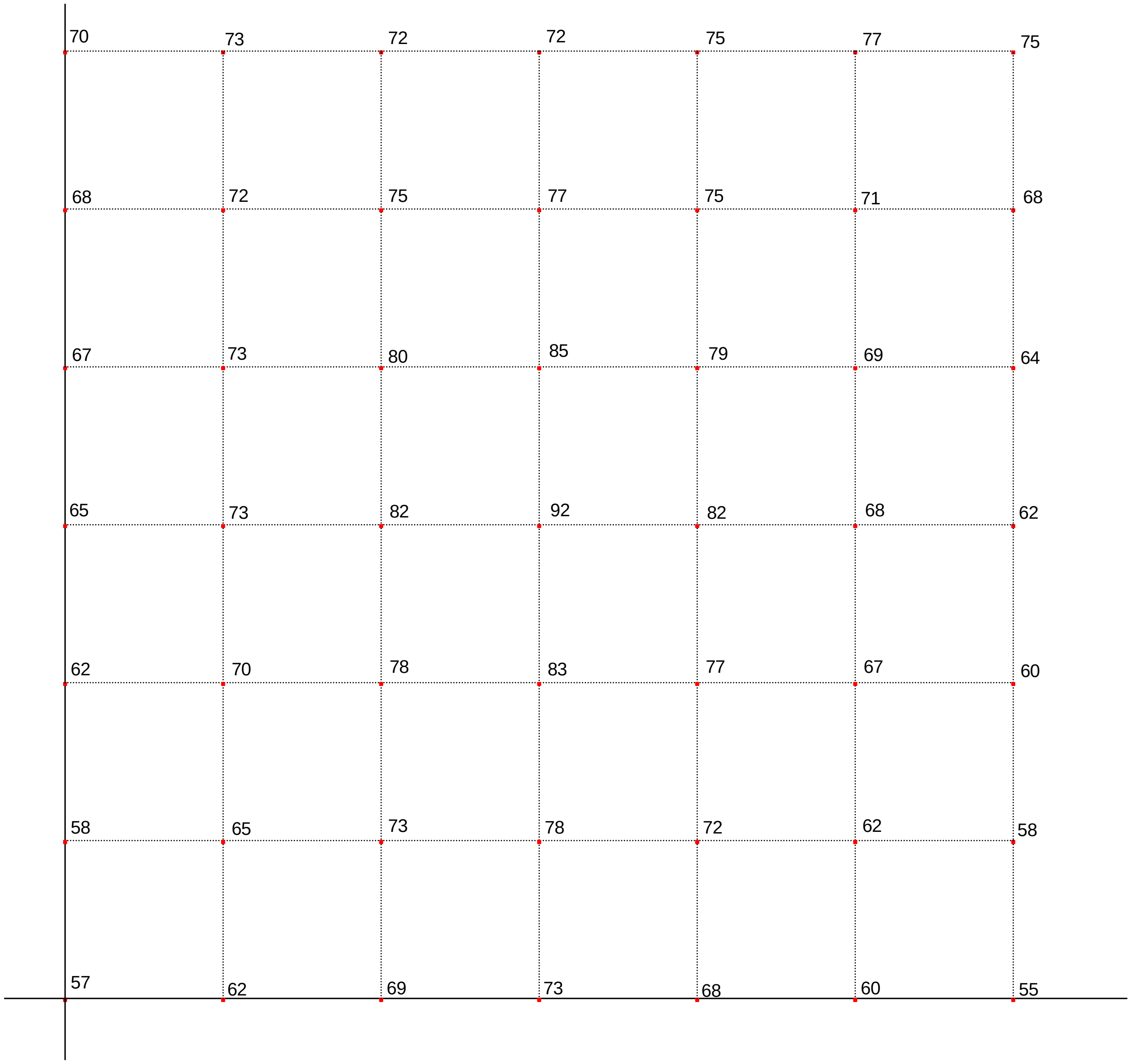
Figura 4 – Exemplo de triangularização da malha

Exercícios:

1. Os pontos correspondem a uma superfície topográfica, representá-la através de curvas de nível, com eqüidistância de t metros, considerando a unidade de cota como sendo o metro.



2. Os pontos correspondem a uma superfície topográfica, representá-la através de curvas de nível, com eqüidistância de t metros, considerando a unidade de cota como sendo o metro.



5. Perfil Topográfico

Considere uma superfície topográfica cortada por um plano vertical, representado pelo seu traço (AB) no plano π' (Figura 5). Este plano corta o plano de projeção segundo a reta A'B'.

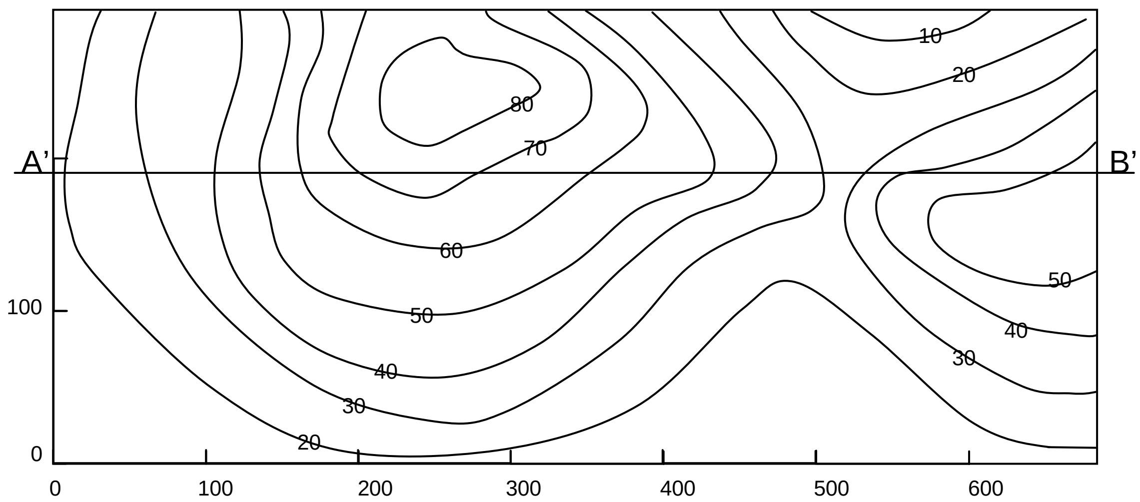


Figura 5 – Superfície topográfica cortada por um plano vertical

5.1 Representação do perfil topográfico no plano cartesiano

Considere uma superfície topográfica cortada por um plano vertical e os eixos cartesianos *x* e *y*. Sobre o eixo *x* marcam-se os pontos de interseção da reta A'B' com as curvas de nível e sobre o eixo *y* marcam-se as cotas das extremidades desses segmentos. Unindo-se os pontos tem-se o perfil da superfície.

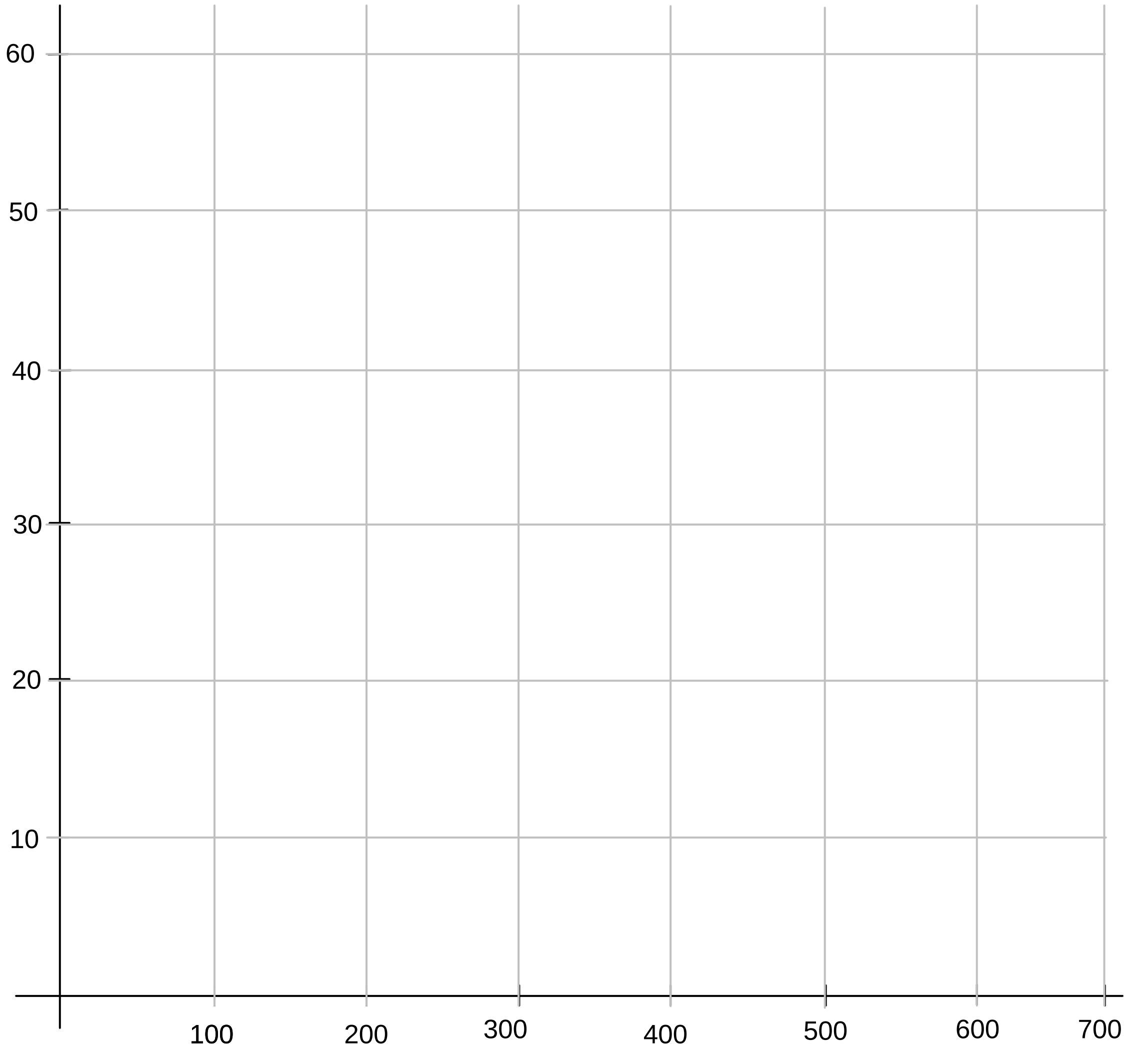
Em geral, utiliza-se no perfil uma escala tal que o valor da ordenada (*y*) seja dez vezes o valor da abscissa (*x*). Este procedimento é adotado para acentuar o relevo, já que as alturas são normalmente pequenas em relação à planta da região.

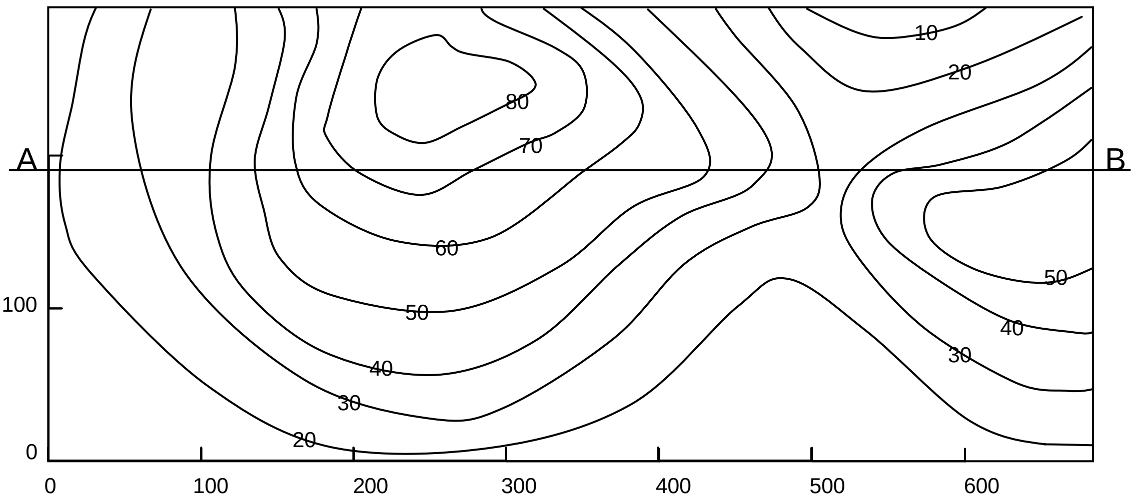
As escalas mais utilizadas são:

Vertical	**Horizontal**
1:100	1:1000
1:200	1:2000
1:500	1:5000

5.2 Exercício

Representar o perfil topográfico da seção determinada pelo plano definido pelos pontos A e B, utilizando a escala vertical dez vezes maior que a horizontal.





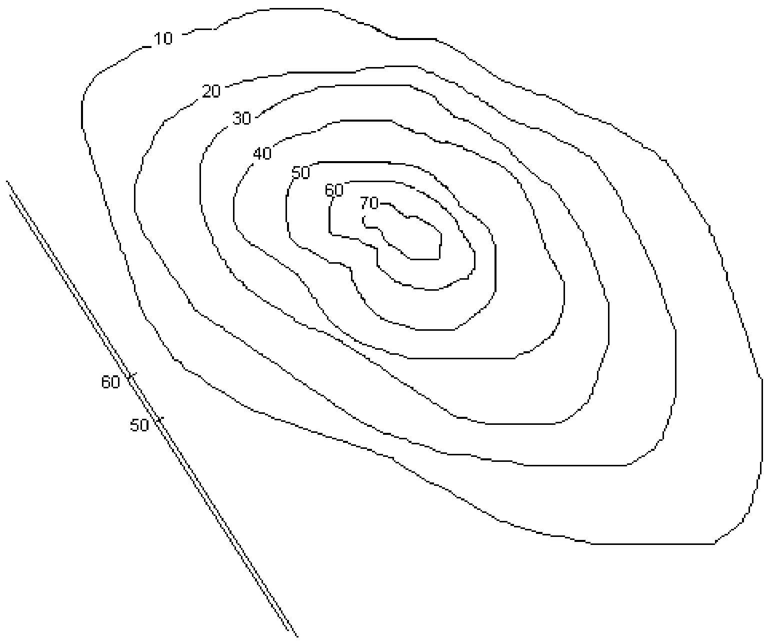
6. Seção Plana

A interseção de um plano qualquer com uma superfície topográfica é sempre feita com o auxílio de planos horizontais. Cada plano horizontal considerado corta o plano dado segundo uma reta horizontal e corta a superfície segundo uma curva de nível, os pontos comuns da horizontal com a curva de nível são pontos da interseção. A ligação dos pontos assim obtidos resulta na interseção procurada.

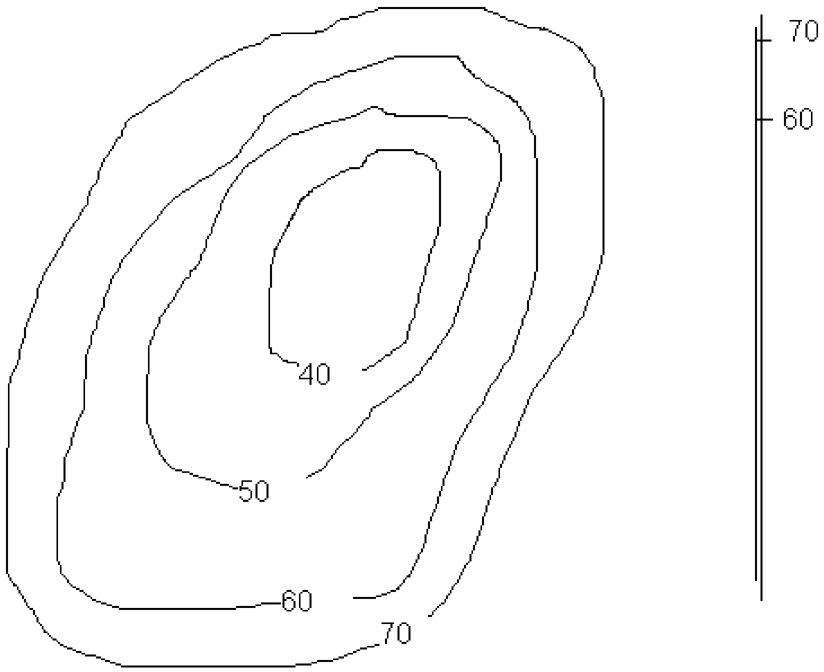
Para a resolução do problema considera-se para planos horizontais auxiliares os próprios planos das curvas de nível dadas. A horizontal do plano dado cuja cota seja a mesma que a da curva de nível considerada, tem com esta, pontos comuns que são pontos da interseção.

Exercício: Dados o plano α por sua reta de declive e a superfície topográfica, determinar a interseção do plano com a superfície (seção plana).

a)



b)



7. Cortes

Quando a construção que se quer executar tem cota menor que a da superfície natural do terreno, faz-se uma escavação que recebe o nome de corte.

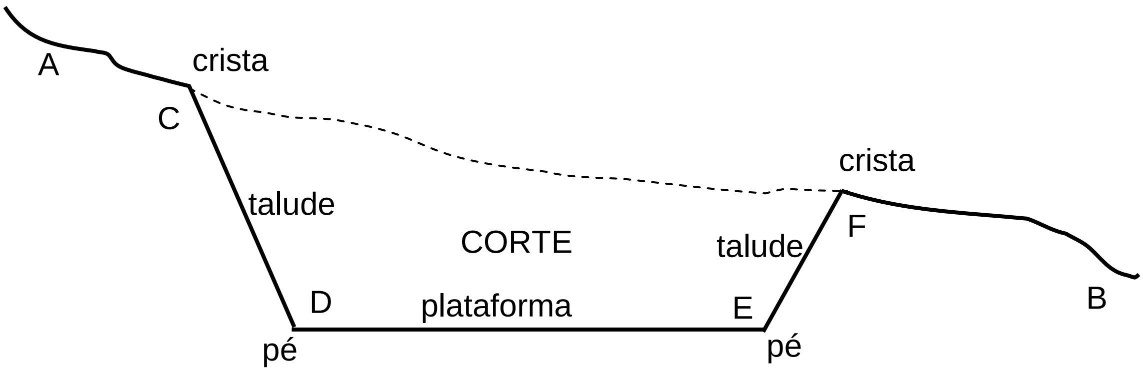


Figura 6 – Corte realizado no terreno representado pelo perfil AB

Admitindo-se que a linha AB da figura 6 representa um perfil de um terreno, a área CDEF representa um corte. A superfície do terreno proveniente de um corte ou aterro chama-se **talude** ou **rampa,** a **crista** de um corte é chamada de ***offset***.

Os declives dos taludes variam de acordo com a natureza do terreno e da altura do corte. Os valores mais comumente utilizados são:

a) Terreno com possibilidade de desmoronamento: 1/1;
b) Terreno sem possibilidade de desmoronamento: 3/2;
c) Rocha: talude vertical.

8. Aterro

Quando a construção que se quer executar tem cota maior que a superfície natural do terreno, faz-se um preenchimento que é denominado aterro.

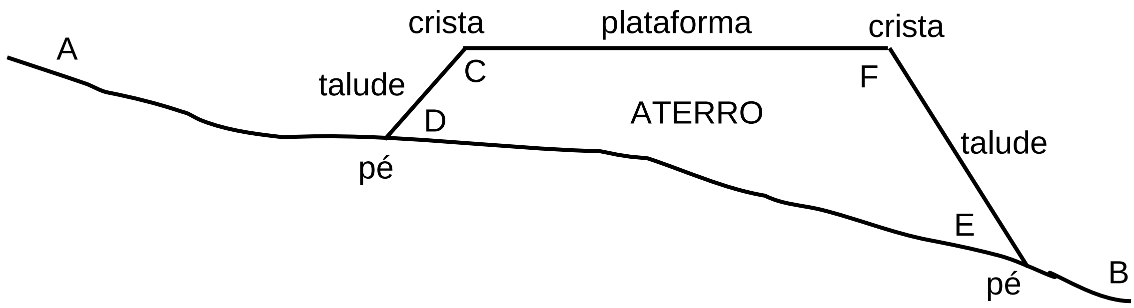


Figura 7 – Aterro realizado no terreno representado pelo perfil AB

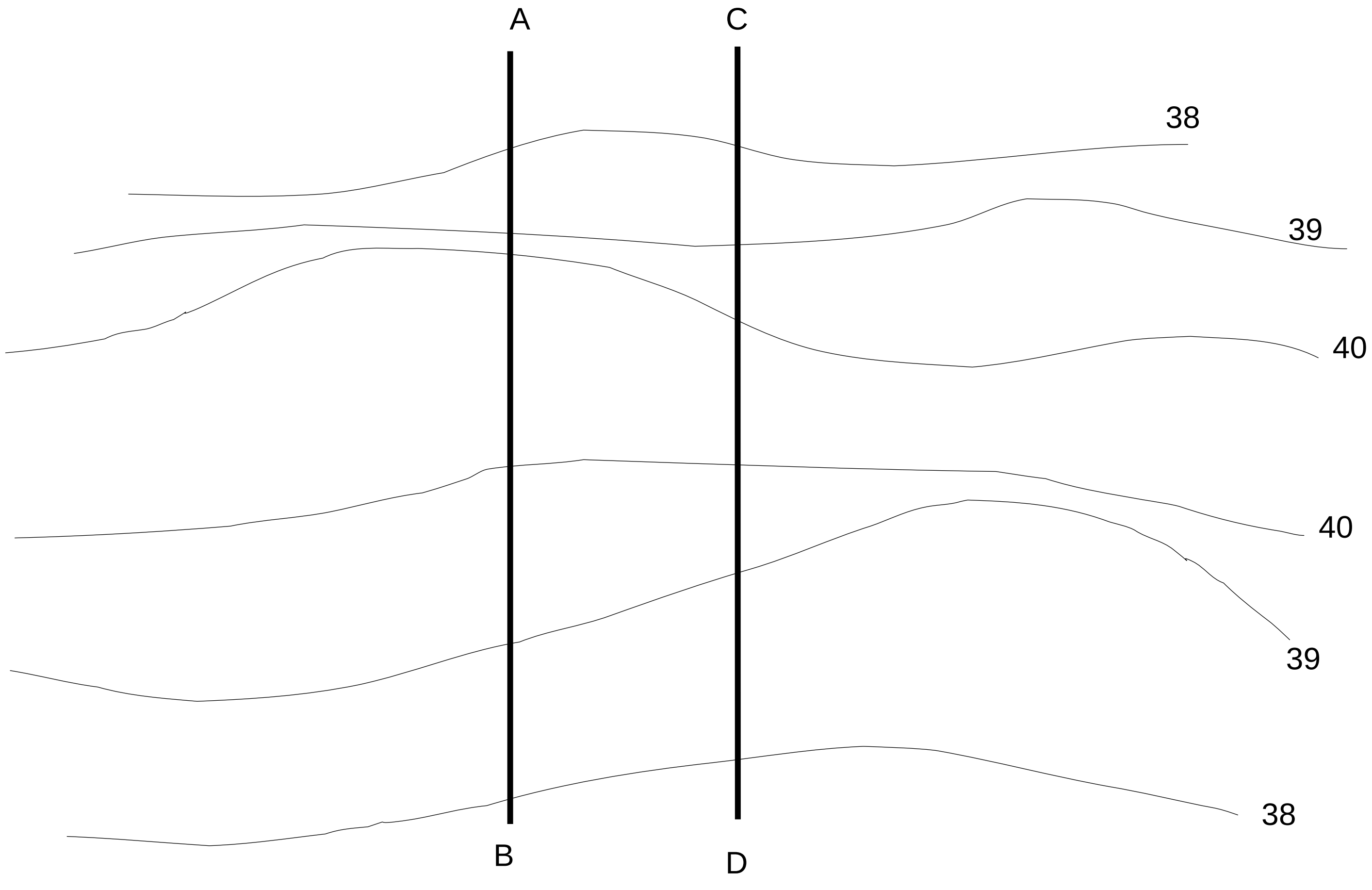
Admitindo-se que a linha AB da figura 7 representa um perfil de um terreno, a área CDEF representa um aterro. O talude de um aterro também é chamado de **saia**. O pé de um aterro também é chamado de *offset*.

Os declives dos taludes dos aterros variam de acordo com as circunstâncias e principalmente com a altura. Os valores mais comumente utilizados são: 1/4, 1/3, 1/2 e 2/3.

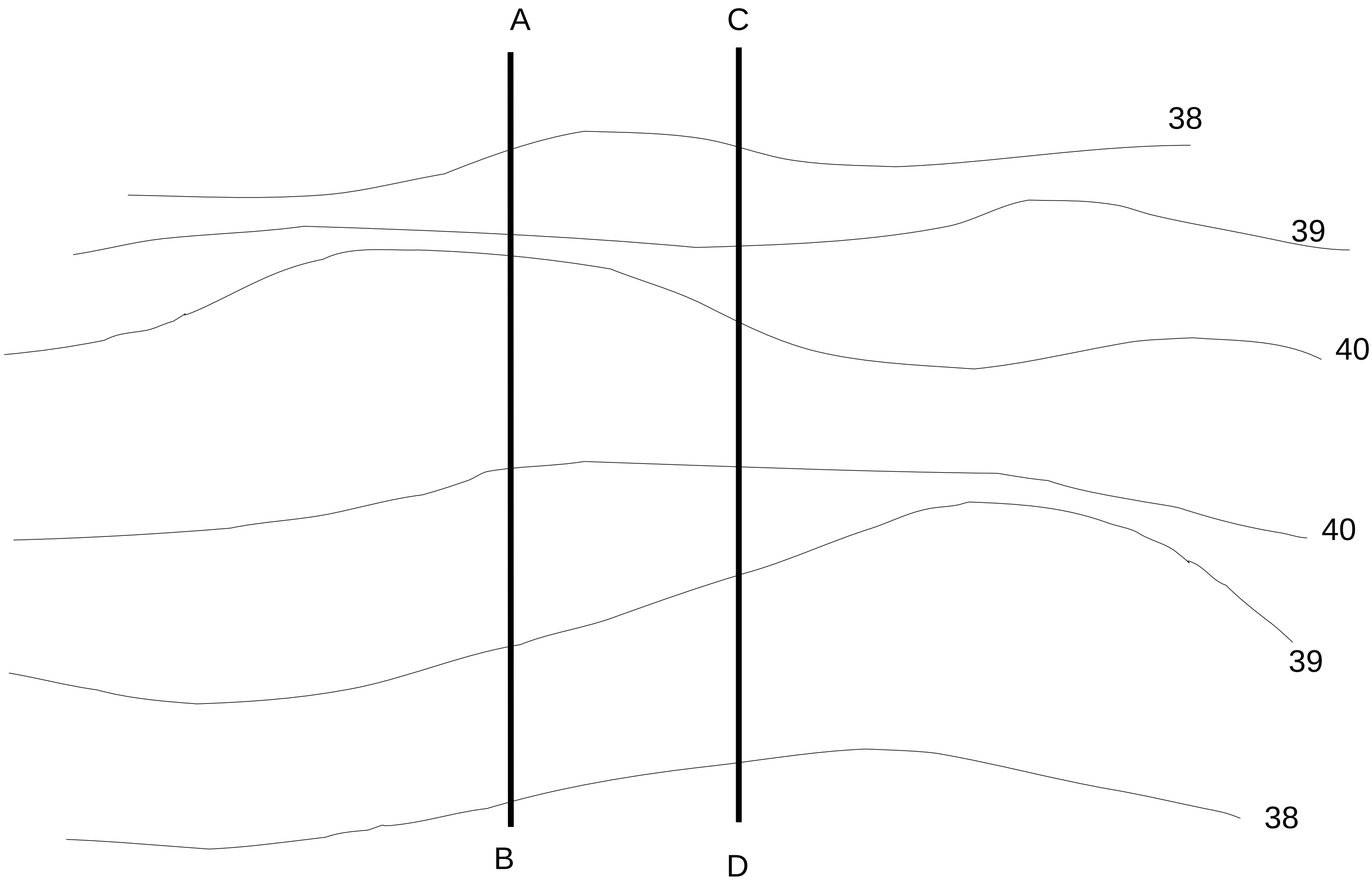
Exercício: Dada a superfície topográfica, representada pelas curvas de nível, determinar as linhas de *offset* para a construção da estrada representada pelas horizontais AB e CD de cota 38. Os dados fornecidos são referentes aos taludes de corte.

Fazer o novo desenho das curvas de nível. Indicar, para cada talude de corte, a inclinação θ, o declive de e o intervalo I.

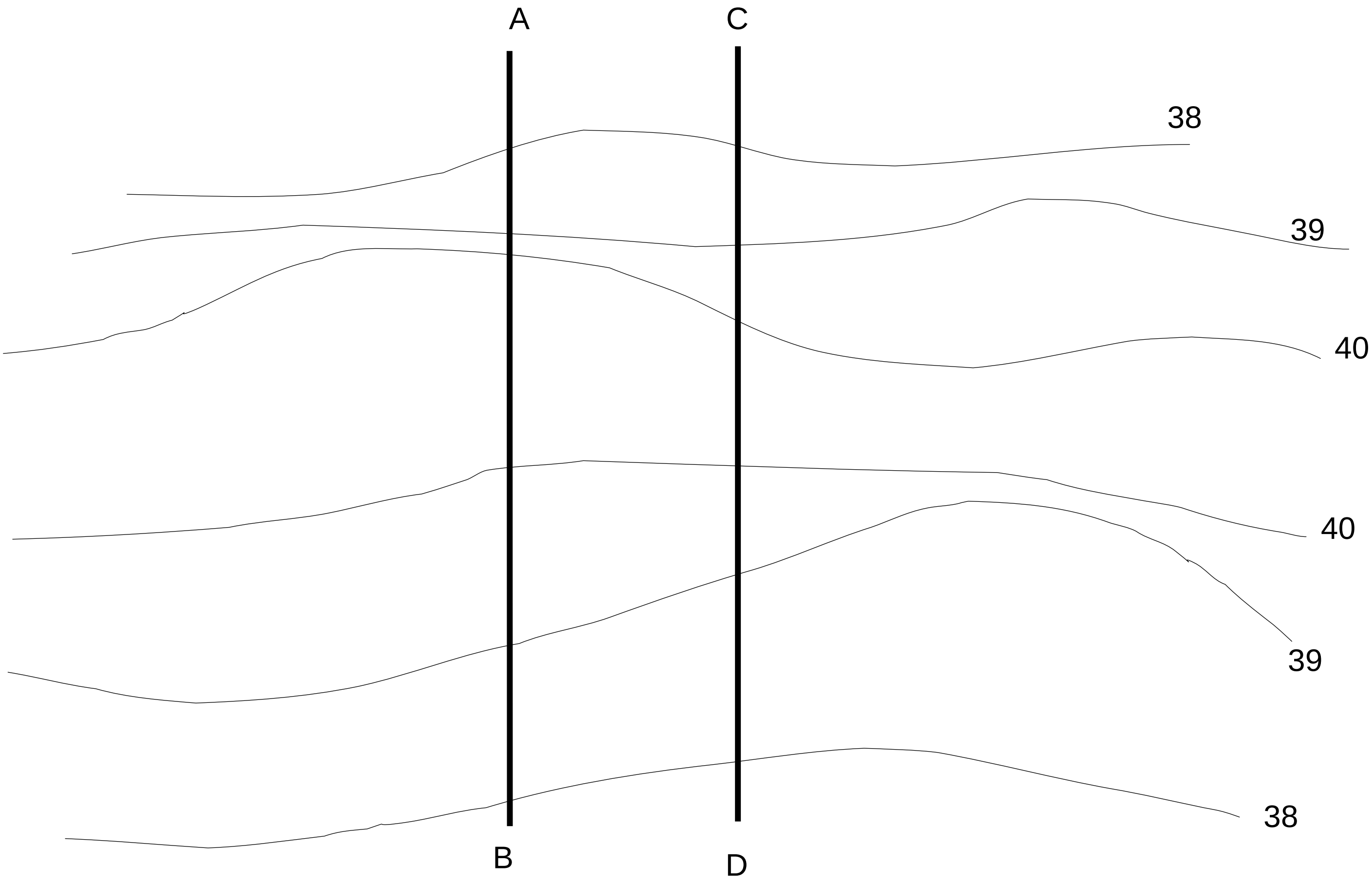
a) inclinações θ_E=45º à esquerda de AB e θ_D=60º à direita de CD.



b) inclinações θ_E=30º à esquerda de AB e θ_D=40º à direita de CD.



c) declives de_E=2/3 à esquerda de AB e de_D=1 à direita de CD.



9. Seção Mista

A seção mista é constituída de parte em corte e de parte em aterro, como mostra figura 8.

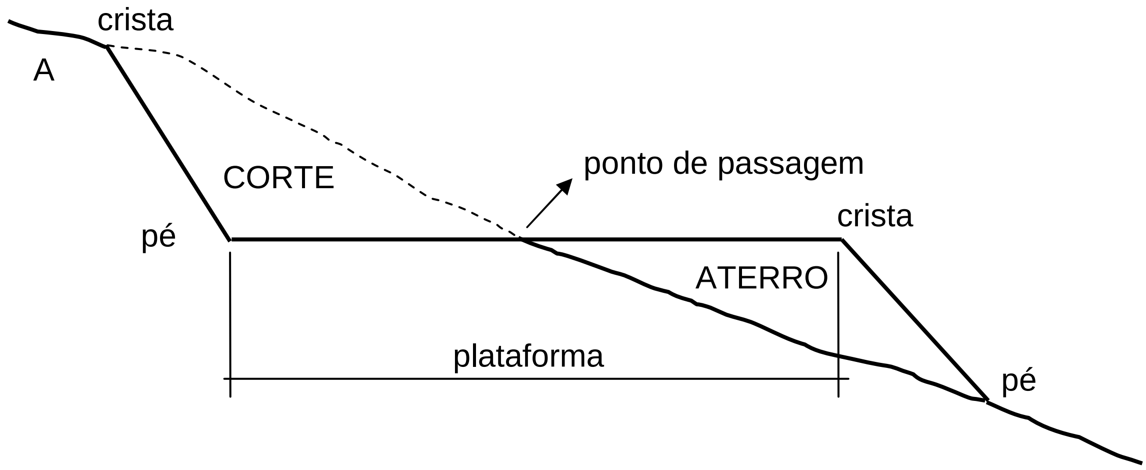


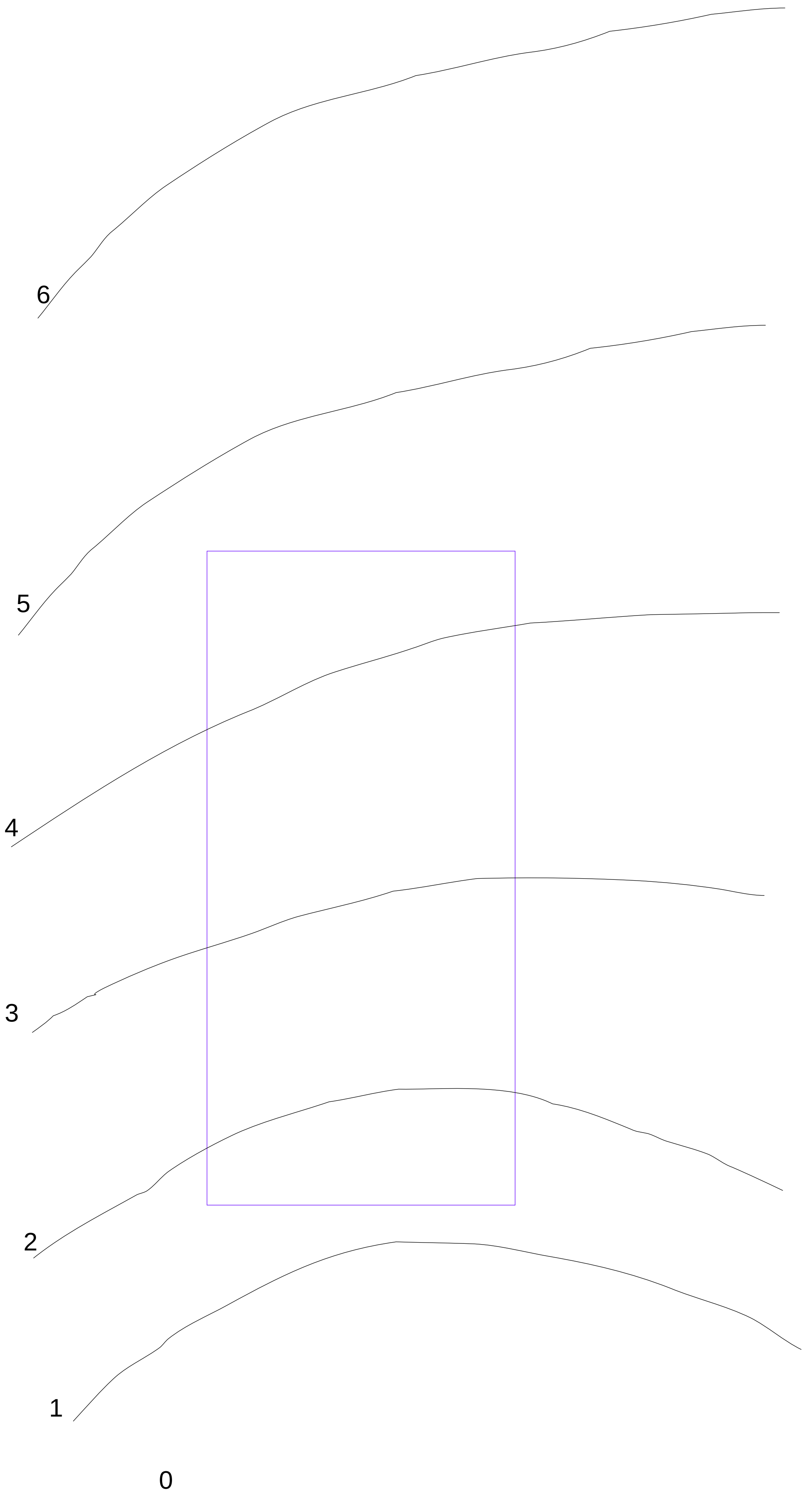
Figura 8 – Seção mista realizada no terreno representado pelo perfil AB

O ponto da superfície natural do terreno de mesma cota que a plataforma chama-se ponto de passagem, é nesse ponto que termina o corte e começa o aterro. A plataforma da seção mista é limitada de um lado pelo pé do corte e do outro pela crista do aterro.

10. Linhas dos offsets

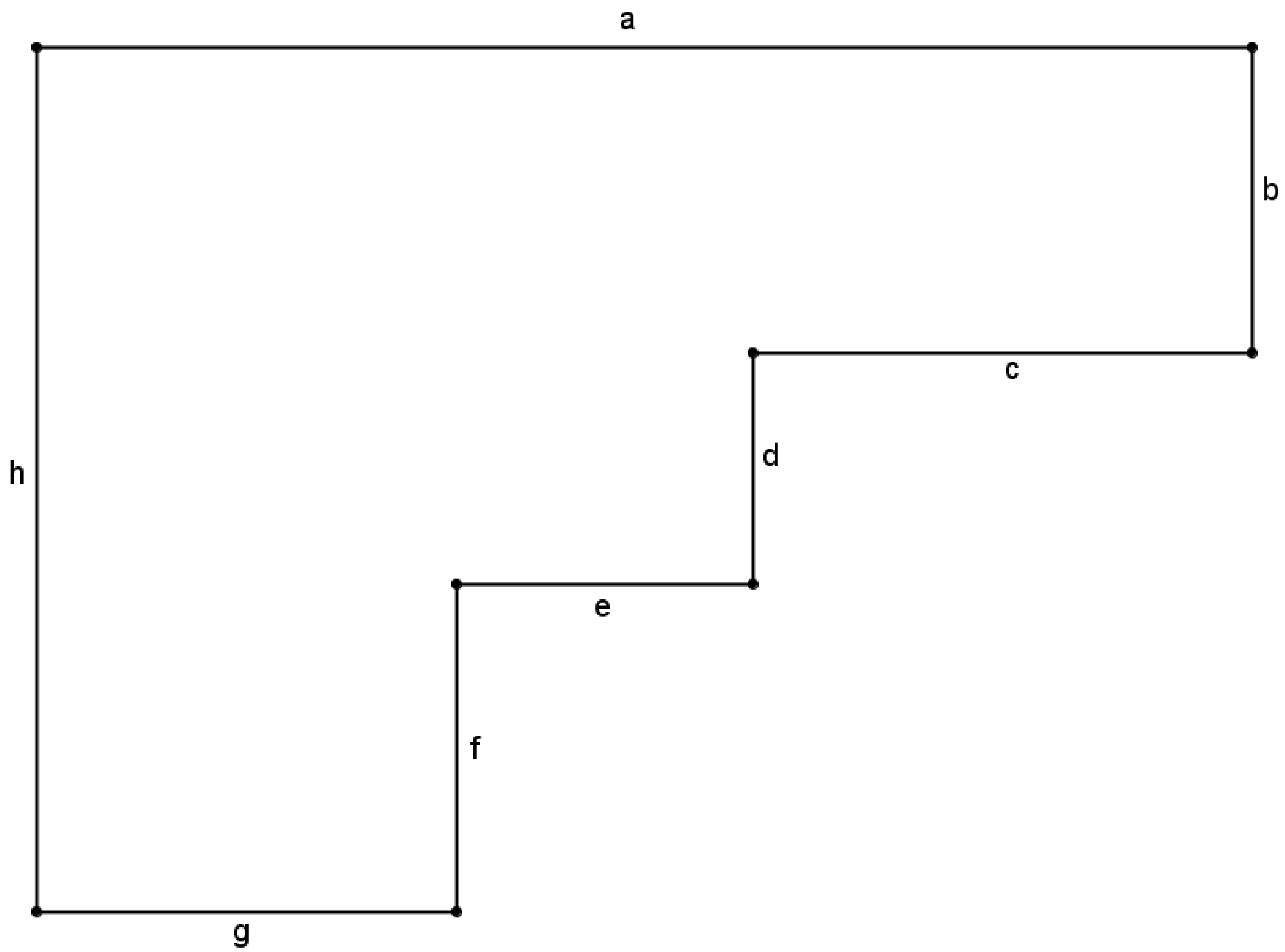
Considerando-se uma seção transversal em um corte ou aterro, o ponto comum da linha natural do terreno com o talude chama-se ***offset***. Determinados os vários *offsets*, a união desses pontos fornece a curva chamada linha dos *offsets*.

Exercício: Dada a superfície topográfica, representada pelas suas curvas de nível, obter as linhas de *off-set* resultantes da execução de uma terraplenagem no terreno delimitado pelo retângulo, de maneira que se tenha toda a área em nível na cota 3. O talude de aterro tem declividade 5/6 e o de corte tem 1/1.


6
5
4
3
2
1
0

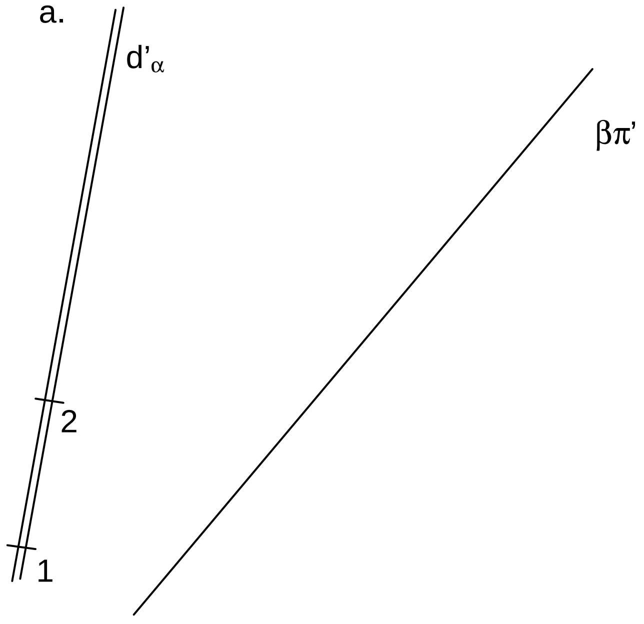
Lista de Exercícios

1. Considerando-se a poligonal como a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível de 2,7m. Sabendo-se que todas as águas têm inclinação de 30º;
pede-se:
a) as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo;
b) indicar o sentido de escoamento das águas;
c) achar a cota da cumeeira principal;
d) a declividade do rincão (cd) e seu comprimento
u = 1m (unidade de cota), escala 1:100.

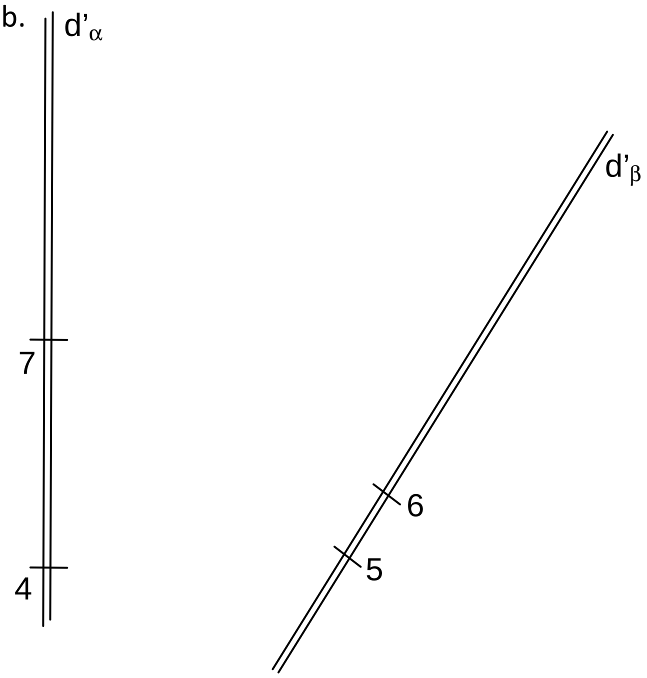


2. Encontre a interseção dos planos α e β dados abaixo:

a.



b.

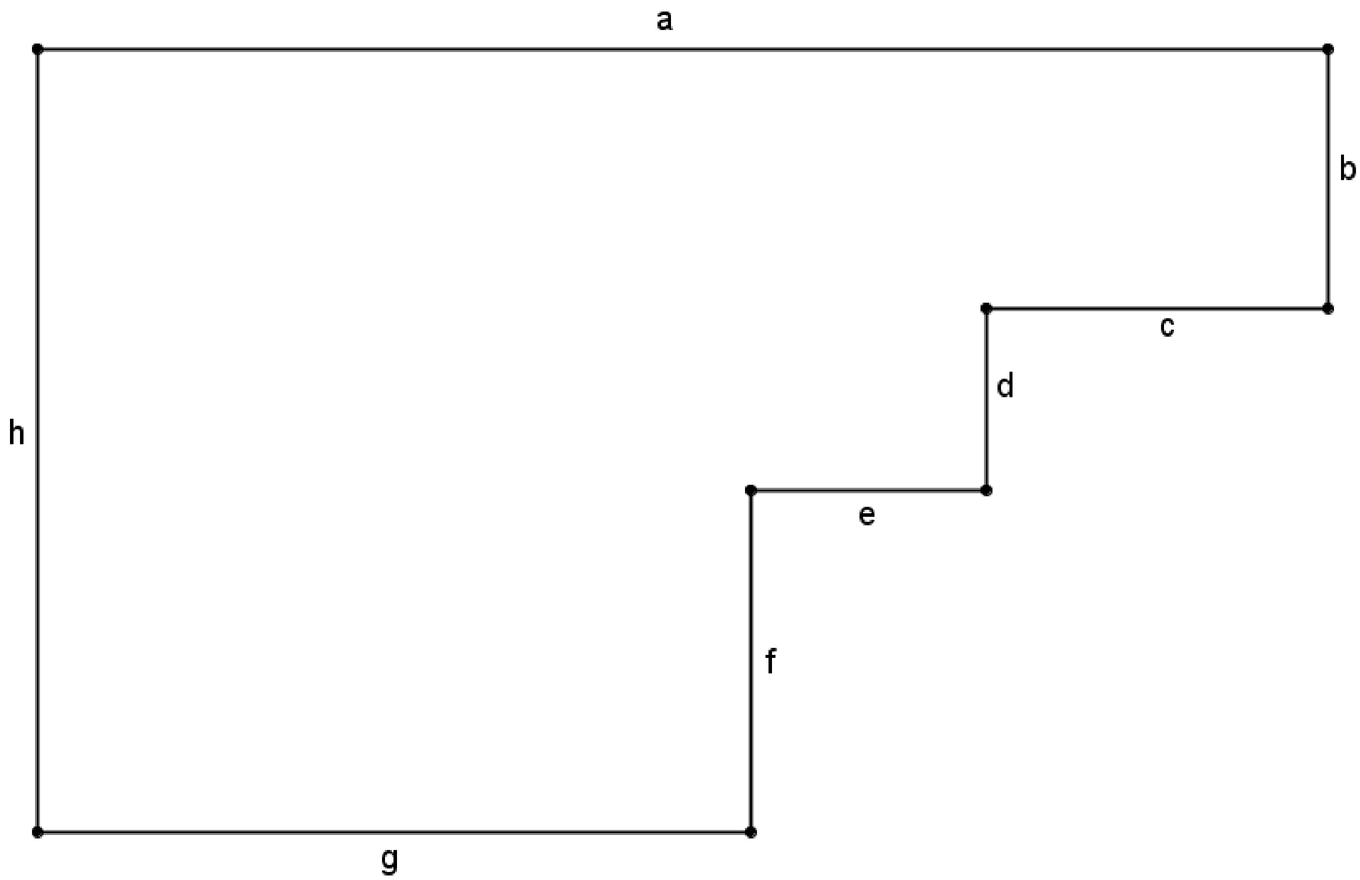


3. Considerando-se a poligonal como sendo a linha de beiral de um telhado, todas no mesmo nível de 2,7m, pede-se achar as projeções horizontais das interseções das águas do mesmo, sabendo-se que:

a) As águas que contém as linhas de beiral “a”, “h” e “g” têm inclinação igual a 60°;

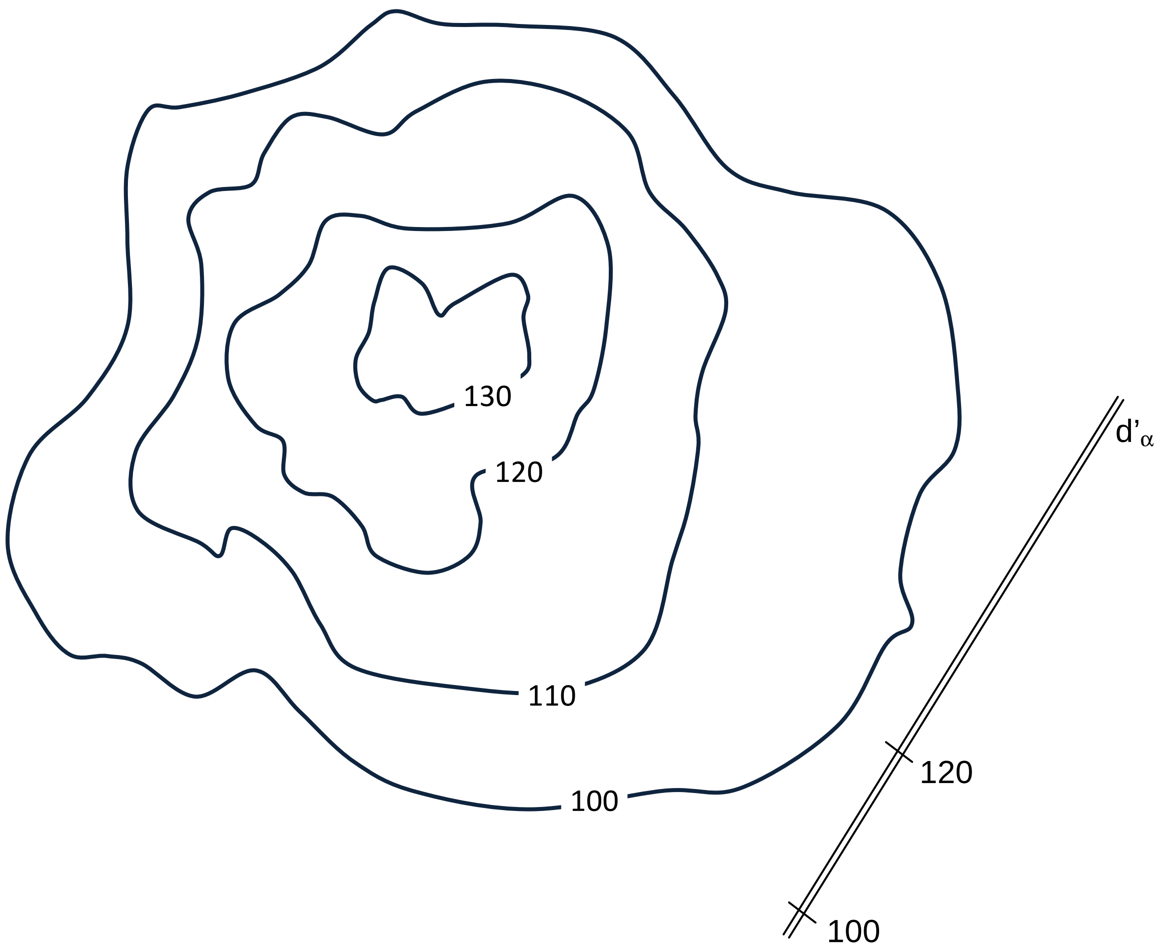
b) As outras águas têm inclinação igual a 30°;

c) Indicar o sentido de escoamento das águas e achar a cota da cumeeira principal.



4. Dada a representação dos terrenos abaixo através de suas curvas de nível, encontrar a seção plana de α dado por sua escala de declive:

a.



b.