MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE EXPRESSÃO GRÁFICA
Professores: Deise Maria Bertholdi Costa e Paulo Henrique Siqueira
Disciplina: Geometria Descritiva

Dupla Projeção Ortogonal

PARTE I - INTRODUÇÃO

1. DESENHO E GEOMETRIA

Desenho Artístico
Desenho de Resolução
Desenho Técnico

2. GEOMETRIA DESCRITIVA

É utilizada para representar os objetos do espaço tridimensional no espaço bidimensional, mediante a utilização de projeções e resolver os problemas relativos a esses objetos através da Geometria Plana e do Desenho Geométrico.

3. MÉTODOS DE REPRESENTAÇÃO

Dupla Projeção Ortogonal (Monge)
Projeção Cotada (Büache)
Projeção Central (Cousinery)
Projeção Axonométrica (Polke)

4. PROJEÇÕES

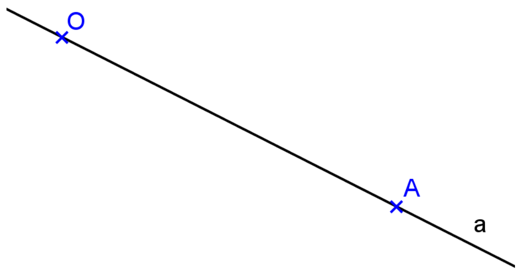
- um só plano
  - cônica → perspectiva cônica
  - cilíndrica
    - oblíquas → perspectiva cavaleira
    - ortogonais →
      - perspectiva axonométrica
      - projeção cotada
  - especiais → projeções cartográficas
- dois ou mais planos → Dupla Projeção Ortogonal (ou Método Mongeano ou de Monge)

PARTE II - SISTEMAS DE PROJEÇÃO

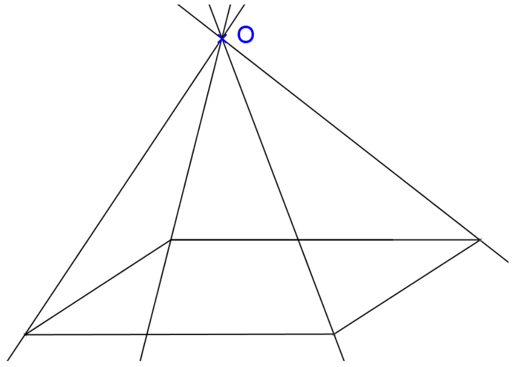
1. OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS NO DESENHO PROJETIVO

1.1 Conceito de projetar

Projetar A desde O

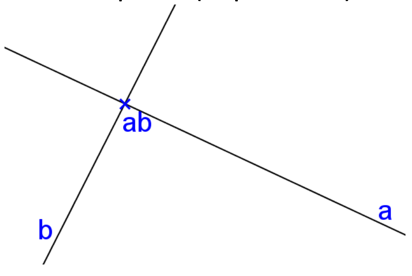


Projetar um objeto desde O

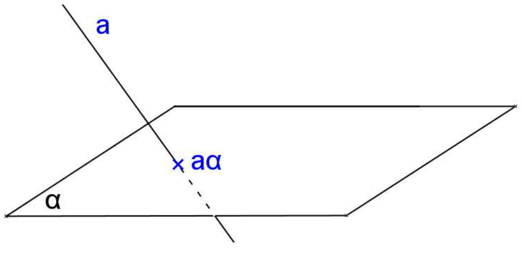


1.2 Conceito de cortar

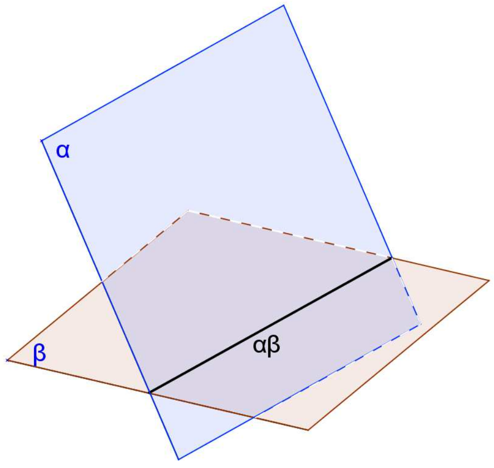
Cortar a por b (coplanares)



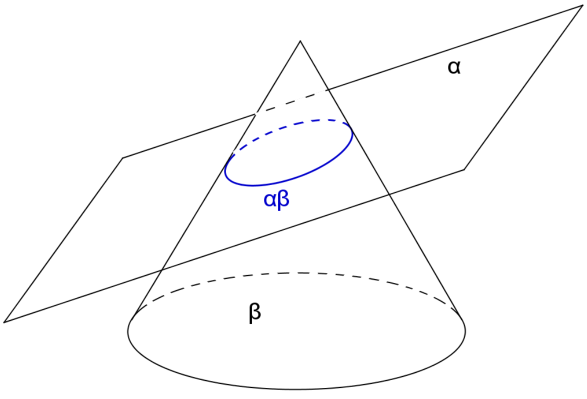
Cortar α por a



Cortar α por β



Cortar um objeto por outro



<u>Observação</u>: o ponto ou a reta ou a curva quando determinados por cortes chamam-se <u>*traços*</u>.

2. CONCEITO DE PROJEÇÃO CÔNICA (ou central)

Considere:

Sistema de projeção:

centro O próprio

plano π' ($O \notin \pi'$)

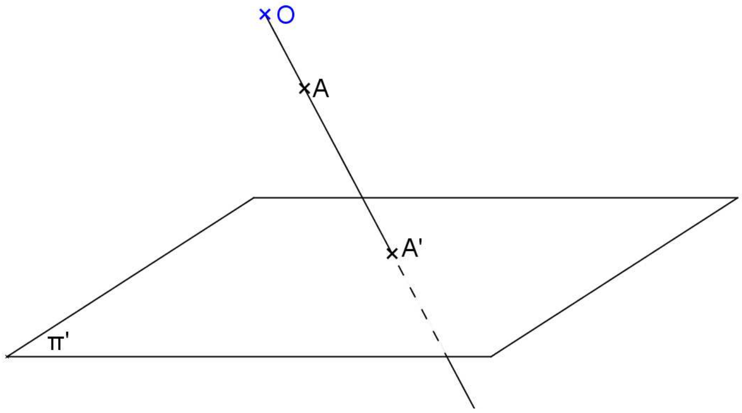
Objeto:

ponto A

Projeção:

Projetar

Cortar



A *projeção cônica* de um ponto A, no plano π' a partir de O, é o traço A' produzido sobre π', pela reta projetante do ponto A.

Observações:
- Plano de projeção ≠ plano projetante.
- É chamada de projeção cônica, pois as projetantes descrevem uma superfície cônica.

3. CONCEITO DE PROJEÇÃO CILÍNDRICA (oblíqua ou ortogonal)

Considere:

Sistema de projeção:

centro O impróprio (dado pela direção da reta d)

plano π'

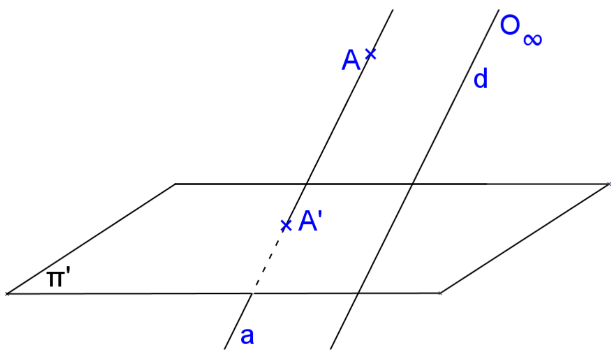
Objeto:

ponto A

Projeção:

projetar

cortar



A *projeção cilíndrica* de um ponto A, no plano π' a partir de O_∞, é o traço A' produzido sobre π', pela reta projetante do ponto A.

Observações:
- Dado A tem-se que A' é único, porém dado somente A' tem-se que ______________________
- É chamada de projeção cilíndrica, pois as projetantes descrevem ________________________
- Os pontos do plano de projeção ________________ com suas projeções.

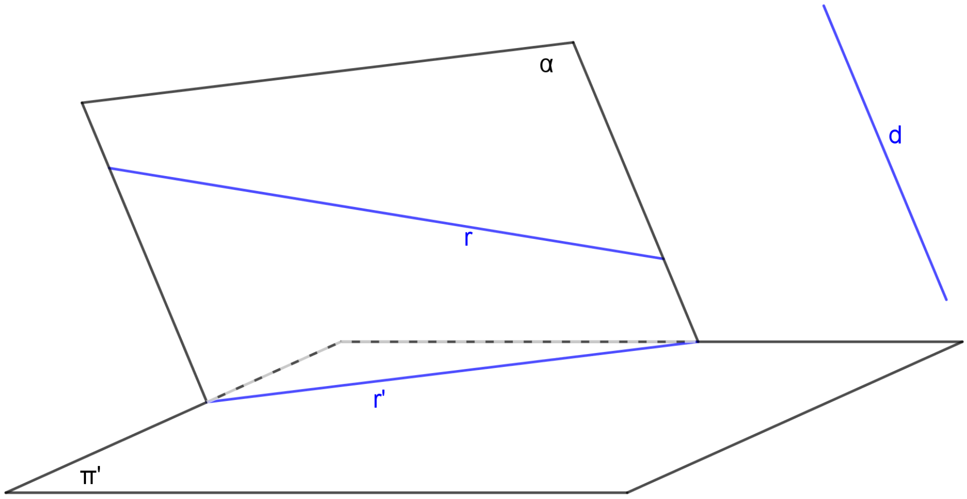
Classificação:
- $d \perp \pi' \Rightarrow$ Projeção cilíndrica ortogonal
- $d \not\perp \pi' \Rightarrow$ Projeção cilíndrica oblíqua

4. PROPRIEDADES DAS PROJEÇÕES CILÍNDRICAS (oblíquas ou ortogonais)

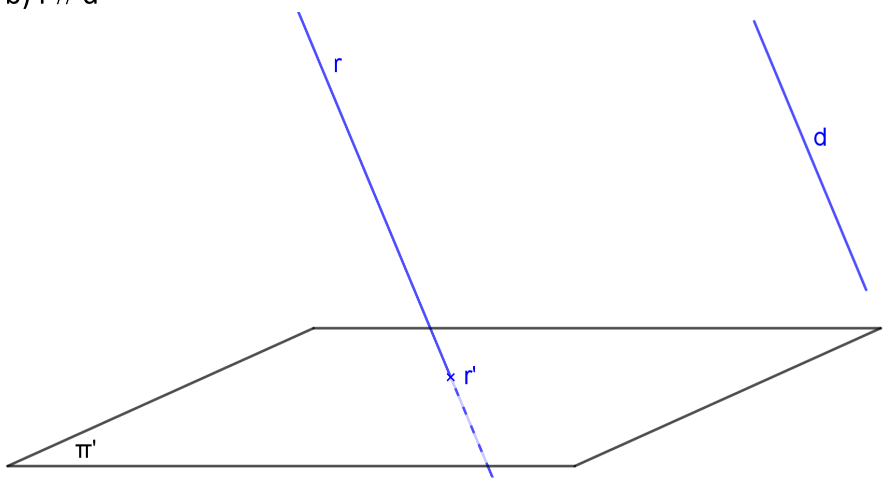
1ª propriedade

$$\text{Se } r \text{ é uma reta } \Rightarrow \begin{cases} r' \text{ é uma reta, quando } r \text{ não é } \parallel d \\ r' \text{ é um ponto, quando } r \text{ é } \parallel d \end{cases}$$

a) r não é // d



b) r // d



<u>Observações</u>:

a) Se a projeção cilíndrica de uma reta é uma reta, então a reta objetiva não é paralela a direção das projetantes;

b) Se a projeção cilíndrica de uma reta é um ponto, então a reta é paralela à direção das projetantes;

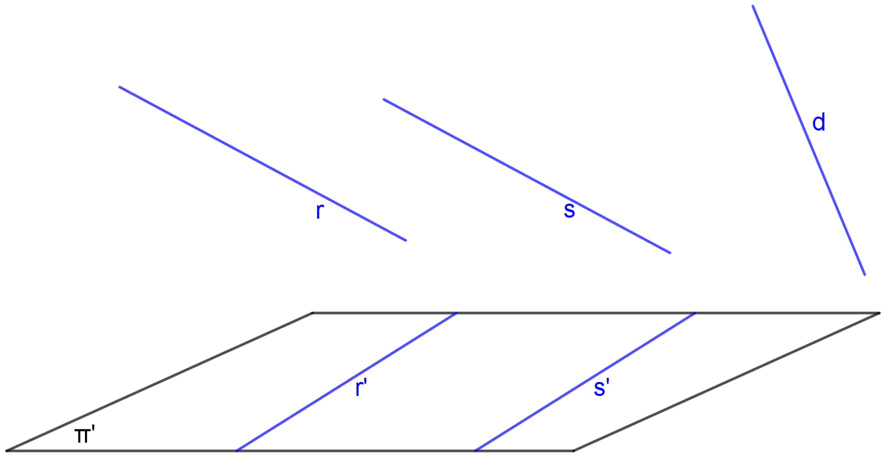
c) Se uma reta é perpendicular ao plano de projeção, sua projeção cilíndrica-ortogonal sobre o mesmo será o seu traço no plano de projeção considerado. Reciprocamente, se a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano reduzir-se a um ponto, então a reta será perpendicular ao plano de projeção, ou o que é equivalente, a reta será paralela à direção das projetantes.

d) Uma reta r, não paralela à direção das projetantes, e sua projeção cilíndrica r′ são coplanares; logo, pode ocorrer entre a reta e sua projeção uma das seguintes condições:
- r e r′ são concorrentes, neste caso a reta corta o plano de projeção;
- São paralelas, neste caso a reta será paralela ao plano de projeção;
- São coincidentes, neste caso a reta estará contida no plano de projeção.

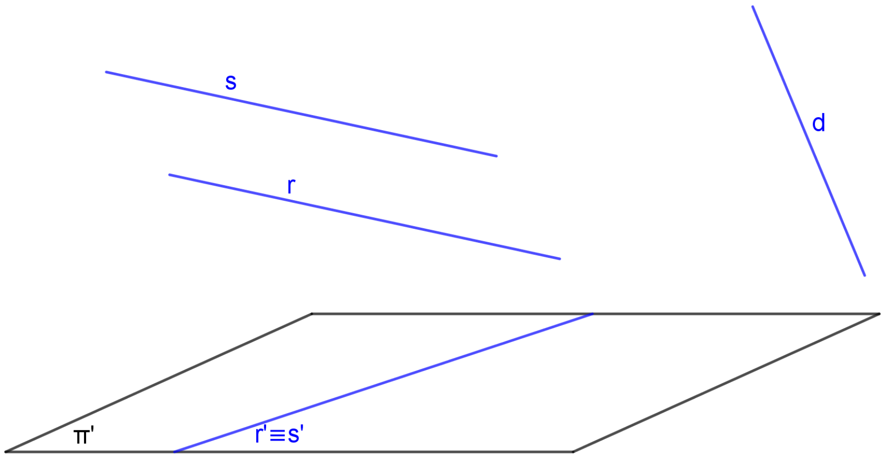
2^a propriedade

$$\text{Se } r \parallel s \Rightarrow \begin{cases} r' \parallel s' \\ r' \equiv s' \\ r' \text{ e } s' \text{ são pontuais} \end{cases}$$

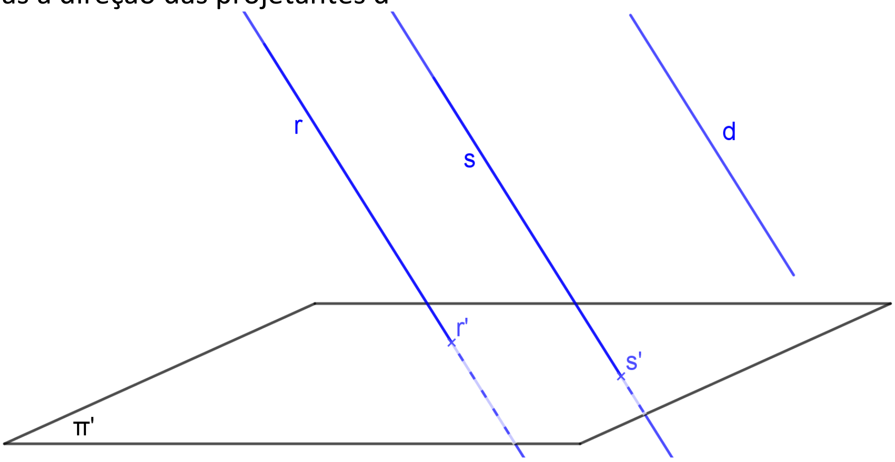
a) r e s pertencem a planos projetantes distintos



b) r e s pertencem ao mesmo plano projetante



c) r e s são paralelas à direção das projetantes d

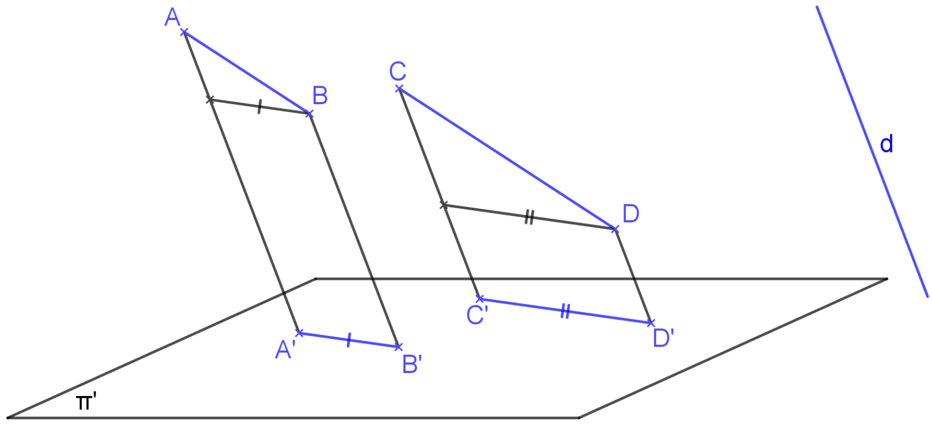


<u>Observação:</u> A recíproca não é verdadeira. Então se t′ // s′ não implica em t // s.

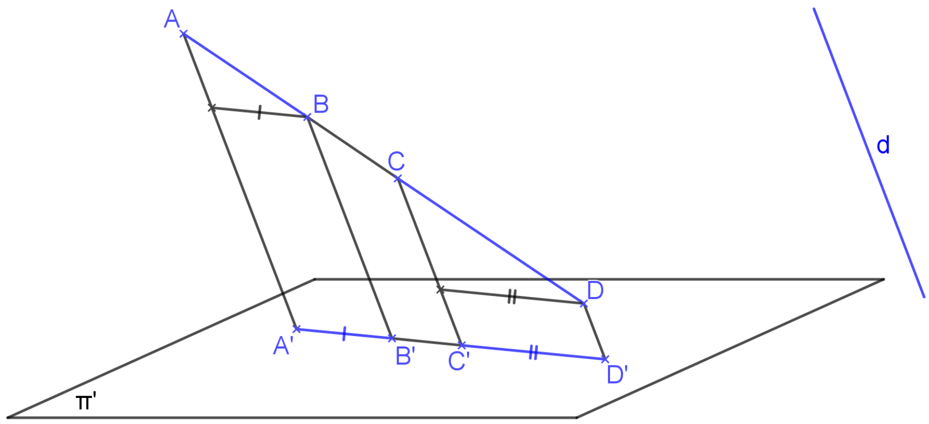
3ª propriedade

$$\text{Se } \begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ ou colineares} \\ \text{e não paralelos a } d \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

a) AB || CD

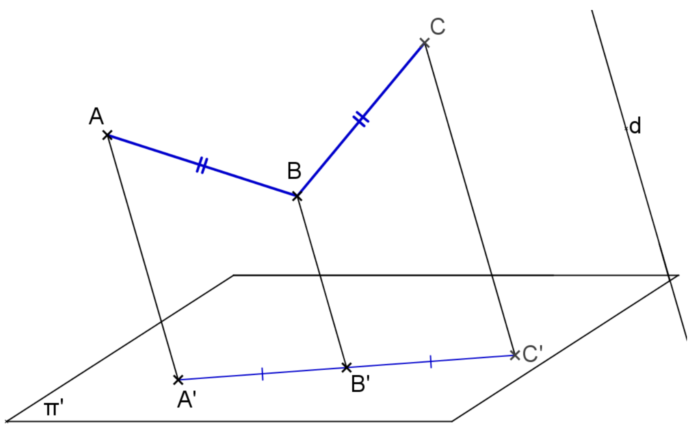


b) AB e CD colineares



Consequência: Se M é ponto médio de AB então M' é ponto médio de A'B'.

Observação: A recíproca não é verdadeira. Ou seja, se AB/CD = A'B'/C'D' não implica que AB || CD ou colineares.



Exercícios

Considere um sistema de projeção cilíndrica com somente um plano de projeção π'. Escreva ao lado de cada exercício as propriedades geométricas e as propriedades das projeções cilíndricas utilizadas.

1. Represente a projeção do ponto médio M do segmento AB dado pelas projeções de A e B.

a)

A′+

+B′

b)

A′≡B′ +

2. Represente a projeção do paralelogramo ABCD, dadas as projeções dos pontos A, B e C.

A′+

+B′

+ C′

3. Represente a projeção do paralelogramo ABCD sendo dadas as projeções dos pontos A e B e do ponto M de interseção das diagonais.

a)

A′+

+B′

+M′

b)

A′≡B′ +

+ M′

c)

A′
+

+M′≡B′

4. Represente a projeção do triângulo ABC, dadas as projeções dos vértices A e B e do baricentro G.

a)

A′+

+ B′

+ G′

b)

+ A′≡B′

+ G′

c)

A′≡G′
+

+
B′

5. Represente a projeção do hexágono regular ABCDEF sendo dadas as projeções de dois vértices e do centro O da circunferência circunscrita.

a)

A′+

+ B′

+O′

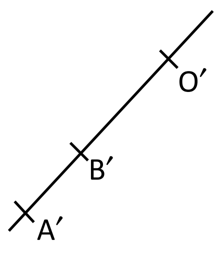
b)

A′+

+ O′

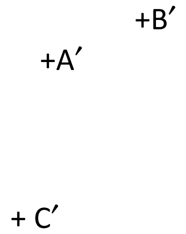
+ C′

c)

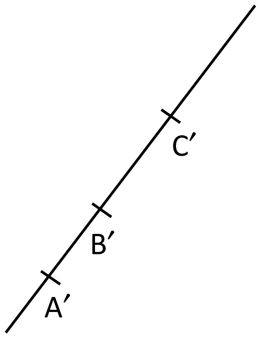


6. Represente a projeção do hexágono regular ABCDEF sendo dadas as projeções de A, B e C.

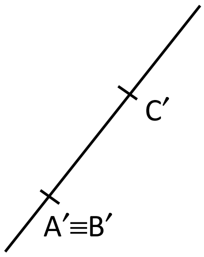
a)



b)



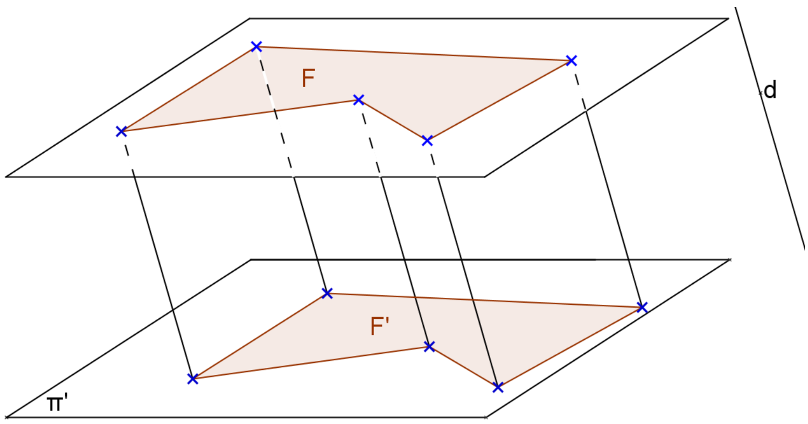
c)



4ª propriedade

Se uma figura $F \subset \alpha$ e $\alpha \parallel \pi' \Rightarrow F = F'$.

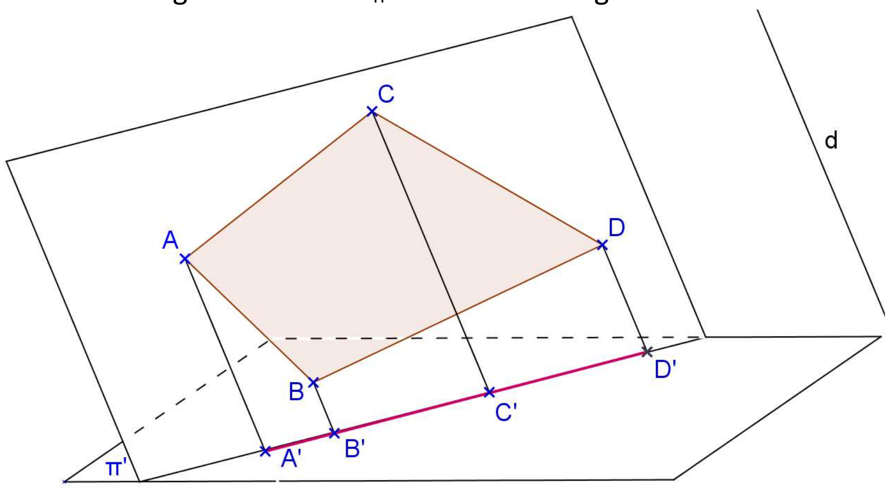
Dizemos que F′ está em VG (verdadeira grandeza).



<u>Observação:</u> A recíproca não é verdadeira em projeção oblíqua, porém é verdadeira em projeção ortogonal.

5ª propriedade

Uma figura $F \subset \alpha$ e $\alpha \parallel d \Leftrightarrow F'$ é um segmento e $F' \subset \alpha\pi'$.

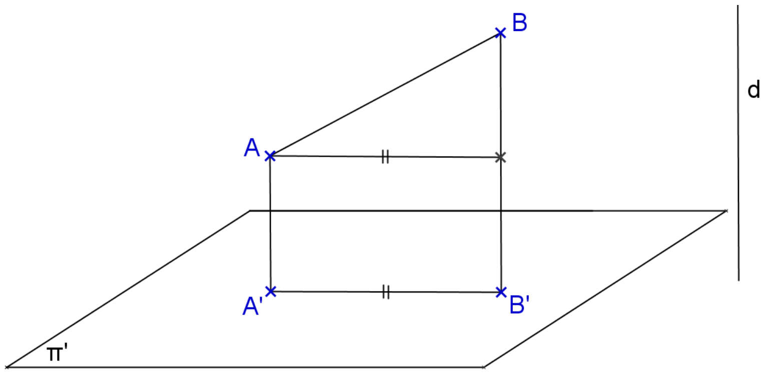


Observação: A recíproca é verdadeira.

PROPRIEDADES DAS PROJEÇÕES CILÍNDRICAS ORTOGONAIS

6ª propriedade

$AB \not\perp \pi' \Rightarrow AB > A'B'$.

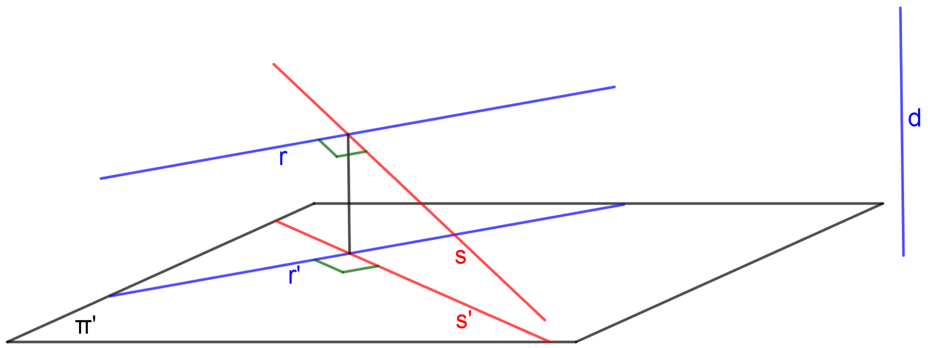


Observação: A recíproca é verdadeira.

7ª propriedade

Se duas retas são perpendiculares ou ortogonais entre si, sendo uma delas paralela ou pertencente ao plano de projeção e a outra não perpendicular a esse plano, então as projeções ortogonais dessas retas são perpendiculares entre si:

$$\text{Se} \quad \begin{array}{ll} r \perp s \text{ ou } r \perp s & (1) \\ r \parallel \pi' \text{ ou } r \subset \pi' & (2) \\ s \not\perp \pi' & (3) \end{array} \quad \Rightarrow \quad r' \perp s' \ (4)$$



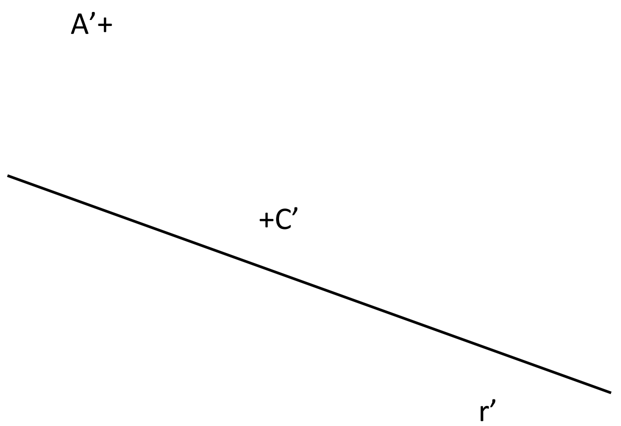
<u>Observação</u>: As recíprocas são verdadeiras. São elas:

Recíproca 1: (2) + (3) +(4) $\Rightarrow$ (1)

Recíproca 2: (1) + (4) $\Rightarrow$ (2) + (3)

Exercícios

1. Represente a projeção cilíndrica ortogonal de um losango ABCD, sabendo-se que a diagonal AC está paralela a π', dada a projeção da reta r que é o lugar geométrico do ponto B.



2. Represente a projeção cilíndrica ortogonal de um retângulo ABCD, dadas as projeções dos vértices A e C, sabendo-se que o lado AB é paralelo a π' e mede 3cm.

A'+

+C'

3. Represente a projeção do paralelepípedo ABCDEFGH sendo dadas as projeções de A, B, C e E.

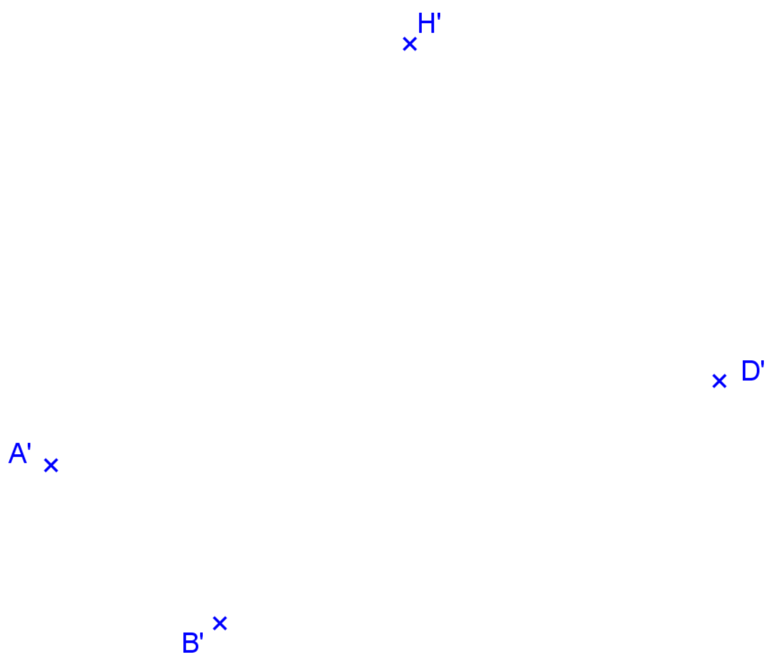
E′+

C′+

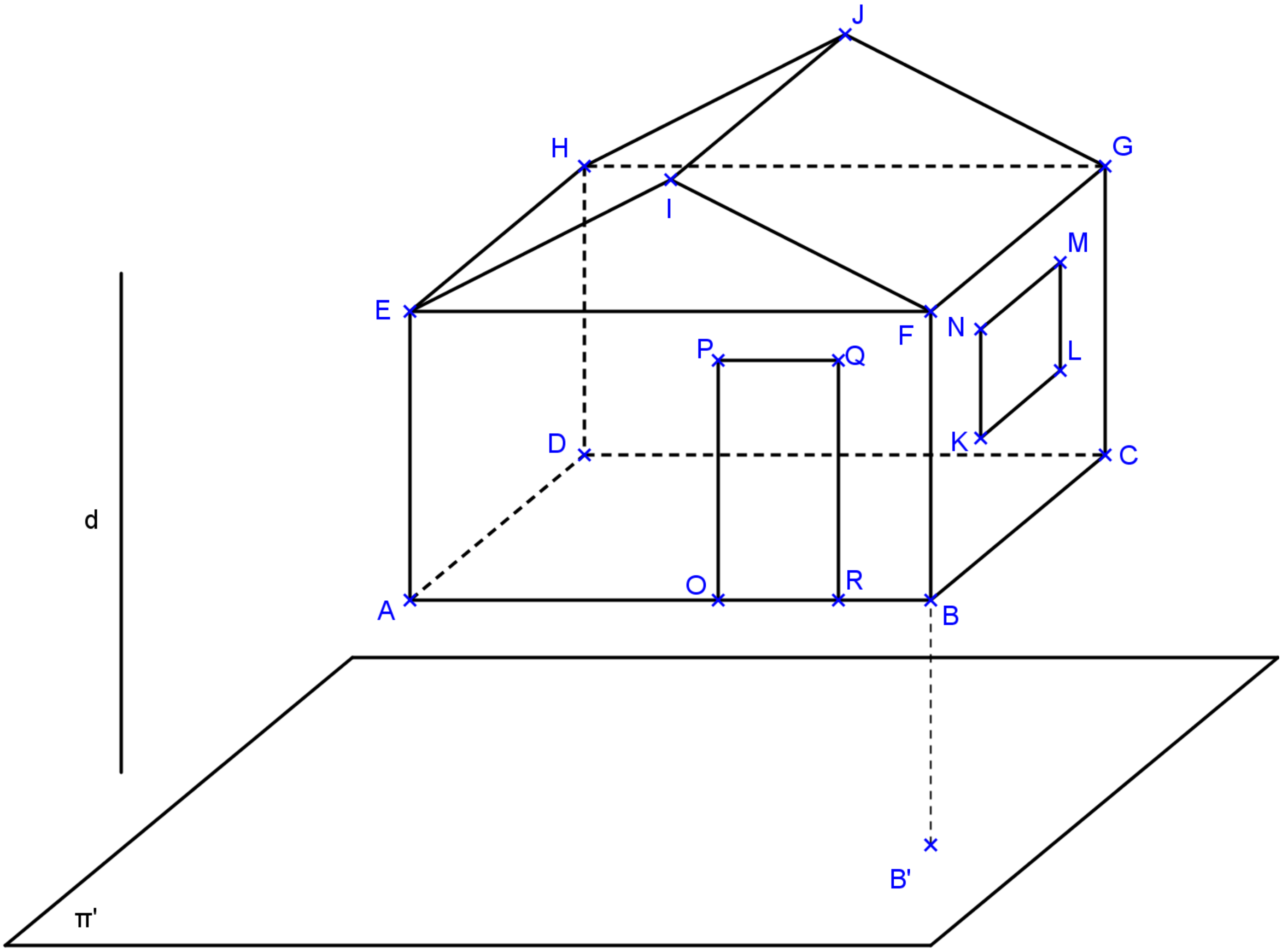
A′+

B′+

4. Represente as projeções cilíndricas do prisma ABCDEF-GHIJKL de base hexagonal, dadas as projeções dos vértices A, B, D e H.



5. Usando as propriedades de projeções cilíndricas, termine as projeções da casa no plano π' dado abaixo, usando a direção de projeções d. Considere que a base ABCD é paralela a π'.

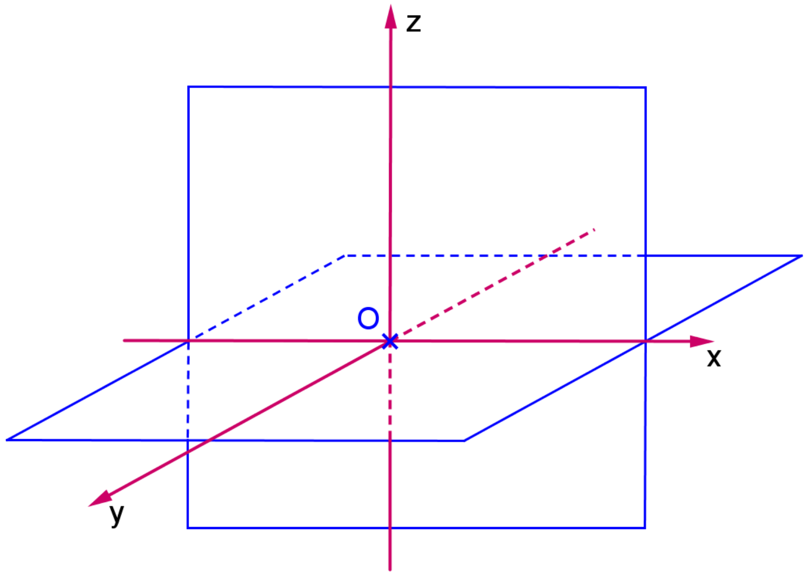


Os segmentos AB, AE, HJ e JG ficam projetados em verdadeira grandeza em π'? Por que?

O MÉTODO DAS DUPLAS PROJEÇÕES ORTOGONAIS

PARTE III – REPRESENTAÇÃO DO PONTO

1. PLANOS FUNDAMENTAIS DE REFERÊNCIA



Considere π' e π'' dois planos perpendiculares entre si, denominados *Planos Fundamentais de Referência* (PFR) ou *Planos de Projeção* (PDP).

Denominamos:
π': 1º PFR ou 1º PDP ou Plano Horizontal de Projeção
π'': 2º PFR ou 2º PDP ou Plano Vertical de Projeção

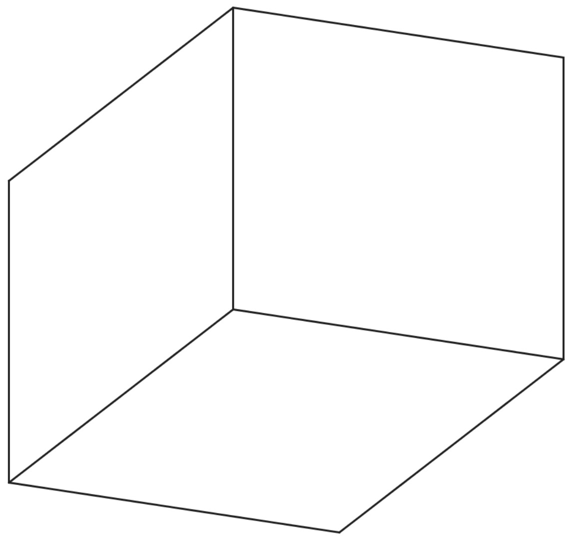
A interseção de π' e π'' chama-se *Linha de Terra*. Esta divide π' nas partes: anterior e posterior e π'' em superior e inferior.

Estes dois planos dividem o espaço em 4 porções, chamadas de *diedros*:
1º diedro – entre a parte anterior de π' e a superior de π''
2º diedro – entre a parte posterior de π' e a superior de π''
3º diedro – entre a parte posterior de π' e a inferior de π''
4º diedro – entre a parte anterior de π' e a inferior de π''

Considerando uma origem O sobre a Linha de Terra temos os eixos x, y e z.
No 1º diedro temos os valores para x _____ y _____ e z _____
No 2º diedro temos os valores para x _____ y _____ e z _____
No 3º diedro temos os valores para x _____ y _____ e z _____
No 4º diedro temos os valores para x _____ y _____ e z _____

Consideramos um 3º PFR (ou 3º PDP ou Plano Lateral de Projeção) π''' que contém os eixos y e z. Estes 3 planos dividem o espaço em octantes.

2. REPRESENTAÇÃO DO PONTO



Seja A um ponto. Considere as 3 projeções cilíndricas ortogonais: A', A'' e A''' sobre os planos π', π'' e π''', respectivamente.

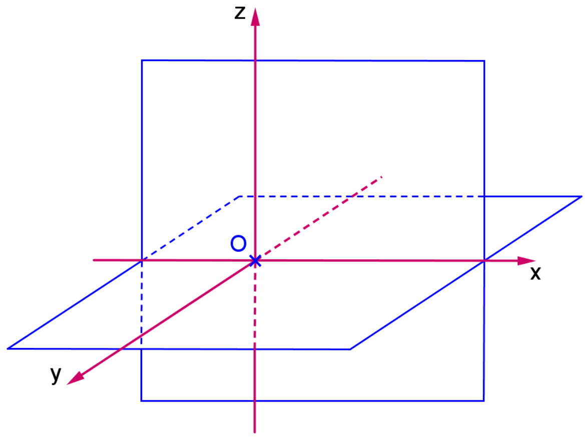
Temos as distâncias de A até os 3PFR:
Cota – distância de A até π' = segmento AA'
Afastamento – distância de A até π'' = segmento AA''
Abscissa – distância de A até π''' = segmento AA'''

Estas distâncias também nos fornecem as coordenadas (x,y,z) do ponto A:
x = abscissa
y = afastamento
z = cota

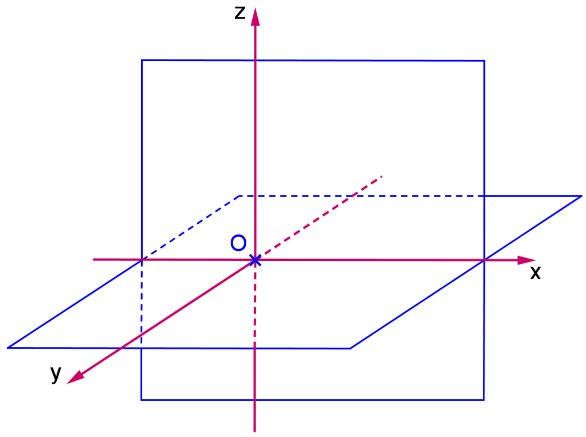
Fixamos um dos PFR e rebatemos os outros sobre o primeiro escolhido, temos a representação plana do ponto, chamada de *épura do ponto A*:

Pontos pertencentes aos diedros:

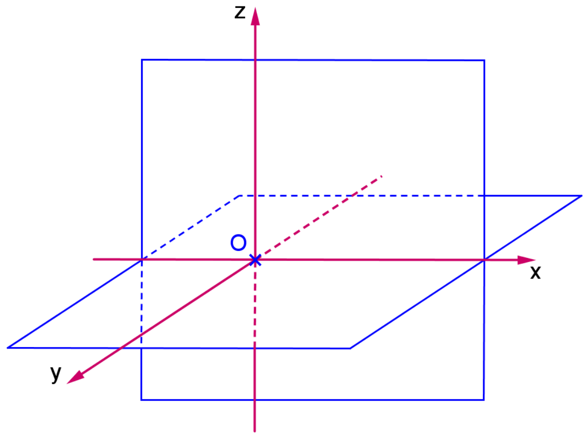
a) A pertence ao 1º diedro



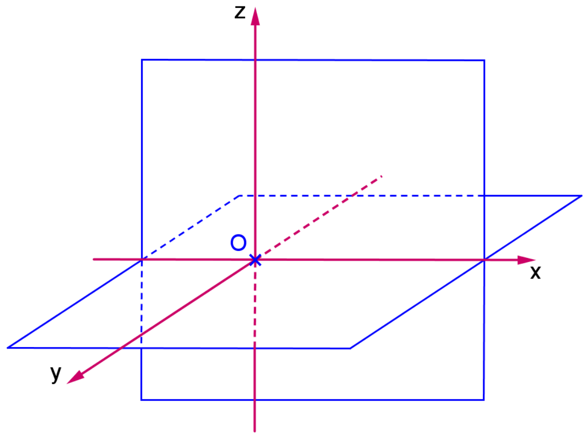
b) B pertence ao 2º diedro



c) C pertence ao 3º diedro



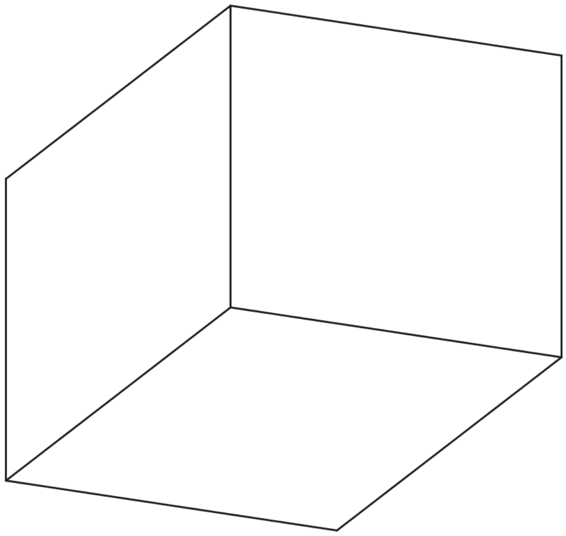
d) D pertence ao 4º diedro



3. PONTOS PERTENCENTES AOS PFR

Espaço

Épura:

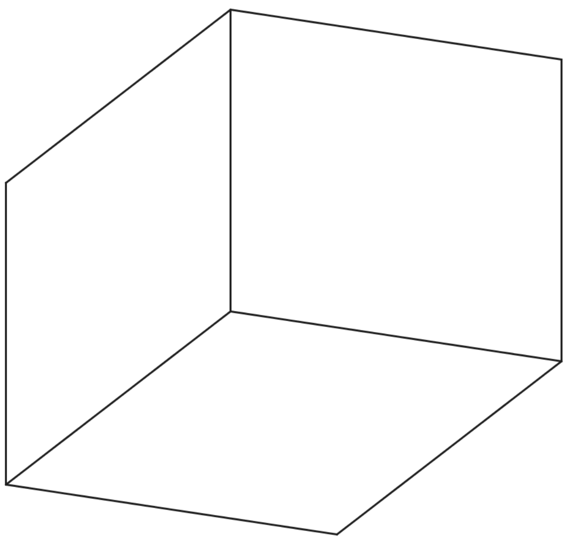


π' é o lugar geométrico (LG) dos pontos de ______________ nulas. A $\in \pi' \Leftrightarrow$ ____ $\in$ LT.
π'' é o lugar geométrico (LG) dos pontos de ______________ nulas. B $\in \pi'' \Leftrightarrow$ ____ $\in$ LT.
π''' é o lugar geométrico (LG) dos pontos de ______________ nulas. C $\in \pi''' \Leftrightarrow$ ____$\in$___.

4. PONTOS PERTENCENTES AOS EIXOS

Espaço

Épura:



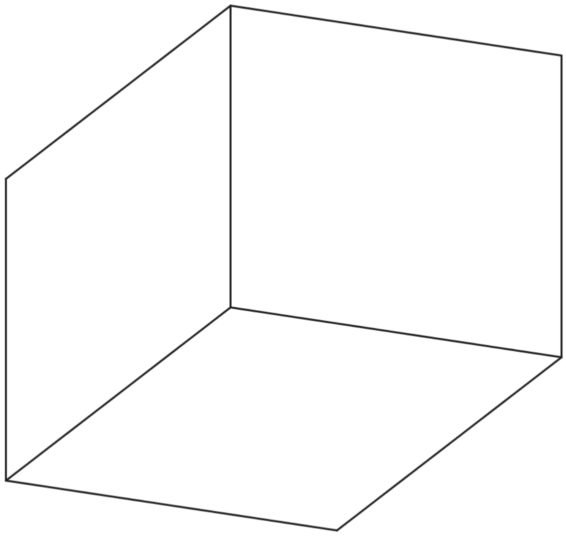
A LT (eixo x) é o LG dos pontos de ________________ nulas. Se A $\in$ LT $\Leftrightarrow$ ___________.
O eixo y é o LG dos pontos de ________________ nulos. Se B $\in$ y $\Leftrightarrow$ ___________.
O eixo z é o LG dos pontos de ________________ nulas. Se C $\in$ z $\Leftrightarrow$ ___________.

5. OBTENÇÃO DA 3ª PROJEÇÃO

Para obtermos a representação do ponto na 3ª projeção, podemos rebater π''' sobre o π' ou π''.

Considere π' fixo. Ao rebatermos π''' sobre o π' (ou π''), a 3ª projeção do ponto descreverá um arco de circunferência com centro no eixo y e raio igual à sua cota (ou afastamento). Este arco está contido em um plano paralelo a π'' (ou π') e, portanto está em VG na 2ª projeção (ou 1ª projeção). A 3ª projeção rebatida do ponto pertence a uma reta que passa pela primeira projeção do ponto (ou segunda projeção) e é paralela a linha de terra.

Espaço



Épura

Exercícios

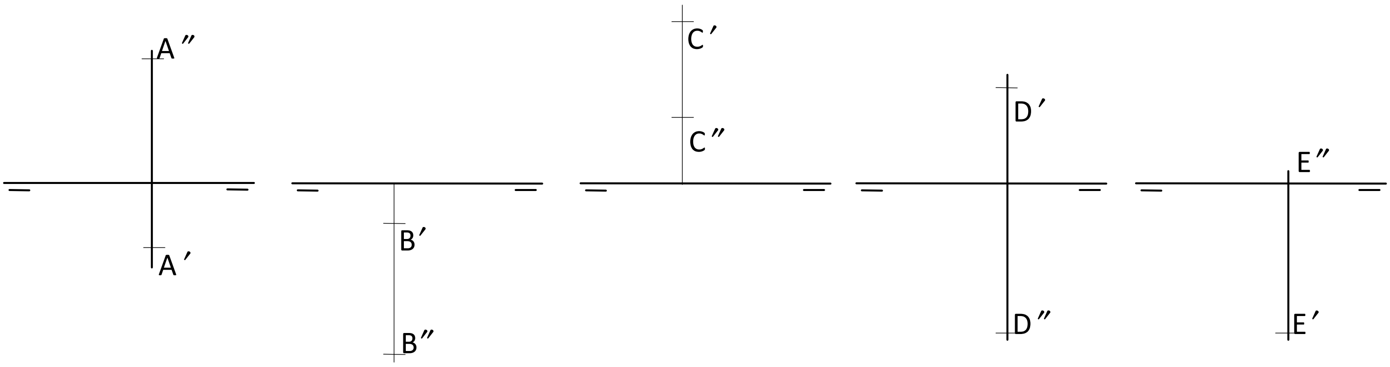
A unidade utilizada é o milímetro.

1. Representar a 1ª, 2ª e a 3ª projeções dos pontos dados.

a) A(20,30,40) b) B(50,-20,40)

c) C(30,-40,-20) d) D(40,50,-20)

2. Indicar a localização dos pontos dados nos diedros.

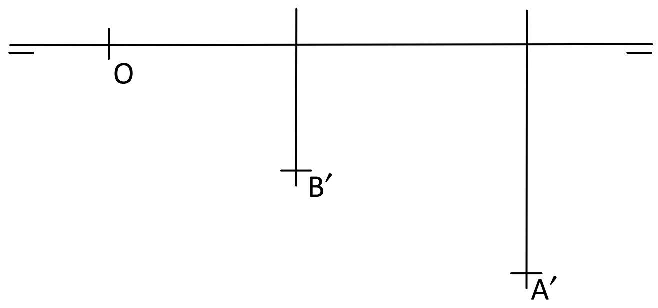


A ∈ _____ B ∈ _____ C ∈ _____ D ∈ _____ E ∈ _____

3. Representar os pontos dados. Identificar a posição do ponto em relação aos diedros ou aos planos de projeção. Representar a 3ª projeção de cada ponto.

A(20,30,10) $\in$ ______
B(50,-20,40) $\in$ ______
C(30,-40,-20) $\in$ _____
D(40,50,-10) $\in$ ______
E(10,0,30) $\in$ ________
F(60,20,0) $\in$ ________
G(15,0,-40) $\in$ _______
H(-40,30,-10) $\in$ _______
I(-10,-20,0) $\in$ _______
J(10,40,?) $\in$ π'

4. Representar um quadrado contido em π', conhecendo a primeira projeção do lado AB.



5. Representar um quadrado contido em um plano α paralelo a π', conhecendo as projeções do lado AB:
A(20,20,10) B(40,30,?)

6. Representar o paralelogramo ABCD, sendo dados os vértices A e B, e o ponto M de interseção das diagonais.
a) A(10,30,30) B(30,10,10) M(40,15,20)
b) A(10,20,-30), B(-20,30,-10) e M(20,10,30)

7. Representar um hexágono regular ABCDEF, contido em π'', conhecendo-se dois vértices.
a) A(20,?,20) e B(40,?,10)
b) A(30,?,50) e C(60,?,30)

8. Representar o triângulo ABC, dados os pontos médios dos lados.
a) M(20,35,50) N(40,60,40) P(60,50,30)
b) M(-25,30,30) N(10,60,50) P(30,25,20)

9. Representar o triângulo ABC, dados os vértices A e B e o baricentro G.
A(30,10,20) B(20,50,40) G(50,30,30).

10. Representar um quadrado contido em π' sendo dados A(20,40,?) e sabendo-se que o lado AB mede 30 e é paralelo à LT.

11. Representar os pontos A e B de π' conhecendo A(10,30,?) e B(?,50,?) e sabendo-se que AB=30.

12. Representar um triângulo equilátero ABC contido em π' de lado l=30, com o vértice A pertencente a π'' e um lado perpendicular a π''.
a) AB $\perp$ π'', A(40,?,?)
b) BC $\perp$ π'', A(30,?,?)

PARTE IV – REPRESENTAÇÃO DA RETA

1. REPRESENTAÇÃO DA RETA

Propriedade já vista: Se r é uma reta então r′ ou é uma reta (se r não for paralela à direção das projetantes d) ou um ponto (se r for paralela à direção das projetantes d)

Para obtemos a projeção de uma reta r, consideramos:
- ou dois pontos A e B pertencentes a r
- ou o seu plano projetante α

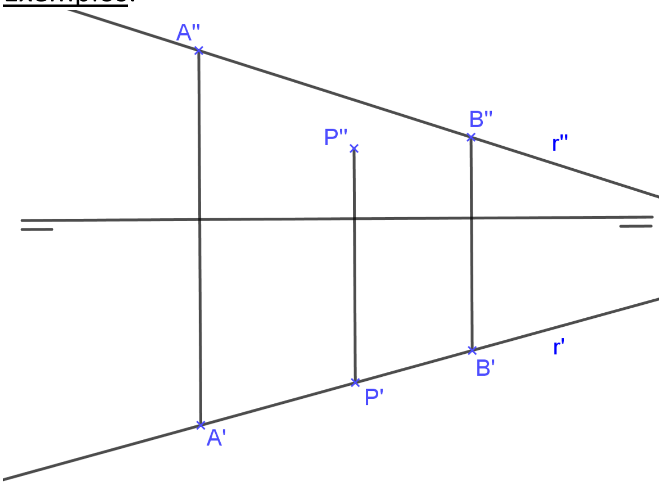
Como temos 3 PFR então há 3 projeções e, portanto, 3 planos projetantes.

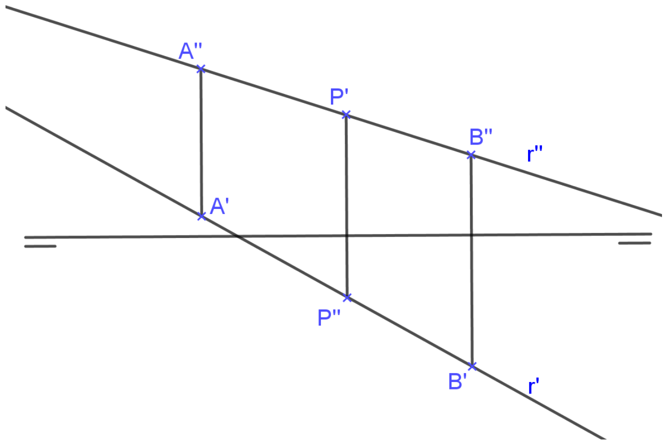
Normalmente, consideramos apenas a 1ª e a 2ª projeções da reta, pois são suficientes para determinar a 3ª projeção (exceto para a reta de perfil que veremos mais tarde).

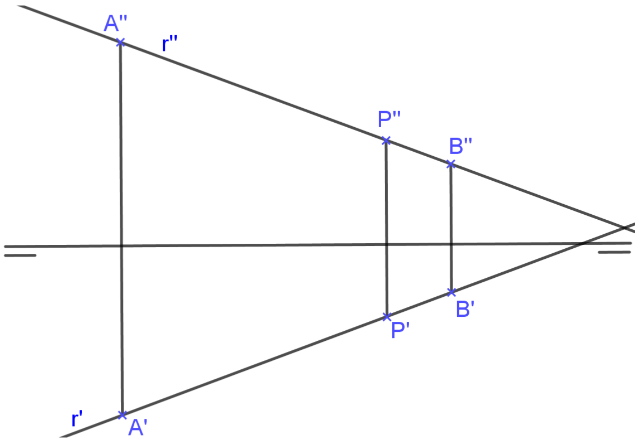
2. PONTO PERTENCENTE À RETA

$P \in r \Leftrightarrow P' \in r'$ e $P'' \in r''$
Mas se $r \,//\, \pi'''$ e $r \perp \pi'$, então também deve ser verificado se $P''' \in r'''$.

Exemplos:



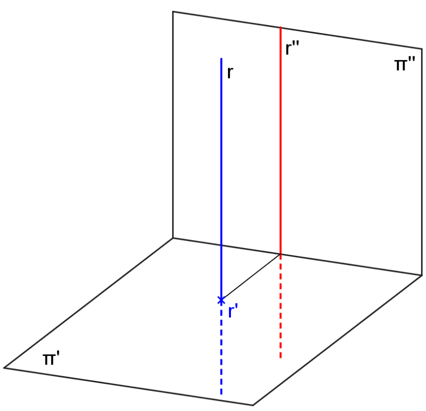




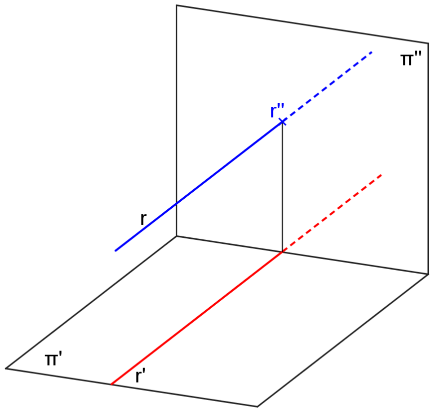
3. POSIÇÕES DA RETA EM RELAÇÃO AOS PFR

A reta pode ocupar posições distintas em relação aos 3 PFR, podendo ser:

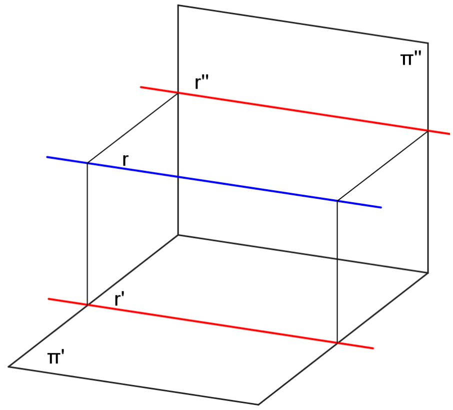
- r perpendicular a um dos PFR:



reta vertical

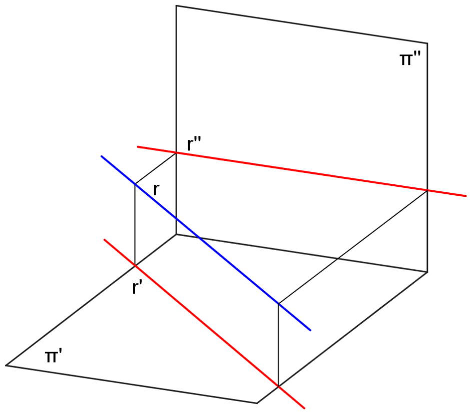


reta de topo

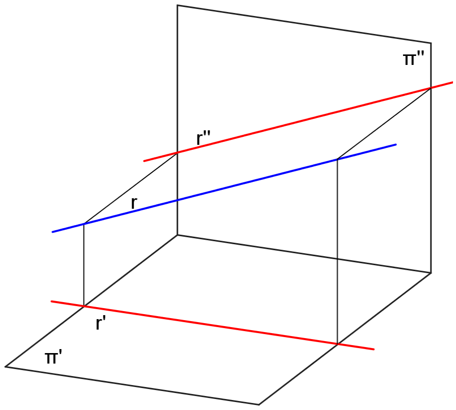


reta fronto-horizontal

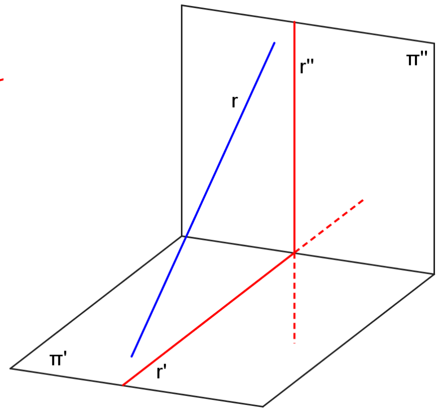
- r paralela a um dos PFR e oblíqua em relação aos outros dois PFR:



reta horizontal

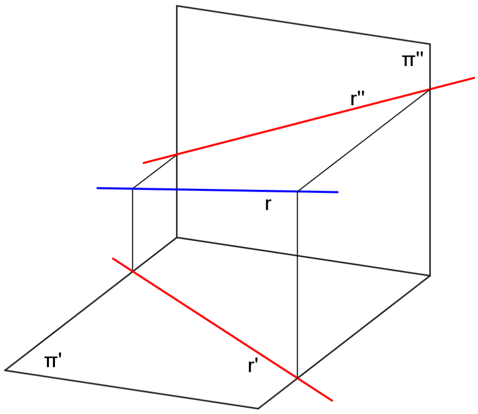


reta frontal



reta de perfil

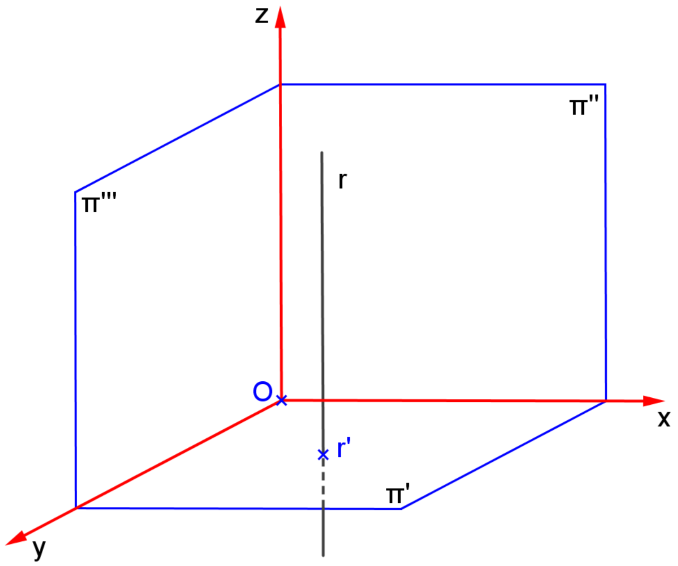
- r oblíqua em relação aos os 3 PFR:



reta qualquer

3.1. RETA VERTICAL

a) Característica espacial: ____________________ b) Épura:



c) Diedros: ___________________________

d) Ângulos:

com π′_________________

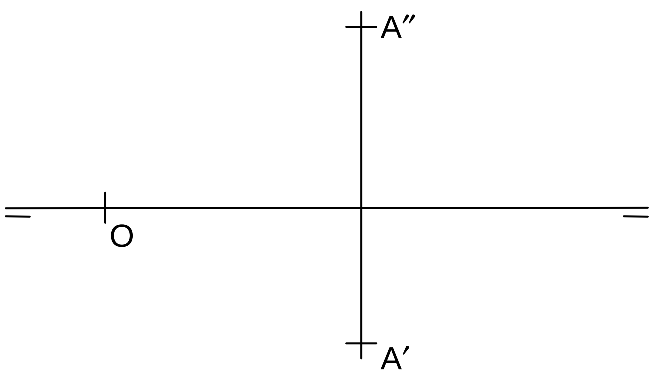
com π″ ________________

com π‴________________

e) Tem alguma projeção em VG? ______________________

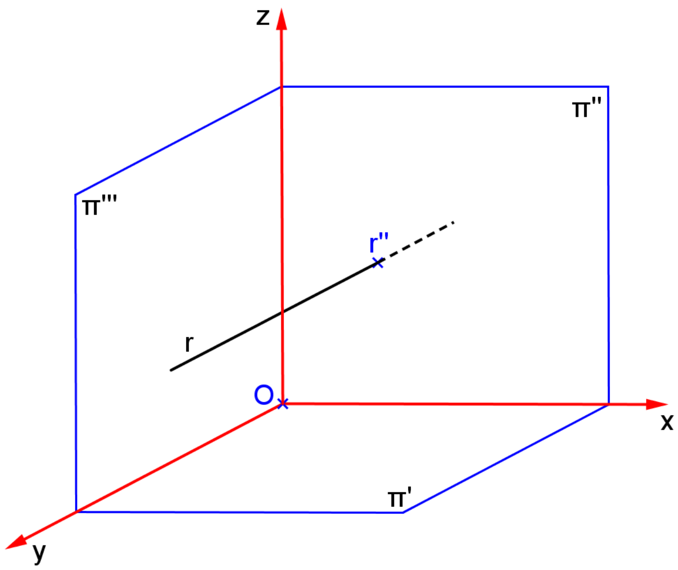
f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: _____________________

Exemplo: Representar a reta vertical r que passa pelo ponto A. Encontre as projeções do ponto pertencente a r que tem cota 10.



3.2. RETA DE TOPO

a) Característica espacial: ____________________ b) Épura:



c) Diedros: ___________________________

d) Ângulos:

com π′_________________

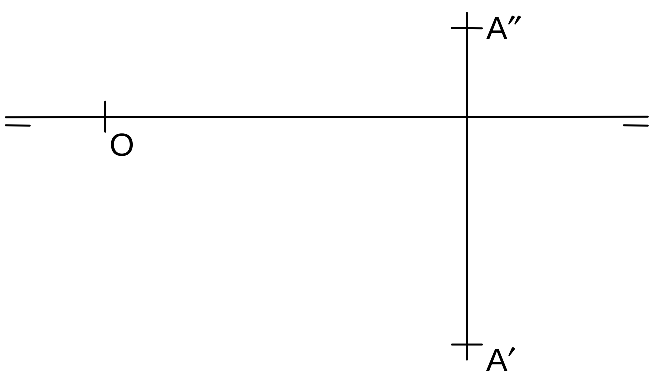
com π″_________________

com π‴_________________

e) Tem alguma projeção em VG? ______________________

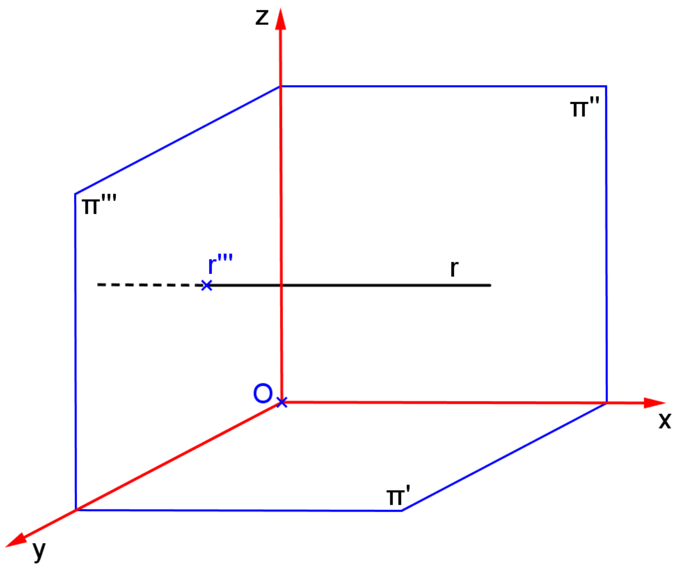
f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: _____________________

Exemplo: Representar a reta de topo r que passa pelo ponto A. Representar a reta s ∥ r que passa por B(10,10,20).



3.3. RETA FRONTO-HORIZONTAL

a) Característica espacial: ____________________



b) Épura:

c) Diedros: ___________________________

d) Ângulos:

com π′_________________

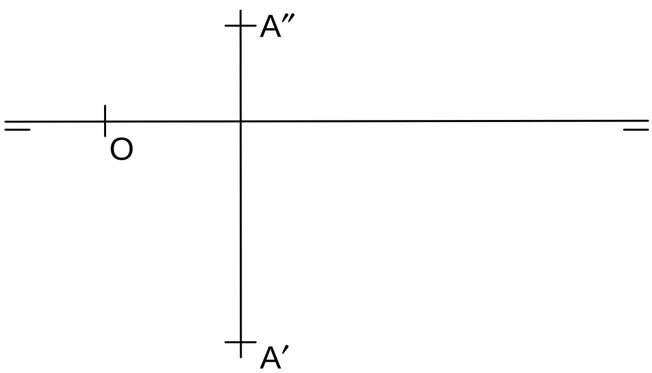
com π″_________________

com π‴_________________

e) Tem alguma projeção em VG? ______________________

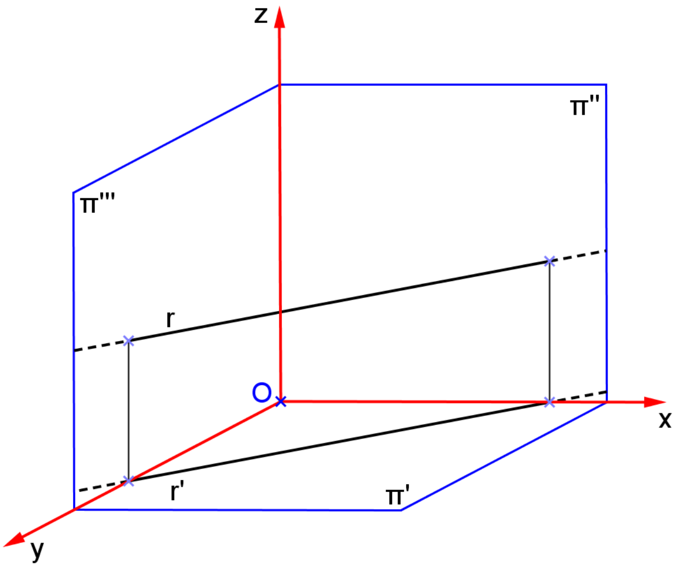
f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: _____________________

Exemplo: Representar a reta fronto-horizontal r que passa pelo ponto A. Encontre o ponto pertencente a r que abscissa 40.



3.4. RETA HORIZONTAL

a) Característica espacial: ____________________



b) Épura:

c) Diedros: ___________________________

d) Ângulos:

com π'__________________

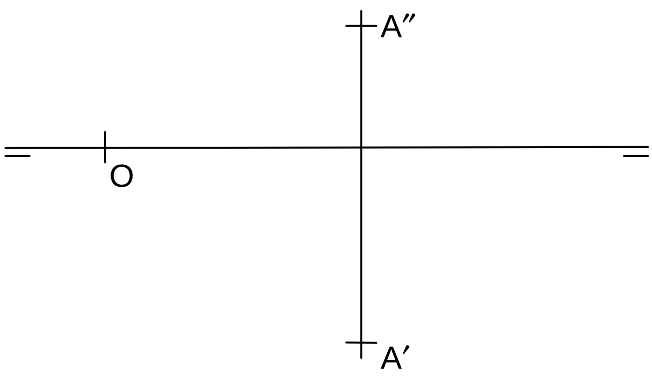
com π''__________________

com π'''__________________

e) Tem alguma projeção em VG? ______________________

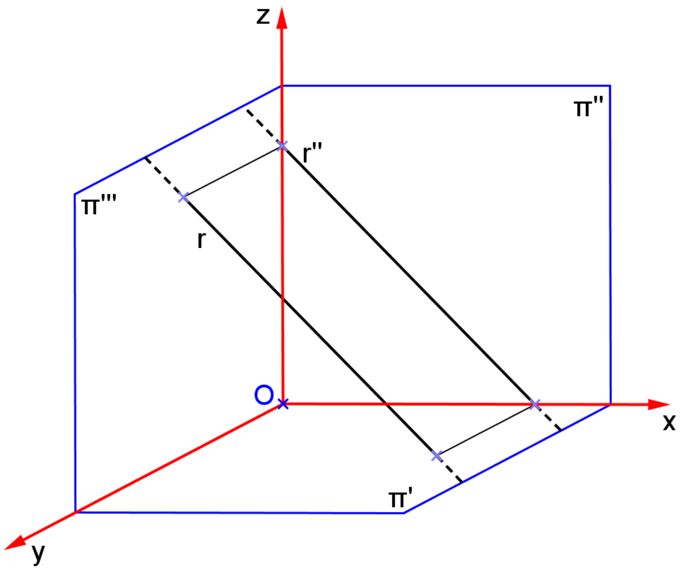
f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: _____________________

Exemplo: Representar a reta horizontal r que passa pelo ponto A e forma 60° com π''. Encontre o ponto pertencente a r que tem afastamento 0.



3.5. RETA FRONTAL

a) Característica espacial: ____________________



b) Épura:

c) Diedros: ___________________________

d) Ângulos:

com π′_________________

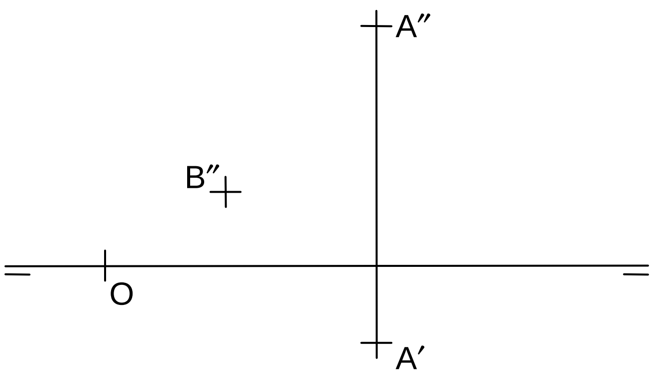
com π″_________________

com π‴_________________

e) Tem alguma projeção em VG? ______________________

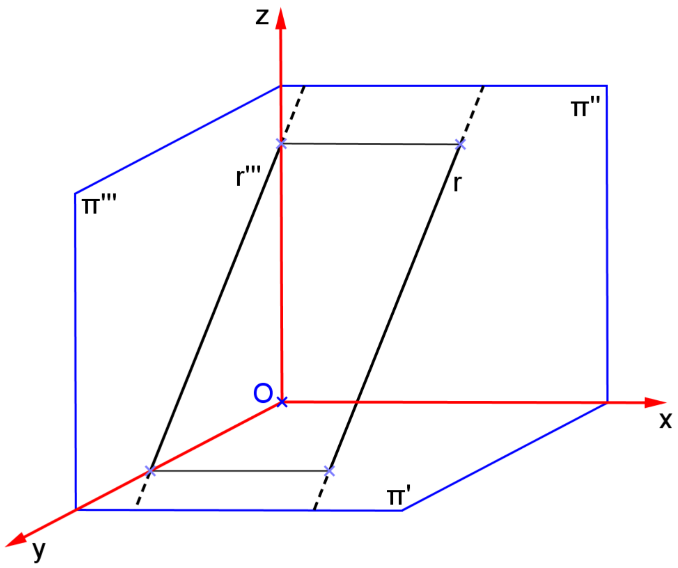
f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: _____________________

Exemplo: Representar a reta frontal r que passa pelos pontos A e B. Encontre a 1ª projeção do ponto B, e o ponto C pertencente a r que tem cota 20.



3.6. RETA DE PERFIL

a) Característica espacial: ____



b) Épura:

c) Diedros: ___________________________________

d) Ângulos:

com π′_________________

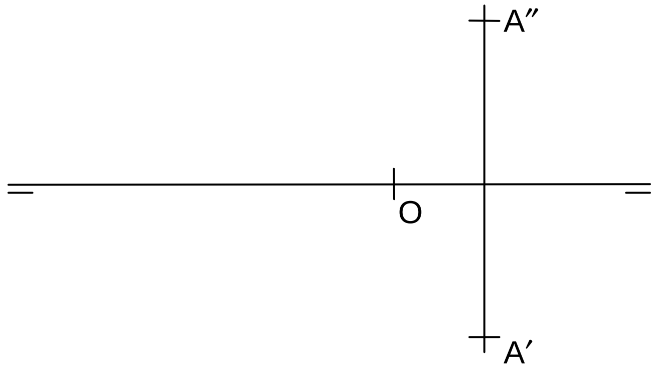
com π″_________________

com π‴_________________

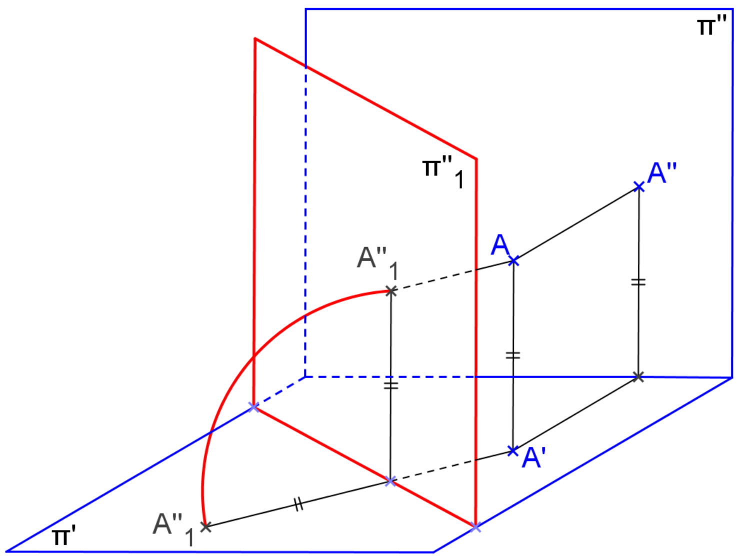
e) Tem alguma projeção em VG? ______________________

f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: ____________________

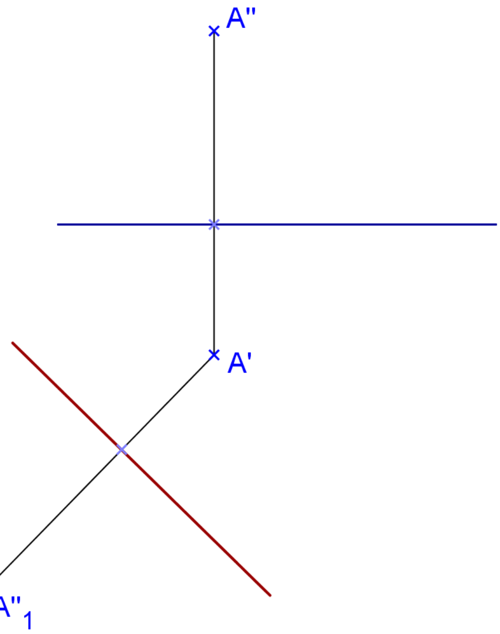
Exemplo: Representar a reta de perfil r que passa pelo ponto A e forma 60° com π'. Encontrar as projeções do ponto da reta r que tem cota 15.



Mudança de plano vertical

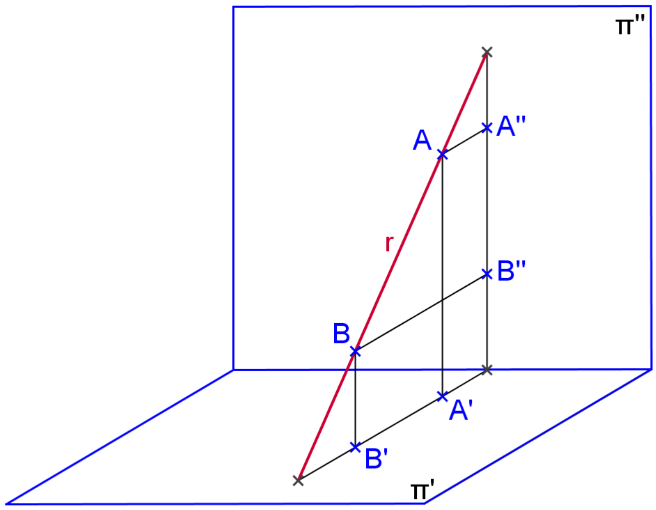


Épura:



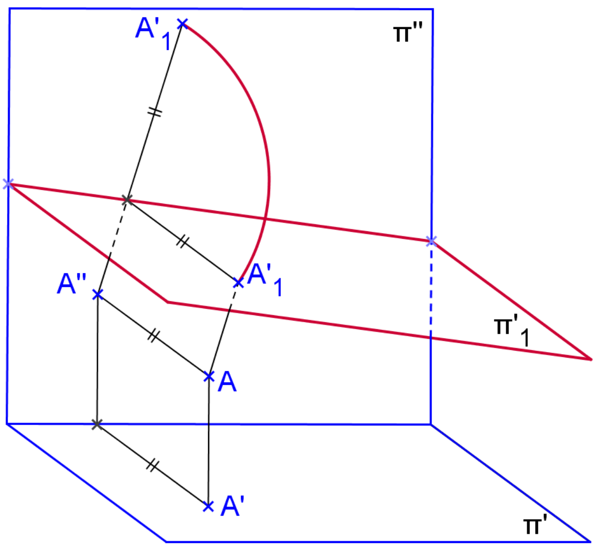
Propriedades da MPV:
- A′ é o mesmo para os dois sistemas;
- a cota é mantida no novo sistema;
- A′A″$_1$ é perpendicular à NLT.

Mudança de Plano Vertical para uma reta de perfil:

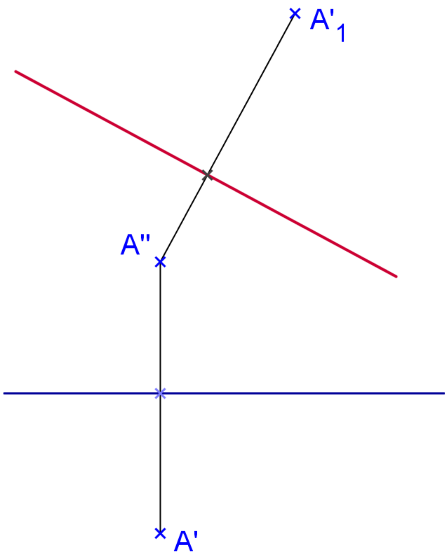


Épura:

Mudança de plano horizontal



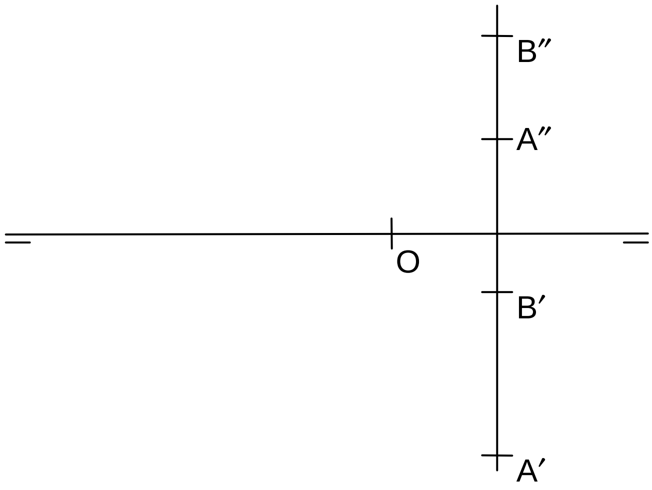
Épura:

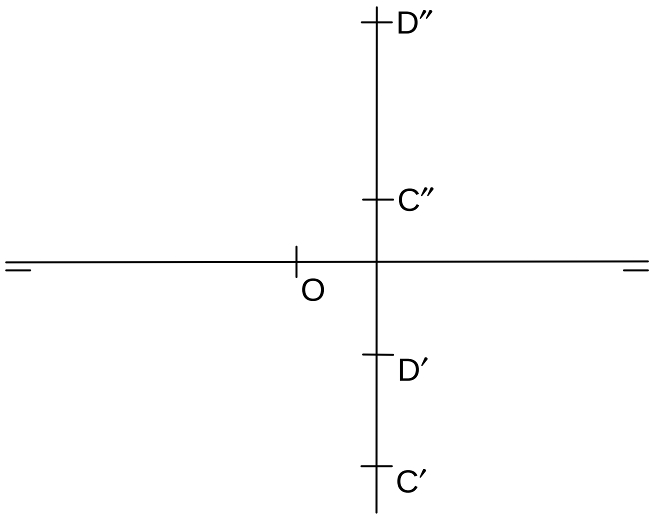


Propriedades da MPH:

- A″ é o mesmo para os dois sistemas;
- o afastamento é mantido no novo sistema;
- A″A′$_1$ é perpendicular à nova linha de terra.

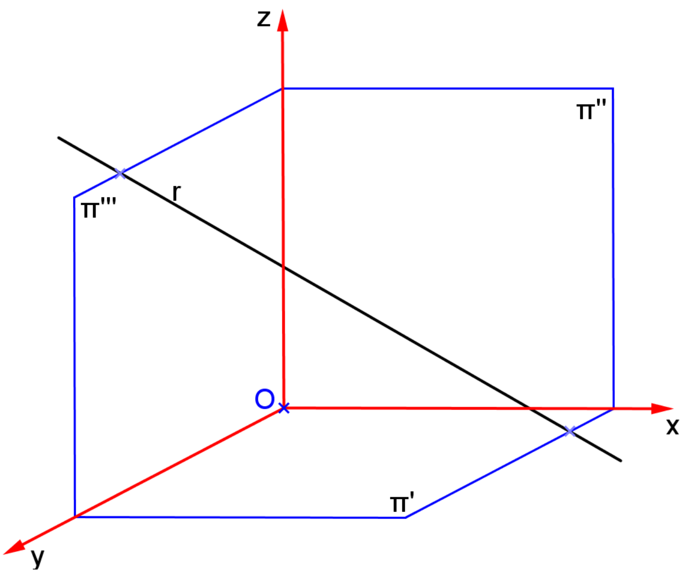
Exemplo: Encontrar as VGs dos segmentos AB e CD. Encontrar as projeções do ponto da reta r(A,B) que tem afastamento 23, e da reta s(C,D) com cota nula.





3.7. RETA QUALQUER

a) Característica espacial: ____________________ b) Épura:



c) Diedros: ___________________________

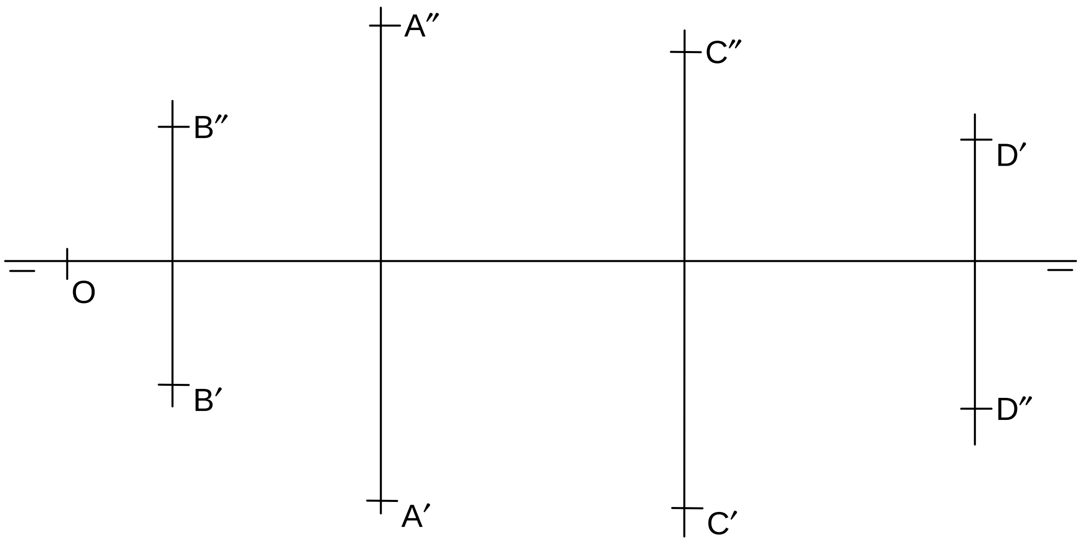
d) Ângulos:

com π′__________________

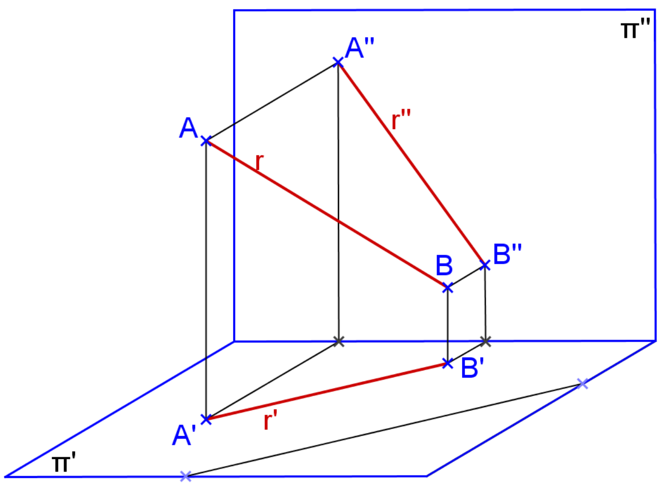
com π″__________________

com π‴__________________

Exemplo: Representar as retas r(A,B) e s(C,D). Encontrar as projeções do ponto da reta r que tem cota 15, e da reta s que tem afastamento 20.

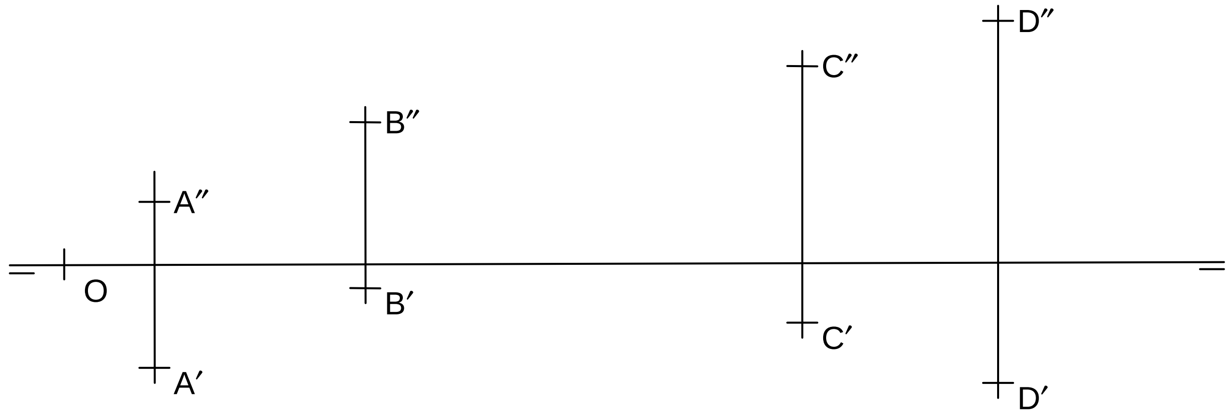


Mudança de Plano Vertical para uma reta qualquer:



Épura:

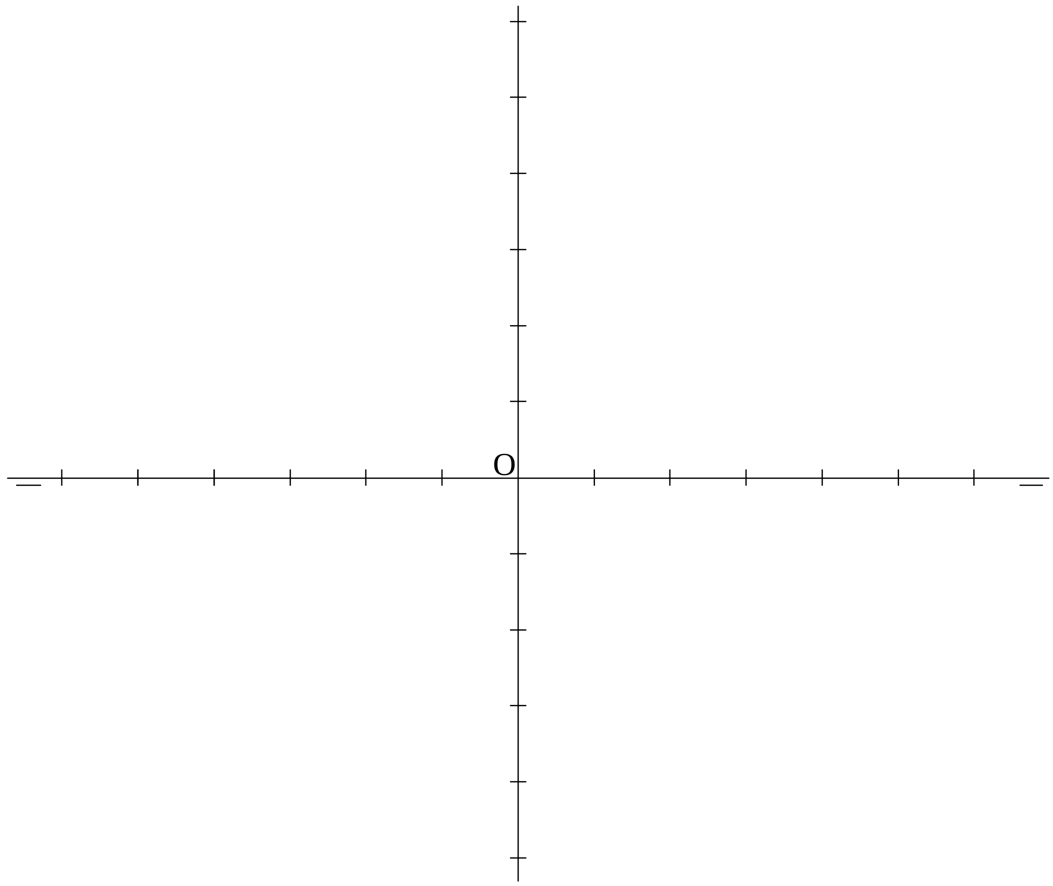
Exemplo: Representar as retas r(A,B) e s(C,D). Encontrar as projeções do ponto da reta r que tem afastamento 10, e da reta s que tem cota 40. Encontre as vgs de AB e CD.



Exercícios propostos

1. Encontrar a VG do segmento AB utilizando uma mudança de planos vertical, considerando A(10,20,40) e B(10,40,50).
2. Encontrar a VG do segmento AB utilizando uma mudança de planos horizontal, considerando A(10,40,10) e B(40,20,50).
3. Na reta r, definida pelos pontos A(20,40,10) e B(60,10,-40) representar os pontos:

C(40,?,?)
D(?,50,?)
E(?,?,-10)
F(?,-10,?)
G(?,?,0)
H(-10,?,?)
I(0,?,?)



4. Seja a reta r definida pelos pontos A e B. Representá-la, identificar o nome da reta e sua posição em relação aos PFR (paralela, oblíqua ou perpendicular).
   a) A(30,15,10), B(60,50,-15)
   b) A(20,30,20), B(20,45,20)
   c) A(20,20,30), B(20,20,45)
   d) A(10,20,-30), B(50,20,20)
   e) A(40,50,10), B(40,20,30)

5. Seja a reta r definida pelos pontos A e B. Identificar o nome da reta. Encontrar os ângulos que a reta forma com os PFR, bem como a VG do segmento AB.
   a) A(0,-20,-10), B(50,20,-10)
   b) (30,-10,-40), B(30,20,-40)
   c) A(50,20,15), B(70,30,35)
   d) A(30,-30,-10), B(30,-30,20)
   e) A(20,-20,-30), B(50,-20,-30)
   f) A(30,10,50), B(30,-30,-15)
   g) A(20,10,0), B(40,10,30)

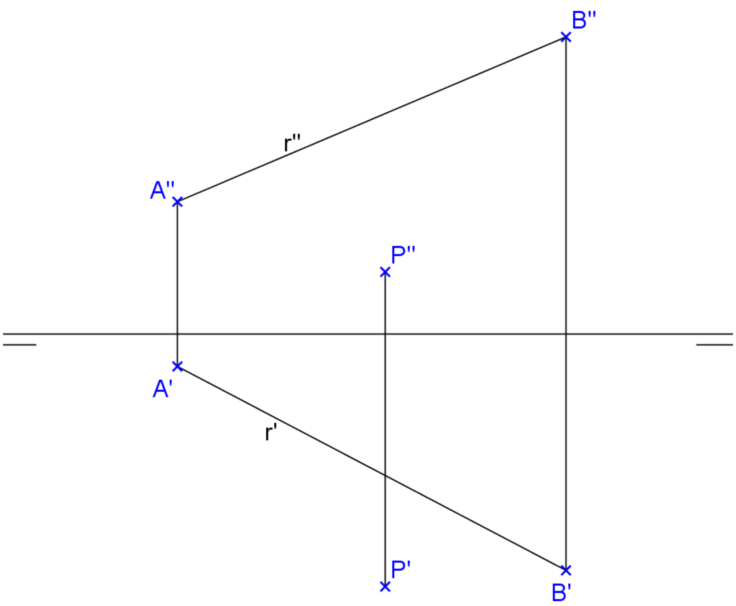
6. Representar as retas horizontais que passam pelo ponto dado A e que formem ângulo dado com um dos PFR.
   a) A(10,30,40), $\theta''' = 30^o$
   b) A(10,30,40), $\theta'' = 30^o$

7. Representar as retas frontais que passem pelo ponto dado A e que formem ângulo dado com um dos PFR.
   a) A(10,-40,-60), $\theta' = 15^o$
   b) A(10,30,40), $\theta''' = 30^o$

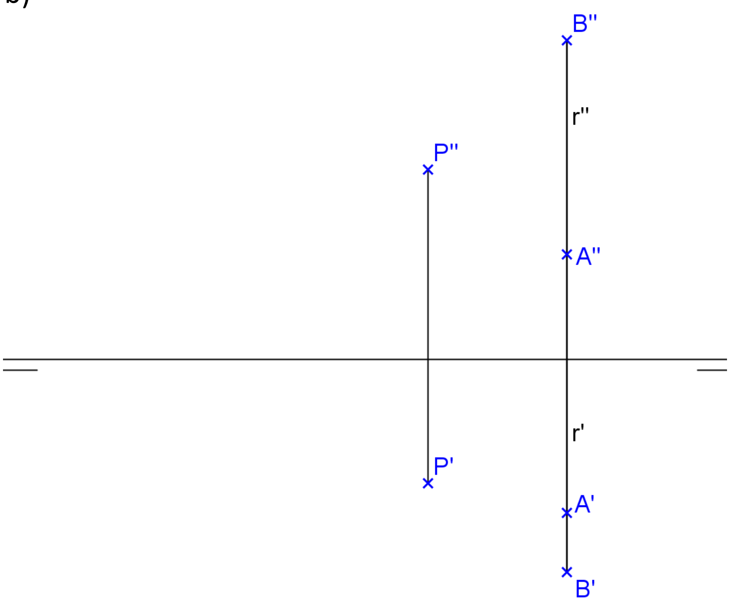
8. Representar as retas de perfil que passam pelo ponto dado A e que formam ângulo dado com um dos PFR. Utilize mudança de plano vertical ou horizontal.
   a) A(50,10,-20), $\theta' = 30^o$
   b) A(20,25,10), $\theta' = 60^o$

9. Encontre as projeções da reta s, paralela à reta r, que passa por P:

a)

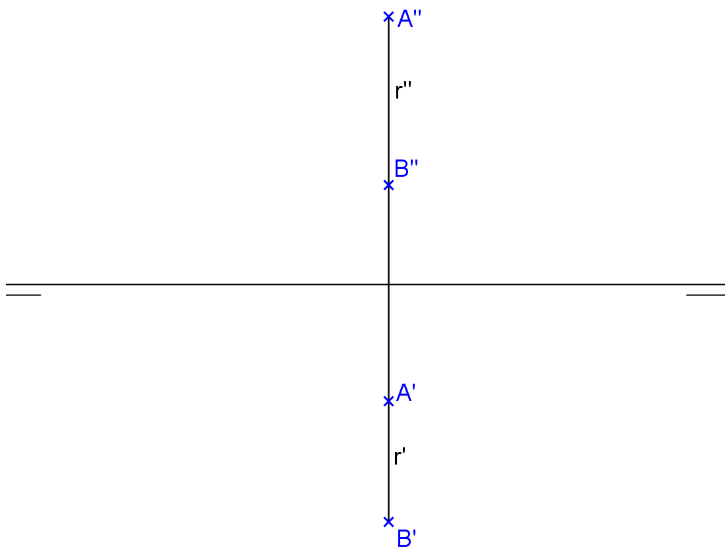


b)

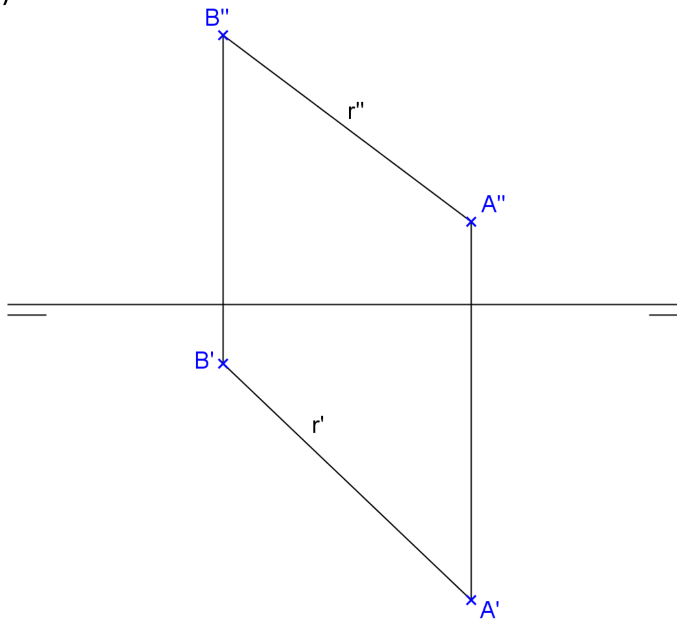


10. Encontre a verdadeira grandeza do segmento AB contido na reta r. Determine a verdadeira grandeza do ângulo que a reta r forma com π'.

a)

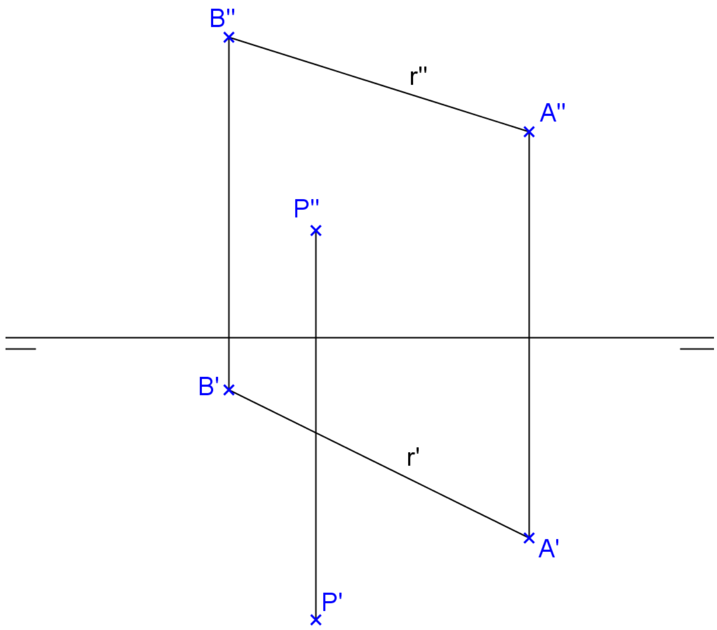


b)

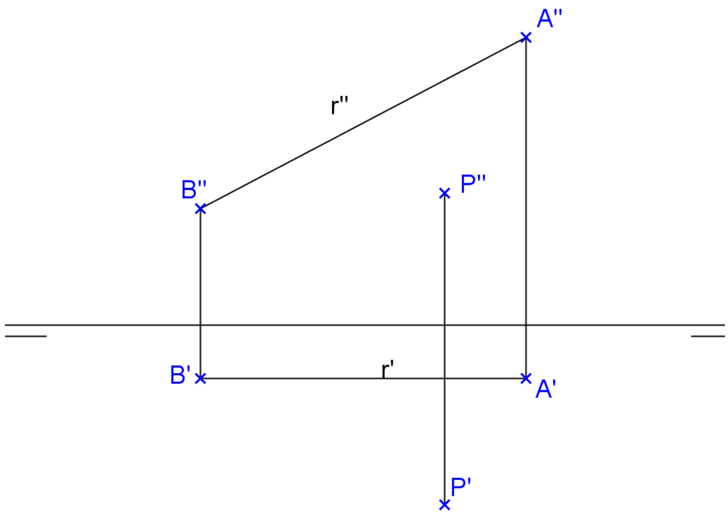


11. Encontre as projeções da reta s, ortogonal à reta r, que passa por P, e é do tipo:

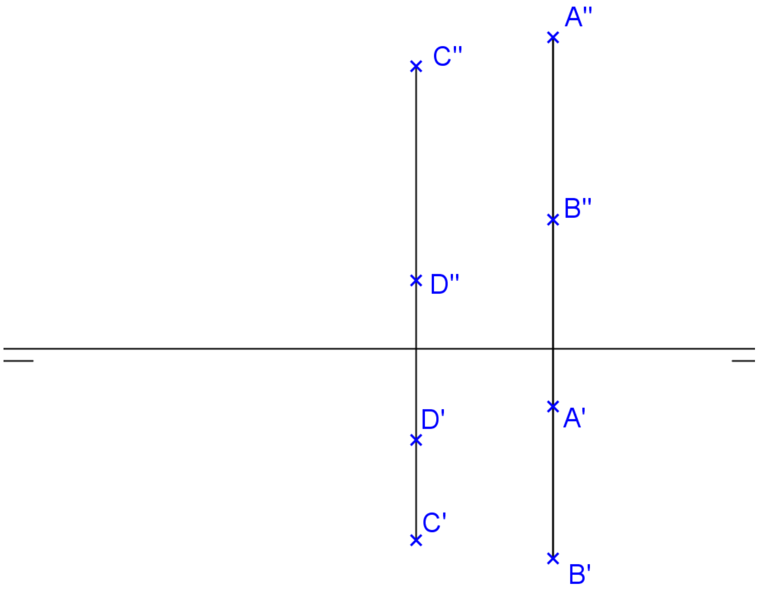
a) horizontal

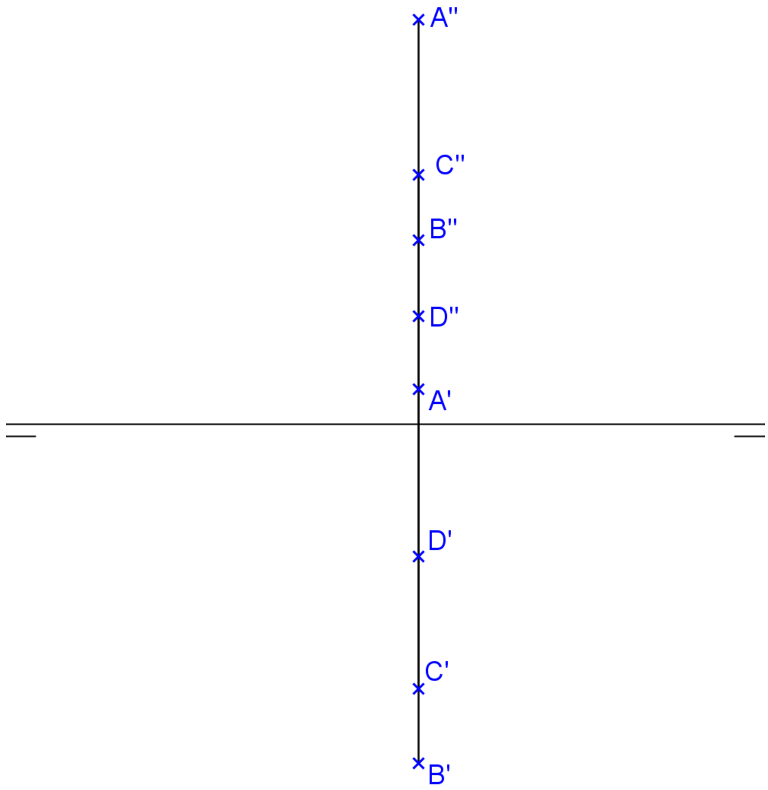


b) frontal



12. Determine se as retas de perfil r(A,B) e s(C,D) são paralelas, concorrentes ou reversas:





PARTE V – REPRESENTAÇÃO DO PLANO

1. REPRESENTAÇÃO DO PLANO

Um plano está determinado por:
- 3 pontos não colineares
- 1 ponto e uma reta que não se pertencem
- duas retas concorrentes ou paralelas

Exemplos:

2. PERTINÊNCIA DE PONTO E RETA A UM PLANO

2.1. Pertinência de reta a plano

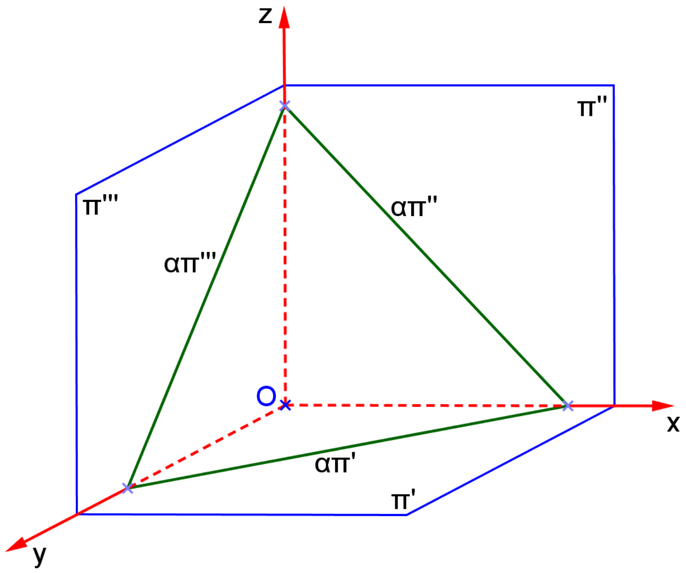
$$r \subset \alpha \iff \begin{cases} r \text{ X } a,\ r \text{ X } b,\ \text{onde } a,b \subset \alpha \\ r \text{ X } a,\ r \parallel b,\ \text{onde } a,b \subset \alpha \end{cases}$$

2.2. Pertinência de ponto a plano

$$P \in \alpha \iff P \in r \text{ e } r \subset \alpha$$

3. REPRESENTAÇÃO DO PLANO PELOS SEUS TRAÇOS

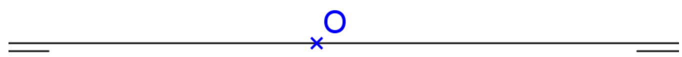
No espaço:



Os traços de α são:

$\alpha\pi'$ – 1º traço ou traço horizontal
$\alpha\pi''$ – 2º traço ou traço vertical
$\alpha\pi'''$ – 3º traço ou traço lateral

Em épura:

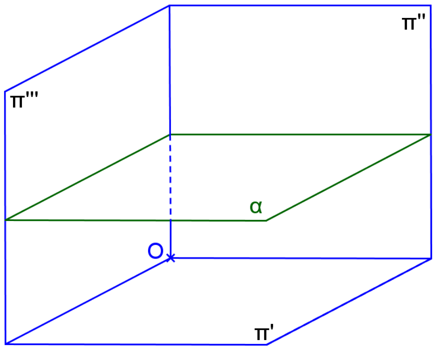


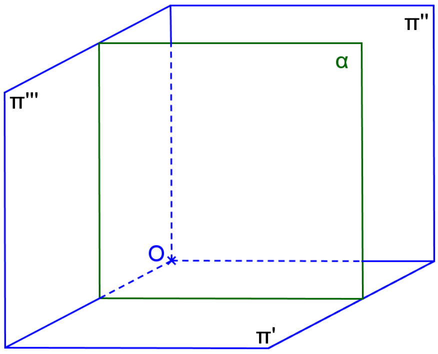
<u>Propriedade</u>: ou $\alpha\pi'$ intercepta $\alpha\pi''$ num ponto que pertence à linha de terra, ou os traços $\alpha\pi'$ e $\alpha\pi''$ são paralelos à linha de terra.

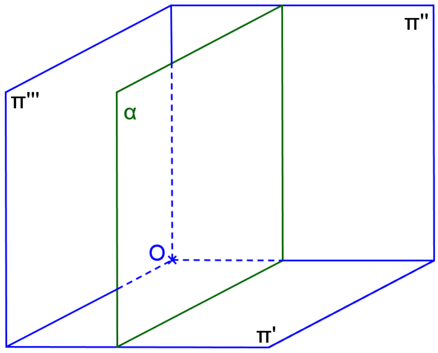
4. POSIÇÕES DO PLANO EM RELAÇÃO AOS PFR

Um plano α pode ocupar posições distintas em relação aos 3 PFR, podendo ser:

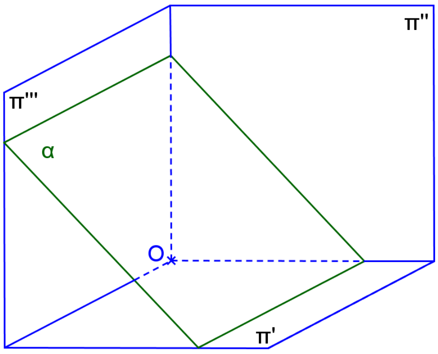
- α paralelo a um dos PFR:

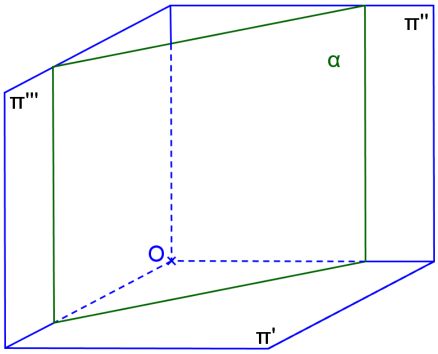


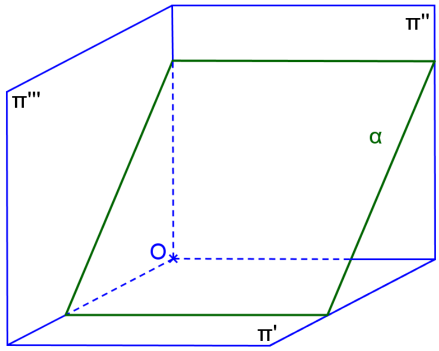




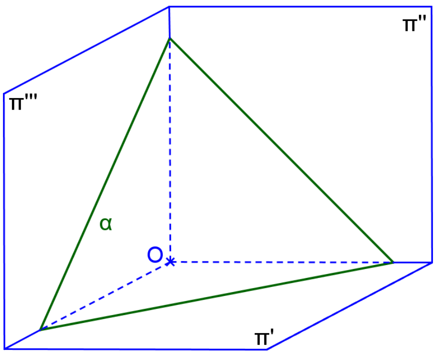
- α perpendicular a um dos PFR e oblíquo em relação a outro:





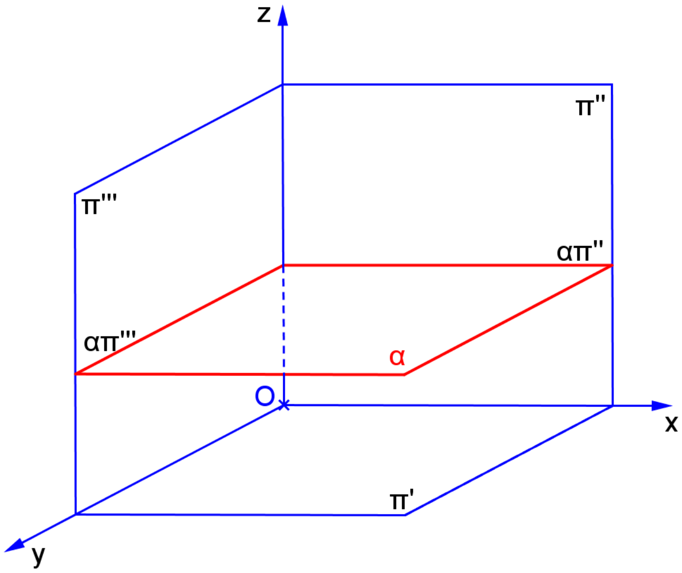


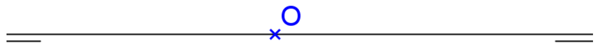
- α oblíquo em relação aos PFR:



4.1. PLANO HORIZONTAL

a) Característica espacial: ____________________ b) Épura:





c) Traços: ________________
____
____

d) É plano projetante? ____

e) Tem alguma projeção em VG? ____

f) Retas contidas no plano: ____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: __________________________________

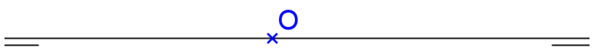
h) Ângulos:

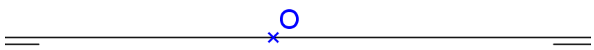
com π' __________________

com π'' __________________

com π''' __________________

i) Traço de reta no plano: j) Reta perpendicular ao plano:





Exercícios

1. Representar um quadrado ABCD contido num plano horizontal α, dados A(10,10,20) e B(40,20,?).

2. Representar um hexágono regular ABCDEF contido num plano horizontal α, dados o centro O(30,30,20) da circunferência circunscrita ao polígono e o seu raio r = 20, e sabendo que um de seus lados é fronto-horizontal.

3. Representar um hexágono regular ABCDEF contido num plano horizontal α sendo dados o centro O(40,30,10) da circunferência circunscrita ao polígono e o seu raio r = 20, sabendo que um de seus lados forma ângulo de 15^o com π''.

Visibilidade de um sólido

O contorno aparente é obtido pelas projetantes razantes ao sólido (aquelas que estão projetando os pontos mais afastados do objeto).
Este contorno aparente divide o sólido em duas partes, uma visível e outra não visível.

Critérios de visibilidade:

1^o O contorno aparente é sempre visível.

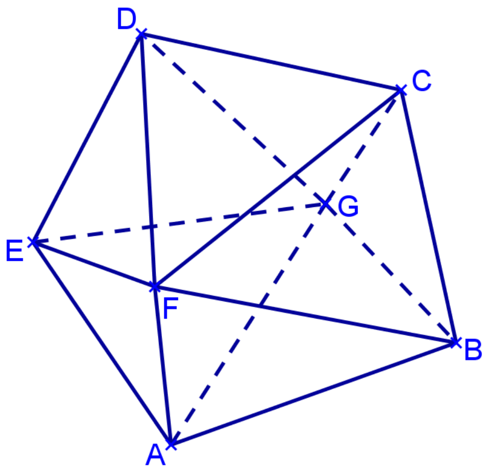
2^o Uma face que contém um ponto visível é visível.

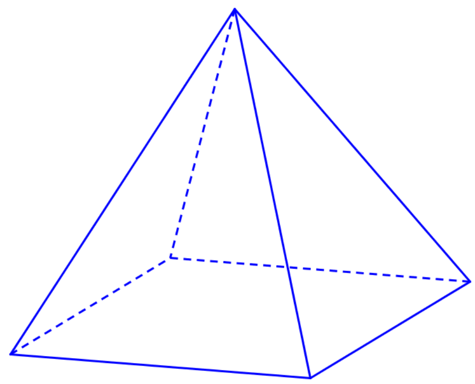
3^o Uma aresta que contém um ponto visível é visível.

4^o Duas faces que tem uma aresta comum pertencente ao contorno aparente são uma visível e outra não visível.

5º Duas arestas que tem um vértice comum não pertencente ao contorno aparente são ambas visíveis ou invisíveis, depende se o vértice é ou não visível.

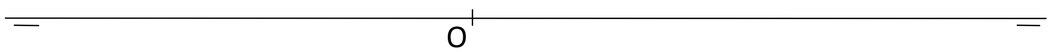
6º Dois pontos que têm a mesma projeção são um visível e outro invisível.





Exercícios

1. Representar uma pirâmide reta de base hexagonal ABCDEF, contida em um plano horizontal α, com altura h = 50, dados A(10,10,00) e B(-30,00,00).



2. Representar uma pirâmide reta de base quadrada ABCD contida em um plano α horizontal, de altura h=50, dados A(10,20,00) e B(40,10,?).

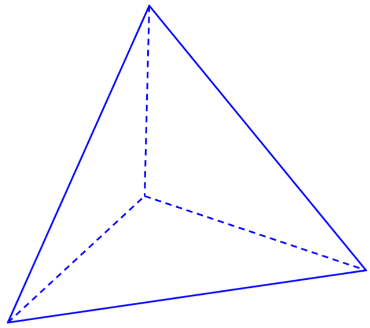
O

3. Representar uma pirâmide V-ABCD com base quadrangular contida em um plano horizontal α, dados V(60,10,60), A(20,00,10) e B(40,20,?)

O

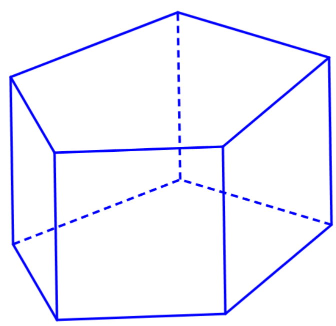
4. Representar um tetraedro regular ABCD, com a face ABC contida em um plano horizontal, dados os vértices A(10,20,00) e B(50,60,?).

O



5. Representar um prisma reto de base triangular ABC contida num plano horizontal α, de altura h=40, sendo dados o centro da base O(30,30,10) e o vértice A(10,10,10).

O

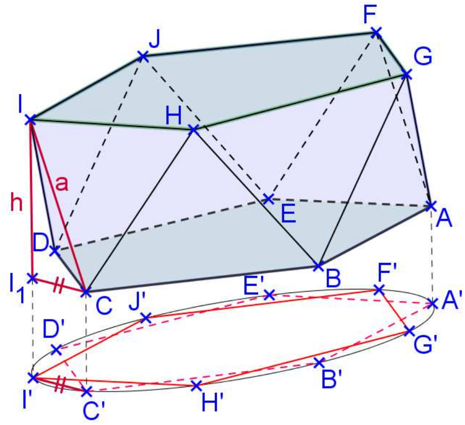


6. Representar um prisma quadrangular ABCD-EFGH, com uma base contida em um plano horizontal α, dados os vértices A(10,30,00), B(40,10,?) e E(70,20,30).

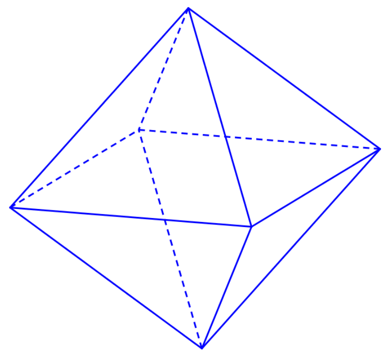
O

7. Representar um anti-prisma arquimediano com a base ABCDEF hexagonal e contida em um plano horizontal, dados os vértices A(20,50,40) e B(50,60,40).

O



8. Representar um octaedro regular ABCDEF, com seção equatorial ABCD contida em um plano horizontal, dados os vértices A(10,10,30) e B(50,00,30).



O

9. Representar um octaedro regular ABCDEF, com a face ABC contida em um plano horizontal, dados os vértices A(10,40,10) e B(60,50,10).

O

Exercícios propostos

1. Representar as projeções de um pentágono regular contido em um plano horizontal, dado o lado AB: A(10,10,10), B(40,30,?)

2. Representar as projeções do prisma oblíquo de base hexagonal regular, dados em posição a aresta de uma das bases (AB) e a aresta lateral (AG): A(30,30,10), B(20,60,10), G(70,10,60). Encontre a verdadeira grandeza de uma das arestas laterais.

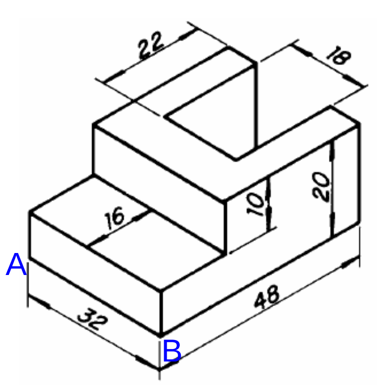
3. Representar as projeções do tetraedro regular com uma face sobre um plano horizontal, sabendo-se que a aresta AB mede 50mm e forma 45^{o} com π'': A(50,40,20).

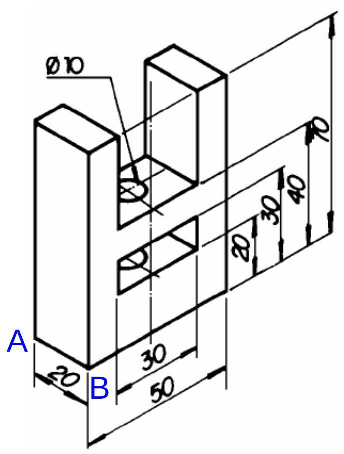
4. Representar as projeções do anti-prisma arquimediano pentagonal com a face ABCDE sobre um plano horizontal: A(50,20,10), B(20,40,10).

5. Representar as projeções do icosaedro regular de aresta AB horizontal e sabendo-se que uma das diagonais principais é perpendicular a π': A(20,40,30), B(50,20,30).

6. Representar as projeções da pirâmide oblíqua de base pentagonal regular contida num plano horizontal, dado o vértice principal V, o vértice da base A e sabendo-se que a aresta AB forma 60^{o} com π'': A(20,40,10), V(70,60,50), AB = 30.

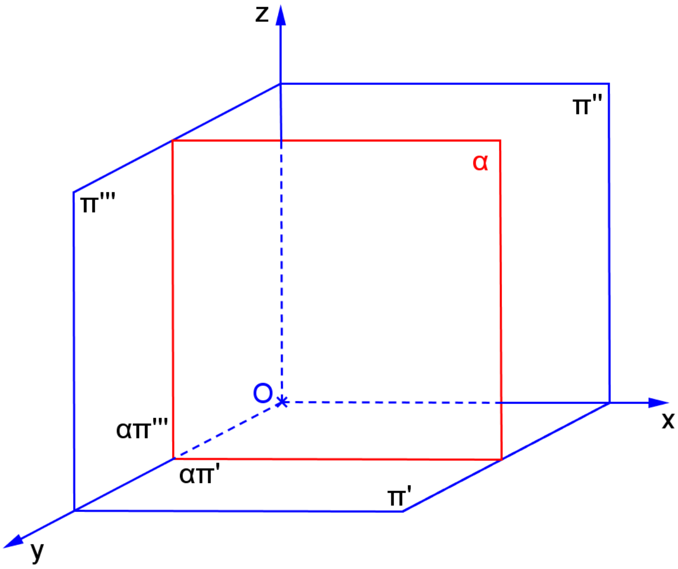
7. Considerando as peças abaixo em perspectiva e os pontos A e B determinando as bases das peças sobre planos horizontais, construa as projeções destas peças em épuras diferentes considerando as seguintes coordenadas de A e B:
   7.1. A(00,10,10) e B(00,?,10)
   7.2. A(00,10,15), onde AB forma 60^{o} com π''



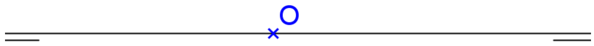


4.2. PLANO FRONTAL

a) Característica espacial: ____________________



b) Épura:



c) Traços: ________________
____
____

d) É plano projetante? ____

e) Tem alguma projeção em VG? ____

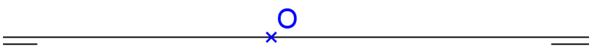
f) Retas contidas no plano: ____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: _________________________________

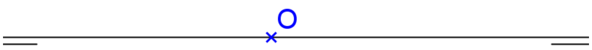
h) Ângulos:

com π' __________________
com π'' __________________
com π''' __________________

i) Traço de reta no plano:

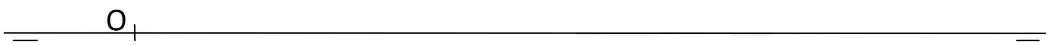


j) Reta perpendicular ao plano:

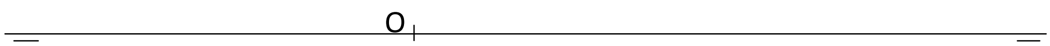


Exercícios

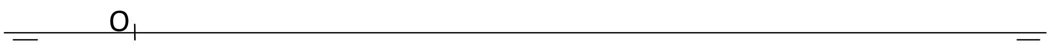
1. Representar um hexágono regular ABCDE contido num plano frontal α sendo dados o centro O(40,10,45) da circunferência circunscrita ao polígono e o seu raio r = 40, sabendo que um de seus lados forma ângulo de 30^{o} com π'.



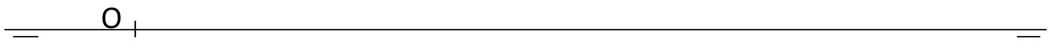
2. Representar uma pirâmide dupla, de altura h=20, com seção equatorial hexagonal em um plano frontal, dados os vértices do hexágono A(10,30,20), B(-10,30,00).



3. Representar uma pirâmide hexagonal regular V-ABCDEF, com base sobre um plano frontal, e altura h=50, dados A(10,00,30), B(30,?,10).



4. Representar um prisma arquimediano de base pentagonal ABCDE contida em um plano frontal, dados 2 vértices consecutivos A(20,10,00) e B(50,?,20).



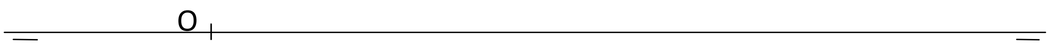
5. Representar um tetraedro regular ABCD com uma face contida em um plano frontal, dados A(10,10,20) e B(50,?,60).

O

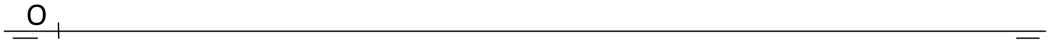
6. Representar um cilindro circular reto com a base de centro O apoiada num plano frontal, dados: O(-10,10,30), r=30, h=40.

O

7. Representar um cilindro circular oblíquo com as bases apoiadas em planos frontais, dados os centros das bases O(-20,10,20) e P(50,40,40), e r=20.

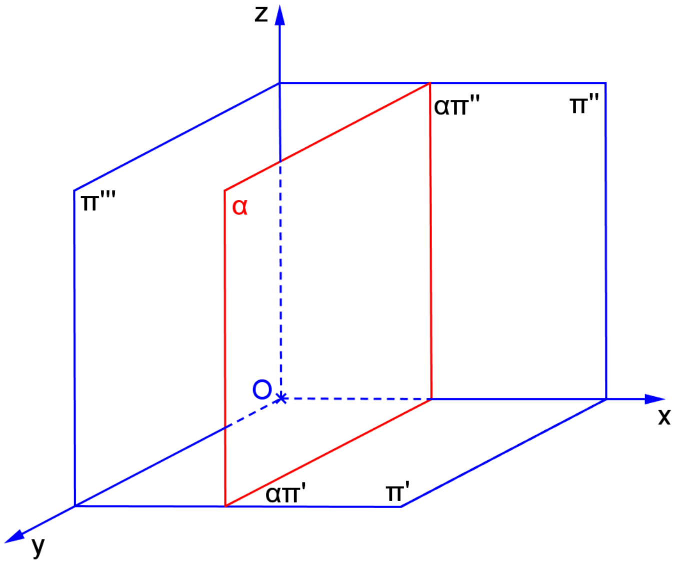


8. Representar um cone circular oblíquo com a base apoiada em um plano frontal, dados o centro da base O(20,00,30) o vértice V(70,60,60), e r=20.

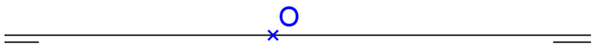


4.3. PLANO DE PERFIL

a) Característica espacial: ____________________



b) Épura:



c) Traços: ________________
____
____

d) É plano projetante? ____

e) Tem alguma projeção em VG? ____

f) Retas contidas no plano: ____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: _________________________________

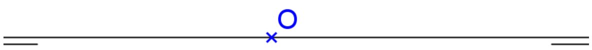
h) Ângulos:

com π' __________________

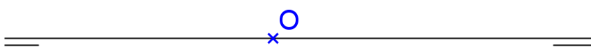
com π'' __________________

com π''' __________________

i) Traço de reta no plano:

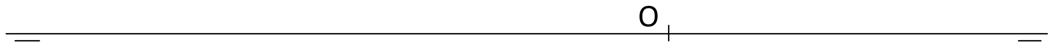


j) Reta perpendicular ao plano:

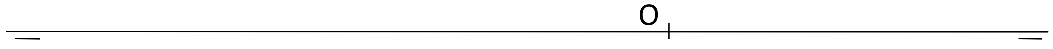


Exercícios

1. Representar um triângulo equilátero ABC contido em um plano α de perfil, dados A(30,20,10) e B(?,35,50).



2. Representar uma pirâmide dupla, com altura h=40, base quadrada, dados os vértices da seção equatorial A(30,10,20) e B(30,20,40).



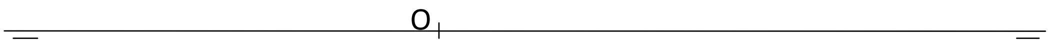
3. Representar um prisma quadrangular regular ABCD-EFGH com as bases contidas em planos de perfil, dados A(50,20,40) e B(?,10,20), e h=40.

O

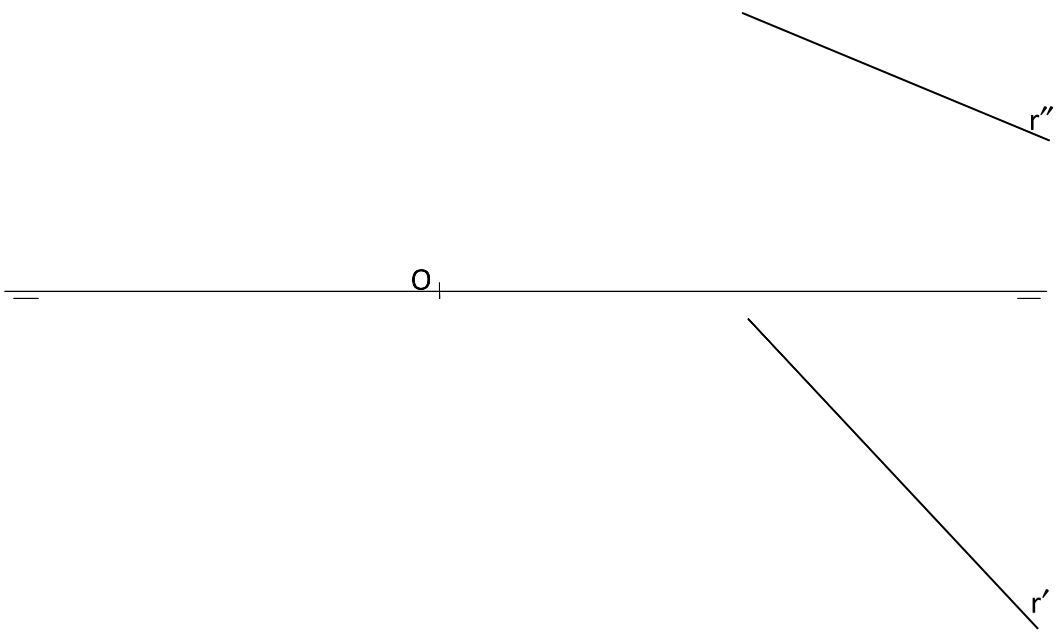
4. Representar uma pirâmide hexagonal regular V-ABCDEF com a base em um plano de perfil, dados A(10,00,30), B(?,20,10) e altura h=50.

O

5. Representar as projeções da pirâmide oblíqua de base hexagonal contida em um plano de perfil, dados os vértices da base A e B e o vértice principal V: A(70,30,20), B(70,10,25), V(-10,45,05). Representar a seção plana nesta pirâmide por um plano horizontal de cota 15.



6. Representar as projeções do prisma oblíquo de base quadrada contida em um plano de perfil, dados os vértices da base A e B e a reta r paralela às arestas laterais do prisma: A(10,15,20), B(10,30,40) e h=40. Representar a seção plana no prisma por um plano frontal de afastamento 25.



7. Representar as projeções do cilindro circular oblíquo com as bases contidas em planos de perfil, dados os centros das bases P e Q e o raio 11. Representar as projeções da seção plana neste cilindro feita pelo plano horizontal de cota 20: P(25,25,45), Q(70,35,00)

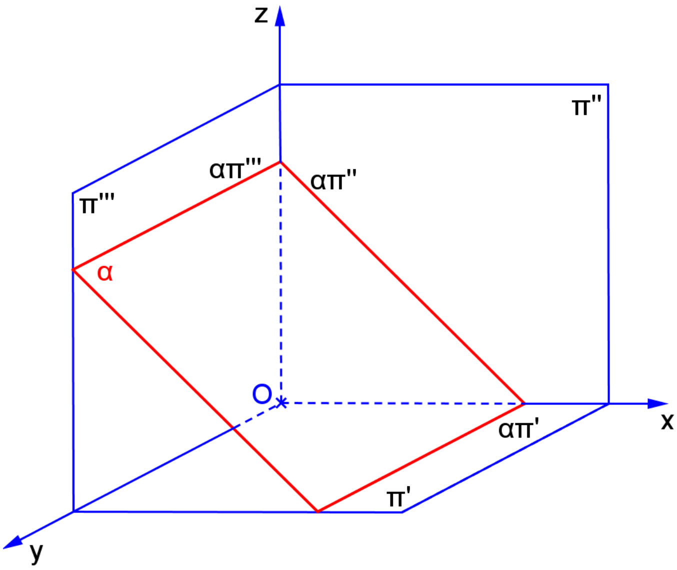
O

8. Representar as projeções de uma esfera de raio 20, sabendo-se que os segmentos AB e CD representam as projeções da seção plana da esfera por um plano de perfil: A(50,20,40), B(50,20,20), C(50,10,30), D(50,30,30). Representar as projeções da seção plana nesta esfera com um plano horizontal de cota 45.

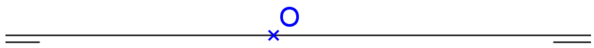
O

4.4. PLANO DE TOPO

a) Característica espacial: ____________________



b) Épura:



c) Traços: ________________
____
____

d) É plano projetante? ____

e) Tem alguma projeção em VG? ____

f) Retas contidas no plano: ____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: __________________________________

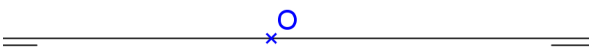
h) Ângulos:

com π' __________________

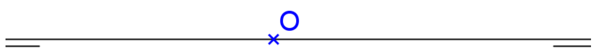
com π'' __________________

com π''' __________________

i) Traço de reta no plano:

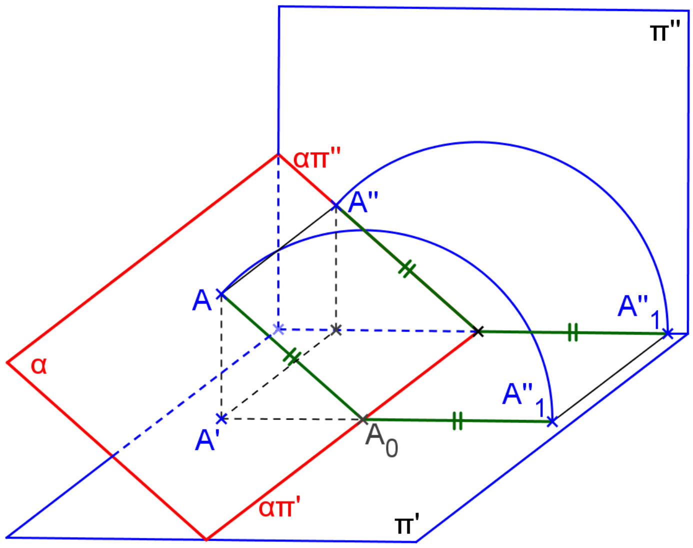


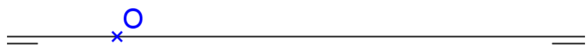
j) Reta perpendicular ao plano:



Processo do rebatimento

Rebatimento sobre π'

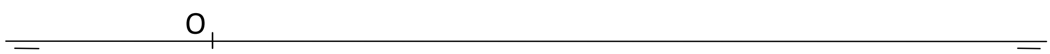




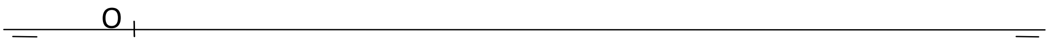
Rebatimento sobre um plano horizontal: basta considerar um plano β horizontal e usar $(\alpha\beta)$ como eixo do rebatimento, ou seja, utilizar $(\alpha\beta)'$ como se fosse $\alpha\pi'$.

Exercícios

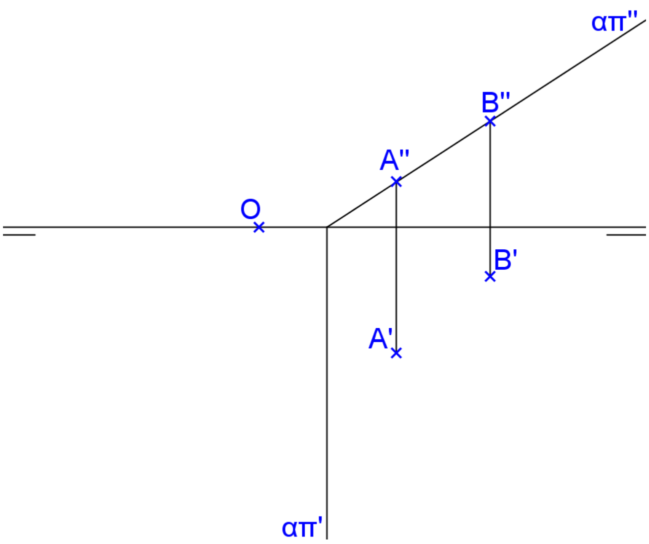
1. Representar o plano de topo α pertencente ao ponto A(50,30,40) e que forma ângulo de 60° com π'.



2. Representar um quadrado ABCD contido num plano α de topo, sendo dados A(40,40,10) e B(20,20,30).



3. Representar um hexágono regular ABCDEF contido no plano de topo dado por seus traços, conhecendo-se as projeções dos vértices A e B.



4. Representar uma pirâmide regular quadrangular V-ABCD com a base apoiada em um plano α de topo que passa pela origem e forma 45^o com π', dados A(10,20,?) e B(30,00,?), h=50.

O

5. Representar um prisma quadrangular oblíquo ABCD-EFGH com as bases contidas em planos de topo, dados A(30,20,10), B(50,00,20) e G(25,35,45). Representar a seção feita neste sólido por um plano de topo que passa pela origem e forma 45^o com π'.

O

Seções planas

Nos problemas 6, 7, 8, 9, 10 e 11 considere o mesmo plano de topo γ que passa por Z(70,0,0) e forma 30° com π':

6. Representar a seção plana feita com o plano γ na pirâmide do exercício 2 da página 44. Encontre a vg da seção e planifique o sólido.

7. Representar a seção plana feita com o plano γ na pirâmide do exercício 3 da página 44. Encontre a vg da seção e planifique o sólido.

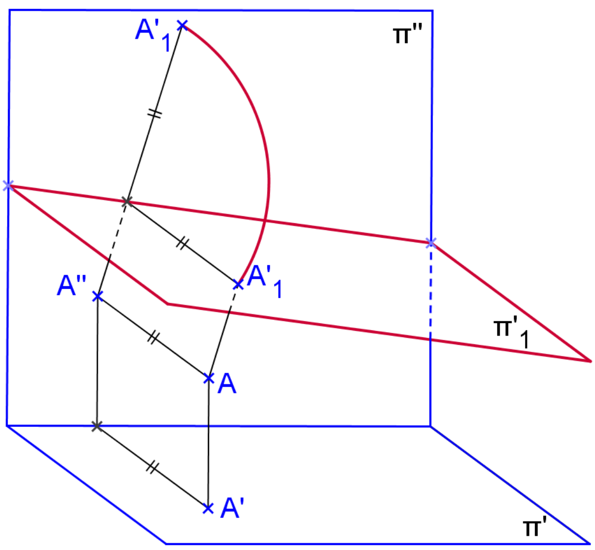
8. Representar a seção plana feita com o plano γ no tetraedro do exercício 4 da página 45. Encontre a vg da seção e planifique o sólido.

9. Representar a seção plana feita com o plano γ no prisma do exercício 6 da página 46.

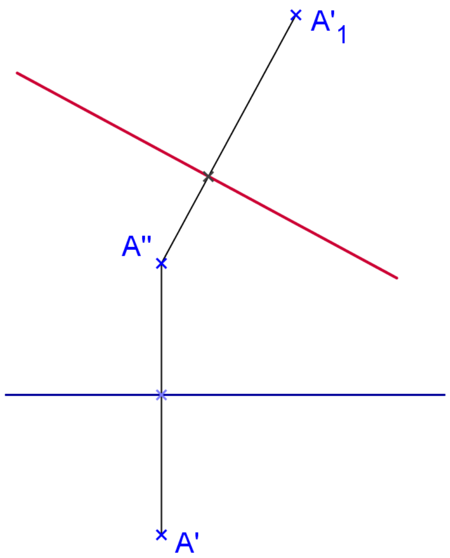
10. Representar a seção plana feita com o plano γ no octaedro do exercício 8 da página 47.

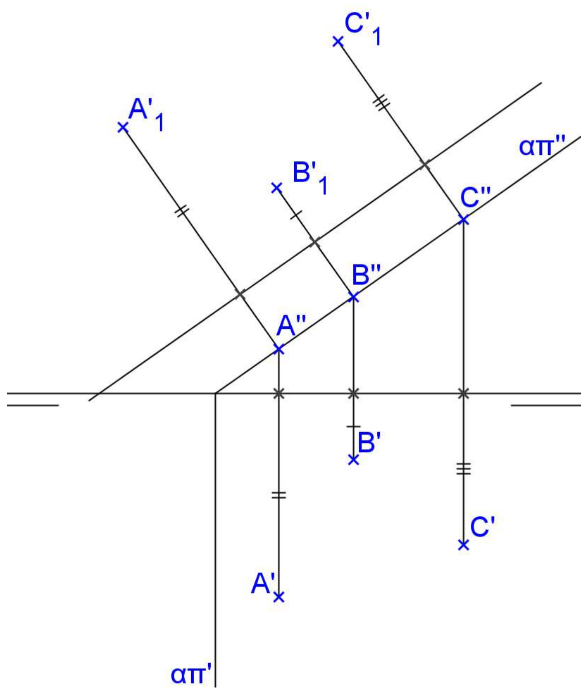
11. Representar a seção plana feita com o plano γ na pirâmide do exercício 3 da página 51.

Mudança de plano horizontal

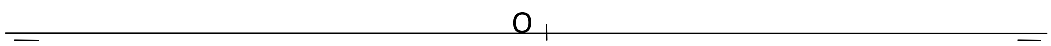


Propriedades da MPH:
- A″ é o mesmo para os dois sistemas;
- o afastamento é mantido no novo sistema;
- A″A′$_1$ é perpendicular à nova linha de terra.

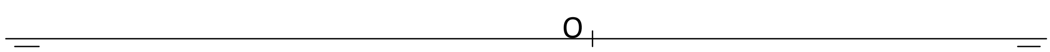




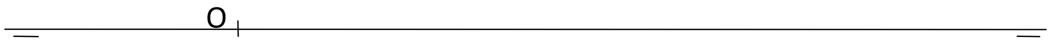
12. Representar um hexaedro regular de aresta AB com uma face sobre o plano de topo α que contém P(10,00,00) e forma 45^{o} com π'. Dados A(-30,40,?), B(-10,20,?). Representar a seção plana feita neste sólido por um plano de topo que passa por R(60,00,00) e forma 30^{o} com π'.



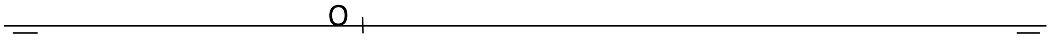
13. Representar um prisma arquimediano hexagonal de aresta AB, apoiado pela base num plano α de topo, sendo dados os vértices A(10,00,10) e B(40,10,25).



14. Representar um anti-prisma arquimediano de aresta AB e bases quadradas sobre planos de topo, dada a aresta de uma base: A(0,10,40) e B(30,00,20).

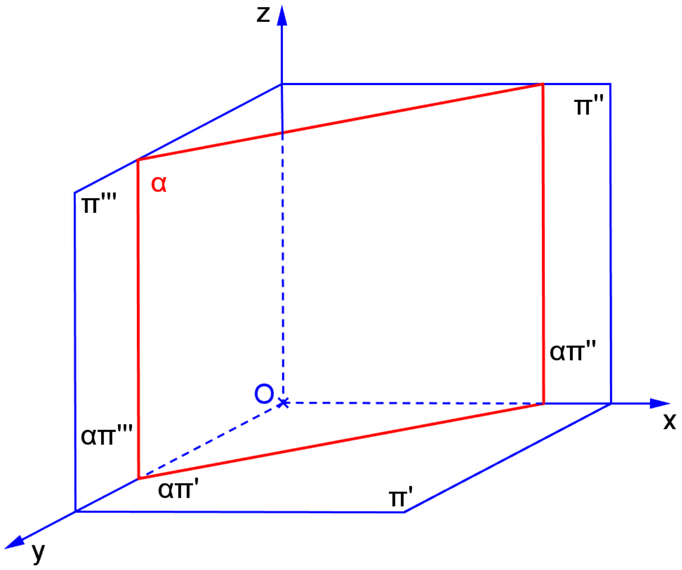


15. Representar um cilindro circular reto com uma base sobre um plano α de topo que contém P(15,00,00) e forma 45^{o} com π', sendo dados os centro das bases O(30,30,?) e P(?,?,45) e r=20. Representar geratrizes com afastamentos iguais a 40, 20 e 45.

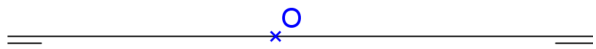


4.5. PLANO VERTICAL

a) Característica espacial: ____________________



b) Épura:



c) Traços: ________________
____
____

d) É plano projetante? ____

e) Tem alguma projeção em VG? ____

f) Retas contidas no plano: ____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: __________________________________

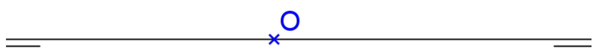
h) Ângulos:

com π' __________________

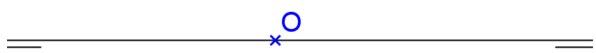
com π'' __________________

com π''' __________________

i) Traço de reta no plano:

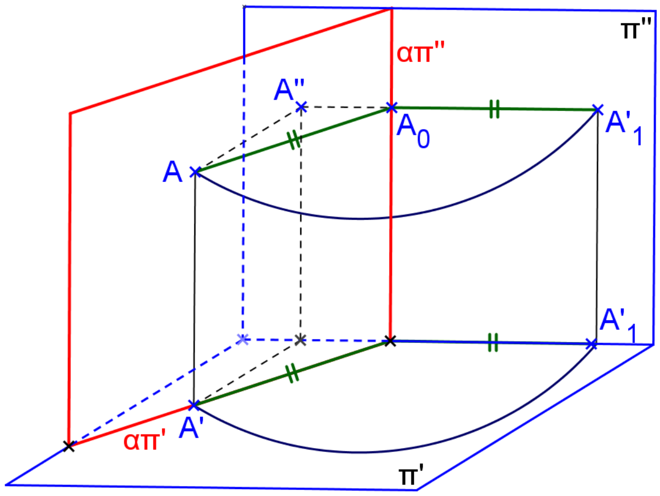


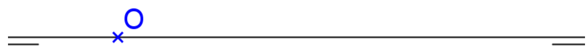
j) Reta perpendicular ao plano:



Processo do rebatimento

Rebatimento sobre π''

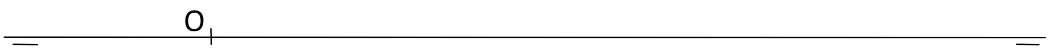




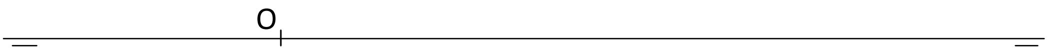
Rebatimento sobre um plano frontal: basta considerar um plano β frontal e usar $(\alpha\beta)$ como eixo do rebatimento, ou seja, utilizar $(\alpha\beta)''$ como se fosse $\alpha\pi''$.

Exercícios

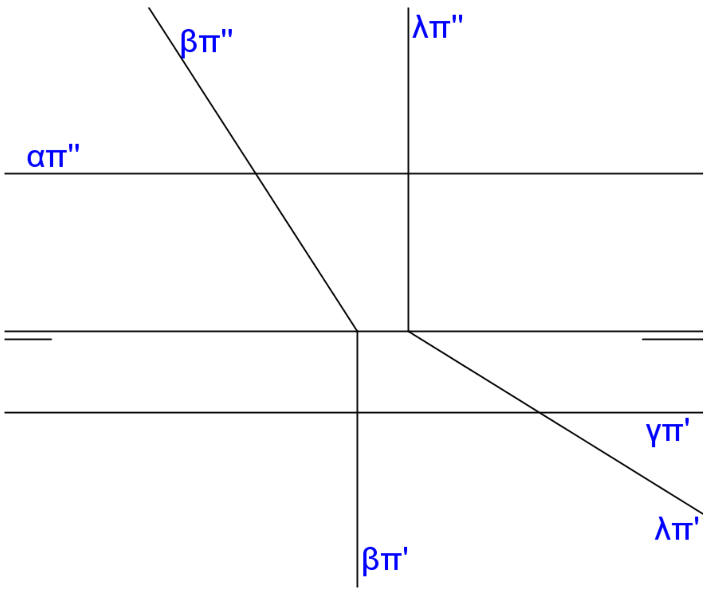
1. Representar o plano vertical α pertencente ao ponto dado A(50,30,40) e que forma ângulo de 60^o com π''.



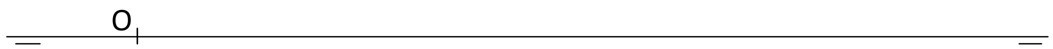
2. Representar um octógono regular ABCDEFGH contido num plano α vertical, dados o centro da circunferência circunscrita e um vértice: O(30,10,45) e A(10,30,25).



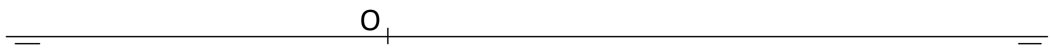
3. Representar a interseção entre os planos α e β. Representar a interseção entre os planos λ e γ.



4. Representar um prisma arquimediano de bases pentagonais contidas em planos verticais, dada uma aresta de base AB: A(-20,25,25) e B(05,15,50).



5. Representar um prisma oblíquo de bases quadradas ABCD-EFGH contidas em planos verticais, dadas as arestas AB (base) e AG (lateral): A(-30,15,0), B(-10,05,20), G(40,40,30).



Seções planas

Nos problemas 6, 7, 8 e 9 considere o mesmo plano vertical θ que passa por Z(70,0,0) e forma 30° com π'':

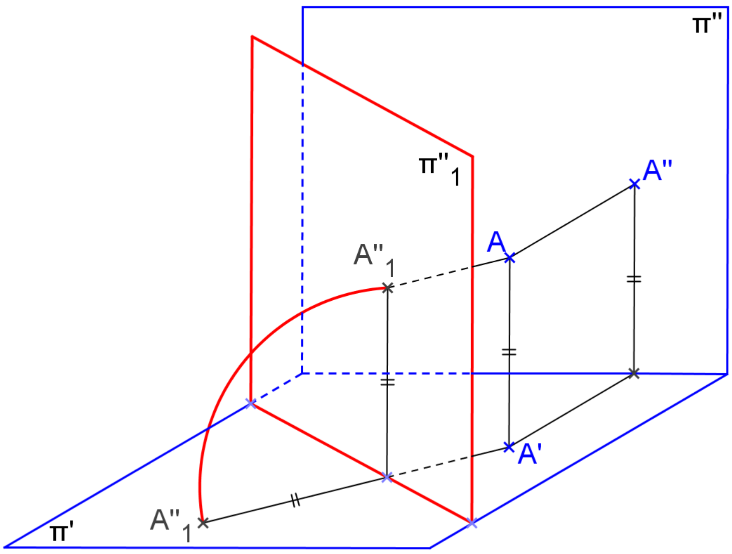
6. Representar a seção plana feita com o plano θ no prisma do exercício 5 da página 45. Encontre a vg da seção e planifique o sólido.

7. Representar a seção plana feita com o plano θ no tetraedro do exercício 5 da página 52. Encontre a vg da seção e planifique o sólido.

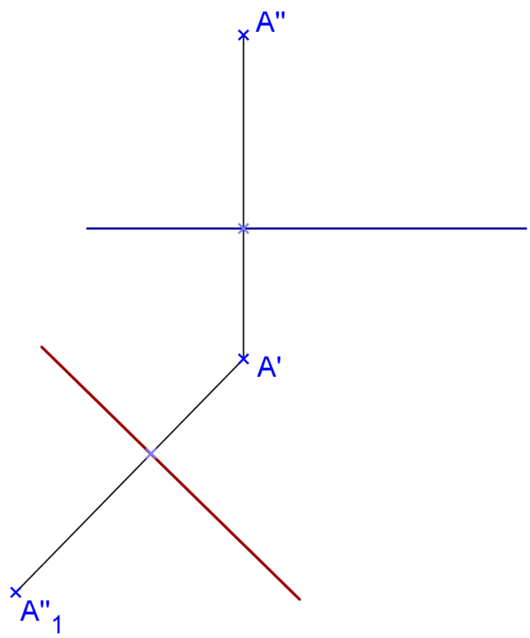
8. Representar a seção plana feita com o plano θ no cilindro do exercício 7 da página 53.

9. Representar a seção plana feita com o plano θ no cone do exercício 8 da página 53.

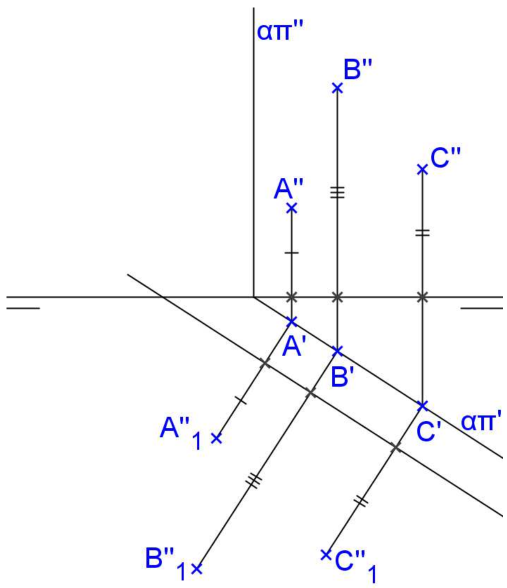
Mudança de plano vertical



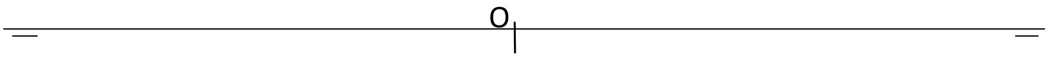
Épura:



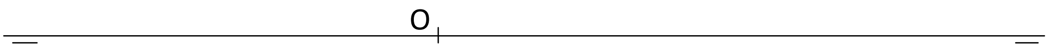
Propriedades da MPV:
- A′ é o mesmo para os dois sistemas;
- a cota é mantida no novo sistema;
- $A'A''_1$ é perpendicular à NLT.



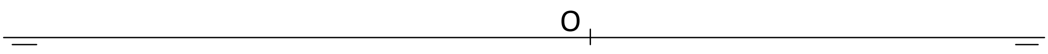
10. Representar um hexaedro regular de aresta AB, com a face ABCD contida em um plano vertical: A(10,10,10), B(30,30,30).



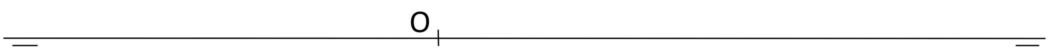
11. Representar um octaedro regular de aresta AB, sabendo-se que a face ABC está contida em um plano α vertical, sendo dados os vértices A(10,10,10) e B(40,30,0).



12. Representar um cilindro circular oblíquo com as bases em planos verticais que formam 30° com π″, com centros O(10, 20, 10) e P(-40, 40, 30) e raios das bases r=20. Representar a seção plana neste cilindro por um plano vertical que passa por R(-30, 0, 0) e forma 45° com π″.

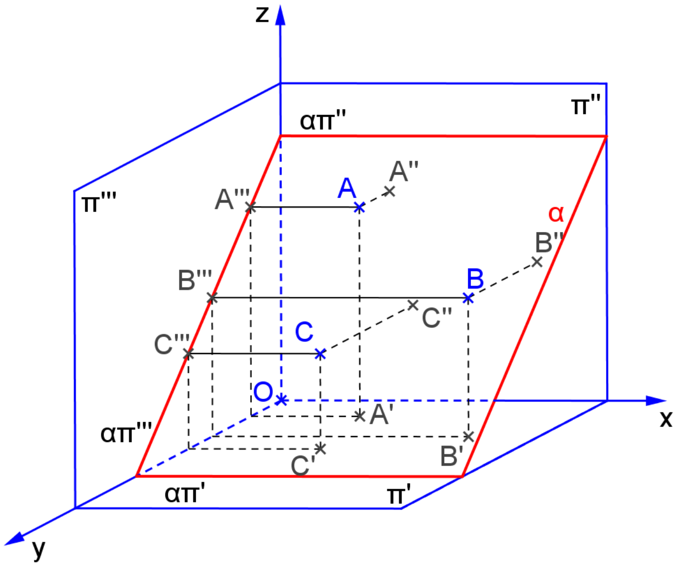


13. Construa as projeções de um cone circular reto com base em um plano frontal, dado o centro da base O(10,10,30), altura h=50 e o raio da base r=25. Representar a seção plana neste cone por um plano vertical que passa pelos pontos A(-55,0,0) e B(40,30,0).

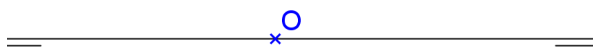


4.6. PLANO PARALELO À LINHA DE TERRA

a) Característica espacial: ____________________



b) Épura:



c) Traços: ________________

____

____

d) É plano projetante? ____

e) Tem alguma projeção em VG? ____

f) Retas contidas no plano: ____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: _________________________________

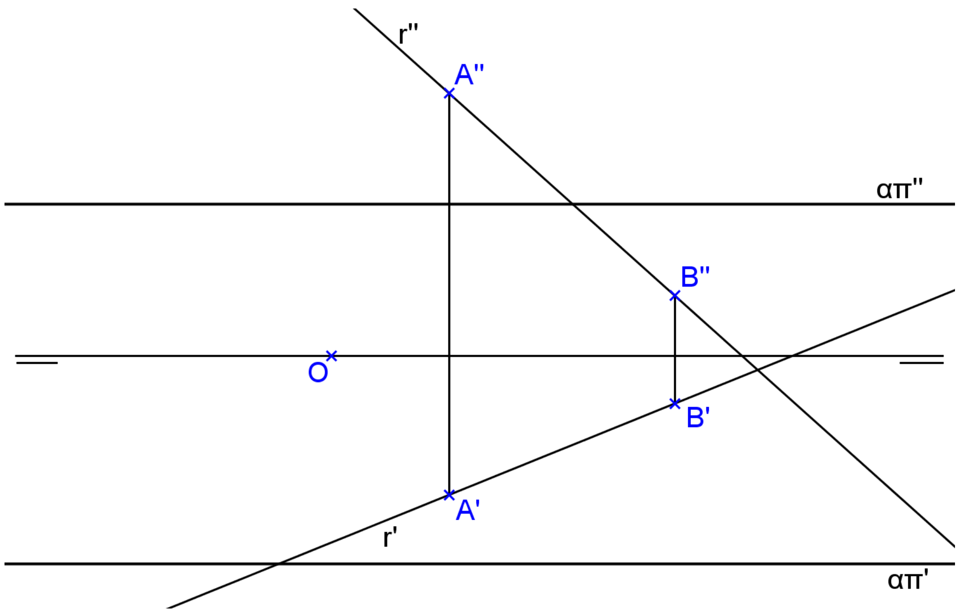
h) Ângulos:

com π' __________________

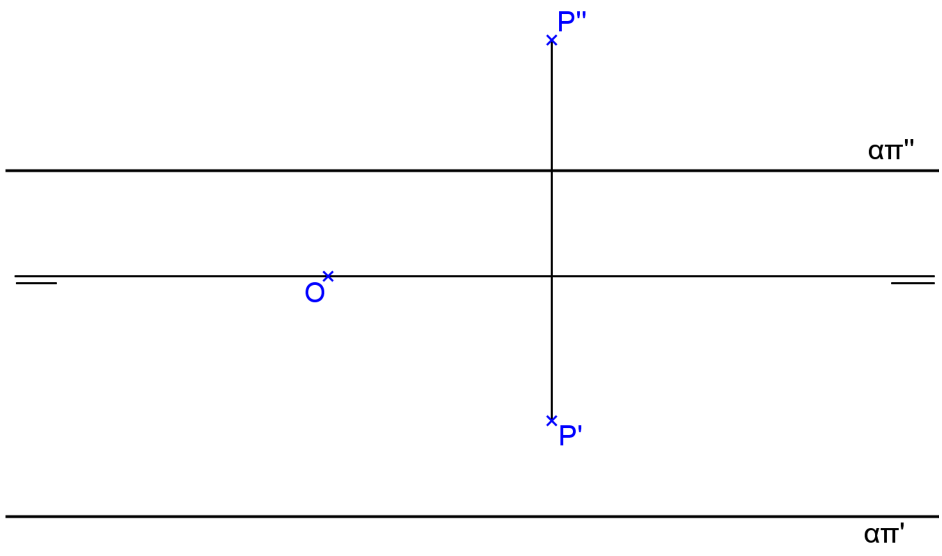
com π'' __________________

com π''' __________________

i) Traço de reta no plano:

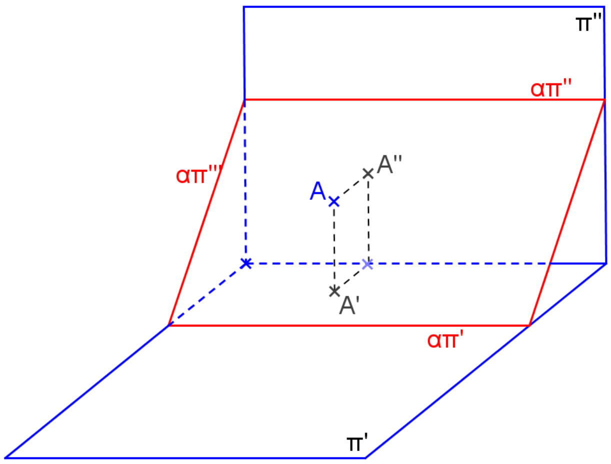


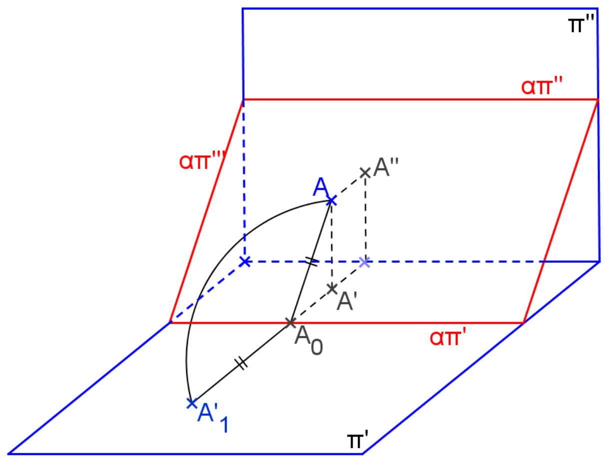
j) Reta perpendicular ao plano:

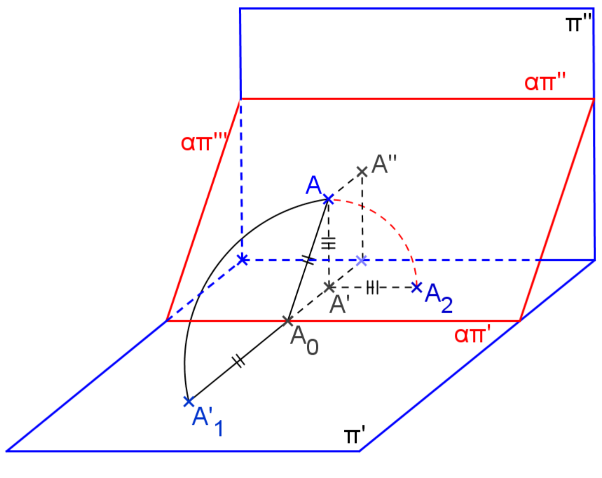


Processo do rebatimento

Rebatimento sobre π' (usando o triângulo do rebatimento AA_0A'):



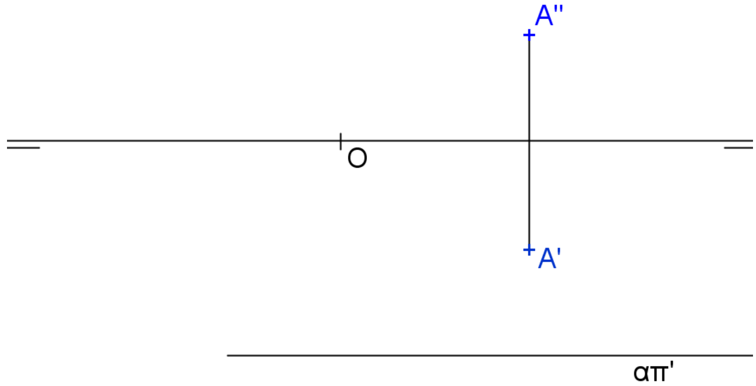




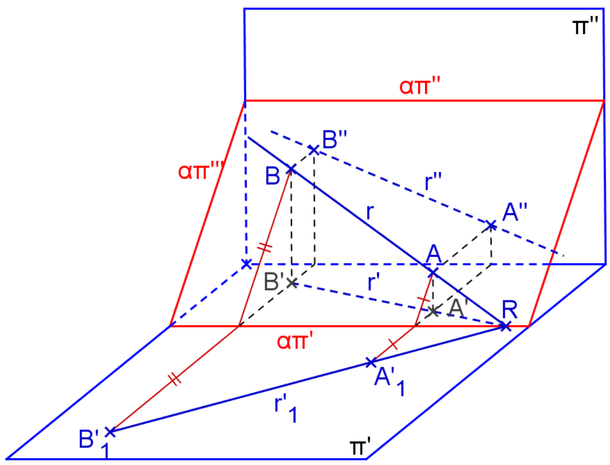
Obs.: $\alpha\pi'$ é perpendicular a $A'A_0A'_1$

Exemplo em épura:

Dado o traço do plano paralelo à linha de terra $\alpha\pi'$ e o ponto A, faça o rebatimento do plano em π' através do ponto A.

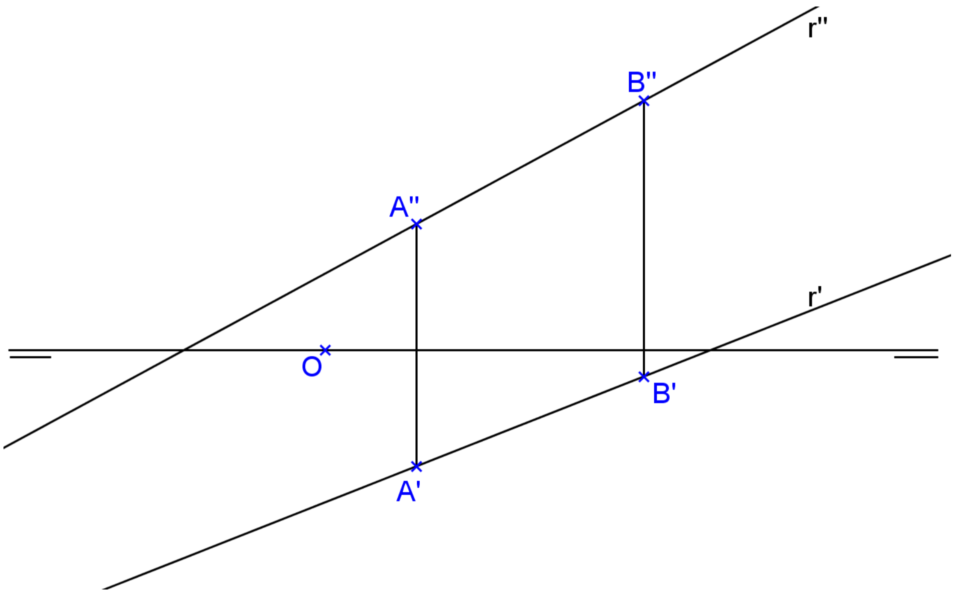


Rebatimento da reta AB sobre π':



Rebatimento sobre um plano horizontal: basta considerar um plano β horizontal e usar $(\alpha\beta)$ como eixo do rebatimento, ou seja, utilizar $(\alpha\beta)'$ como se fosse $\alpha\pi'$.

<u>Exemplo em épura</u>:
Dada a reta r pertencente a um plano paralelo à linha de terra, construa o triângulo equilátero ABC usando rebatimento. Determine os traços deste plano em π' e π''.



Exercícios propostos

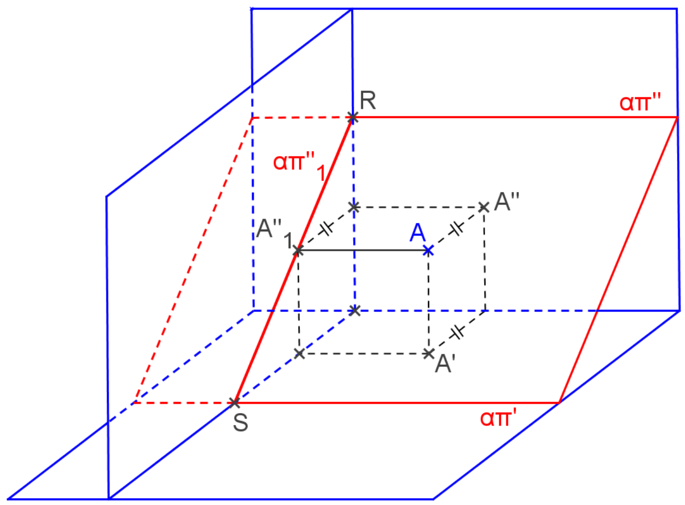
1. Represente o 1°, 2° e 3° traços do plano α paralelo à linha de terra, definido pelos pontos A(40,10,30) e B(80,40,10).

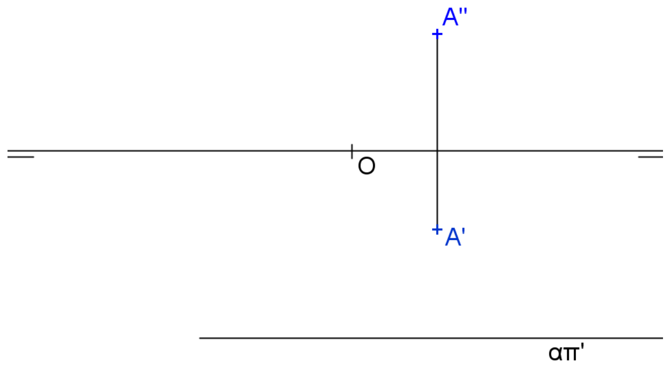
2. Represente a interseção da reta r(P,Q) sobre o plano α(A,B) paralelo à linha de terra, dados: A(40,40,30), B(10,10,20), P(30,30,60) e Q(60,20,10).

Mudança de planos de projeção

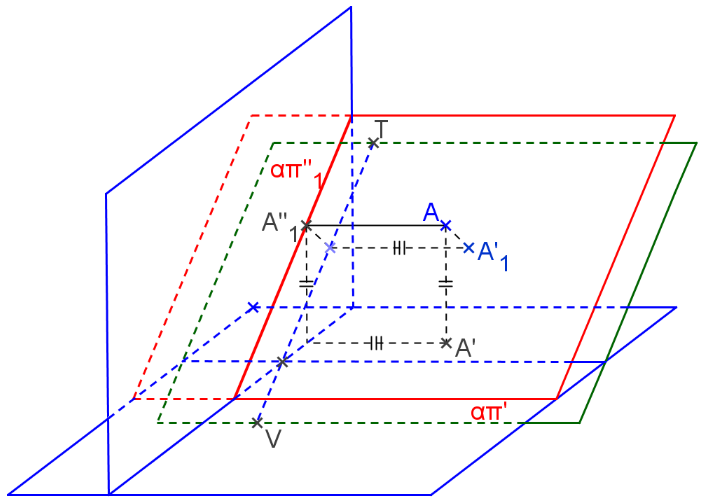
Para encontrar a VG de uma figura contida em um plano paralelo à linha de terra precisamos de 2 mudanças de planos de projeção:

1. **Mudança de π''** para transformar o plano paralelo à linha de terra em plano de topo:
   basta considerar a nova linha de terra perpendicular a $\alpha\pi'$, e fazer a mudança de plano das segundas projeções:



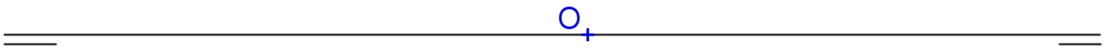


2. **Mudança de π'** para transformar o plano de topo em plano horizontal:
   basta considerar a nova linha de terra paralela a $\alpha\pi''_1$, e fazer a mudança de plano das primeiras projeções:



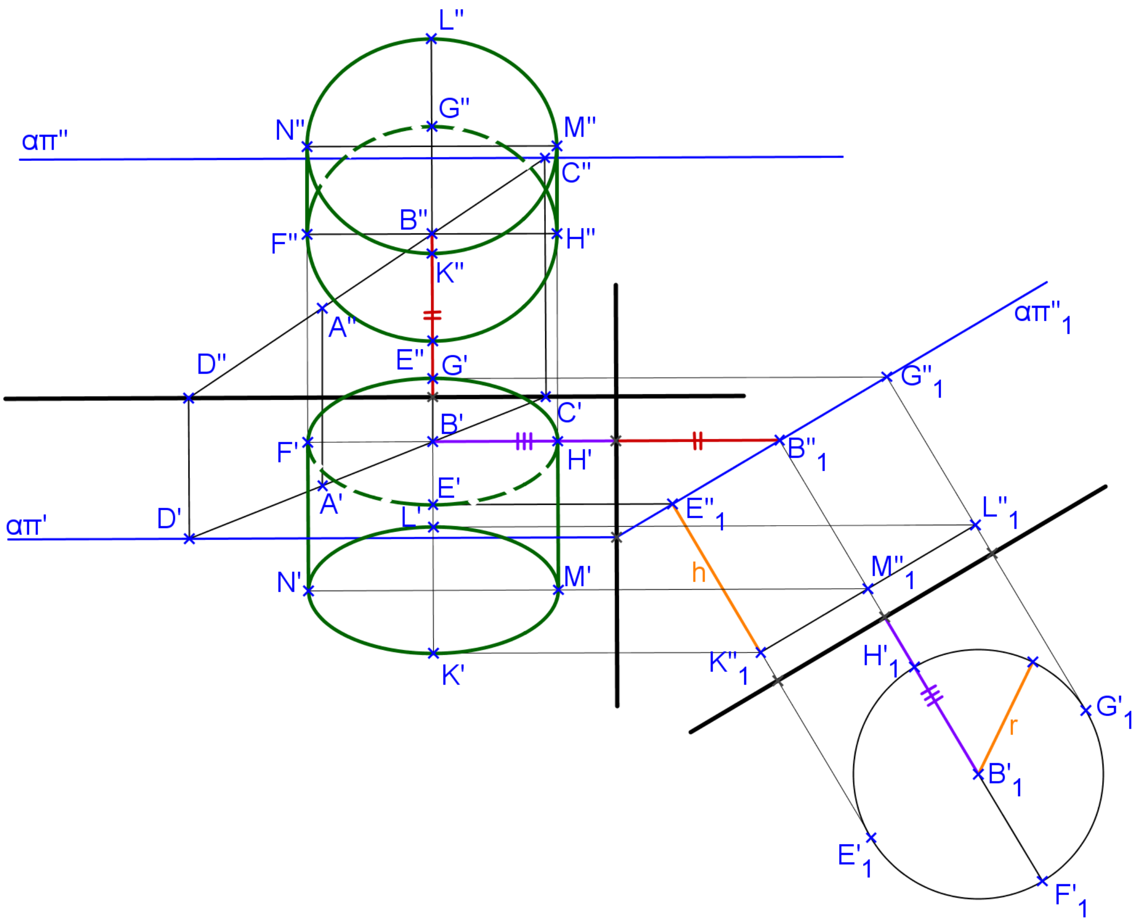
Exercícios

1. Represente as projeções de um quadrado ABCD contido num plano α paralelo à linha de terra, dados A(-30,30,20) e B(0,20,40).



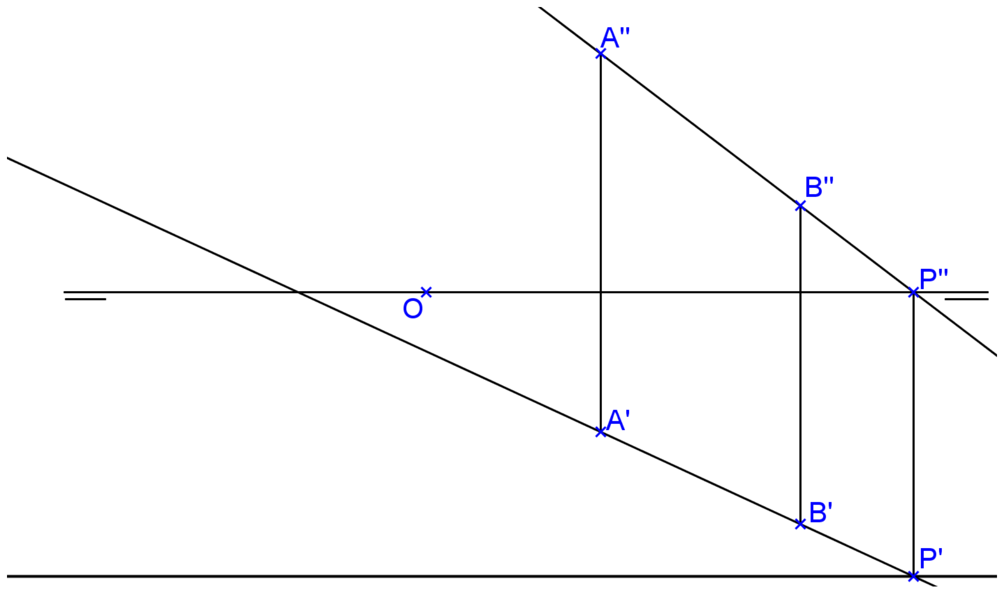
2. Represente as projeções de um triângulo equilátero ABC contido num plano α paralelo à linha de terra, sendo dados A(50,10,40) e B(20,30,20).

3. Represente as projeções do cilindro circular reto com as bases apoiadas em planos paralelos à linha de terra. São dados a altura **h**, o raio das bases **r**, os pontos **A** e **B** do plano de uma das bases e o centro de uma base é o ponto **B**.

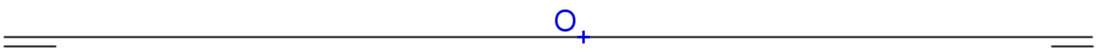


Faça a descrição passo a passo da construção para entendermos os próximos exercícios:

4. Construa as projeções de um hexaedro regular com uma face contida no plano paralelo à linha de terra que contém os vértices A e B. Encontre as projeções da seção plana neste hexaedro por um plano de topo que passa pela origem e forma 45° com π'.

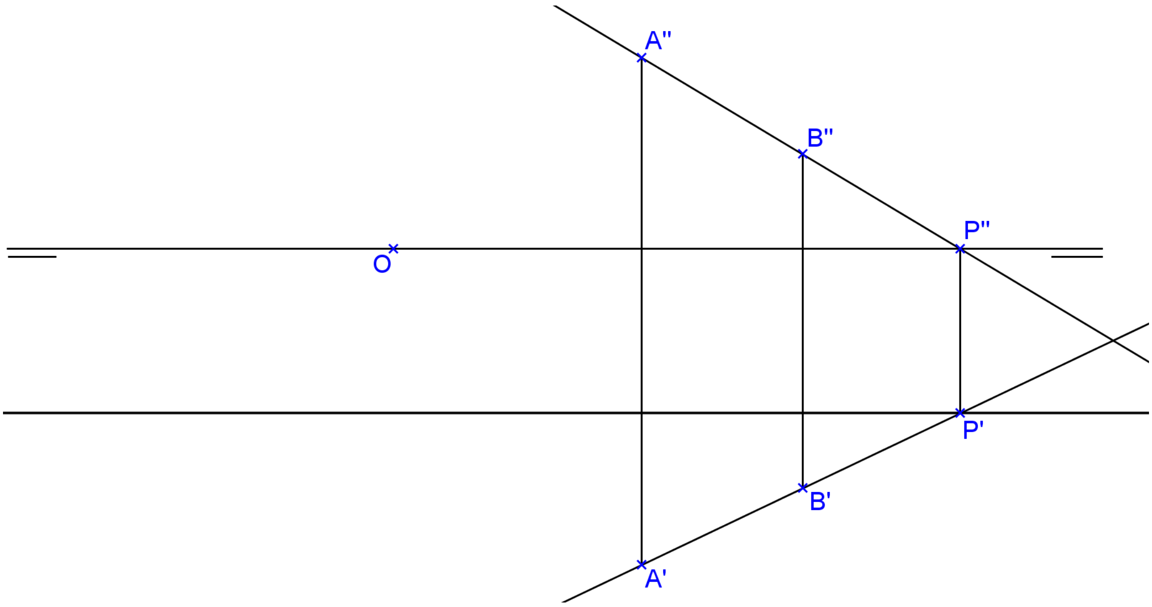


5. Represente as projeções de um prisma reto de base hexagonal ABCDEF contida num plano α paralelo à linha de terra e altura h=30. Dados A(10,40,40) e B(20,50,20). Represente a seção plana feita no prisma por um plano vertical que passa pela origem e forma 30^o com π''.



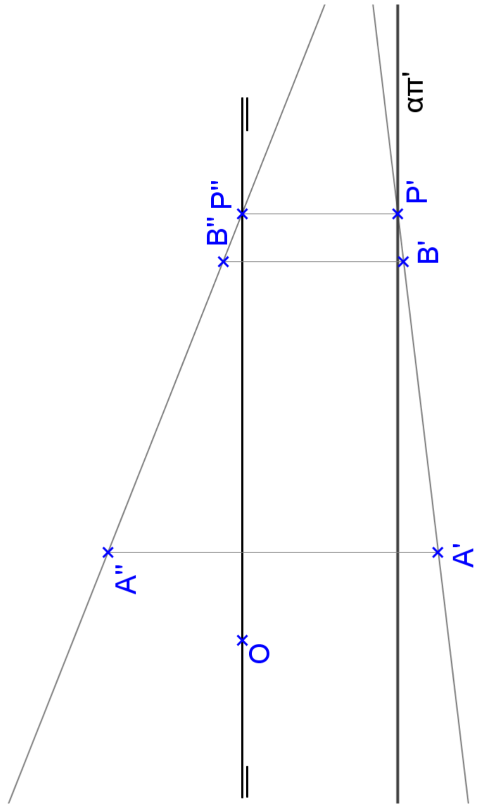
6. Represente as projeções de um tetraedro regular ABCD, sabendo-se que a base ABC está contida num plano α paralelo à linha de terra. Dados A(40,20,30) e B(20,20,20).

7. Construa as projeções de uma pirâmide hexagonal regular de altura h=50, com a base contida em um plano paralelo à linha de terra, dados os vértices da base A e B. Encontrar as projeções da seção plana nesta pirâmide feita por um plano vertical que passa pela origem e forma 45^o com π''.



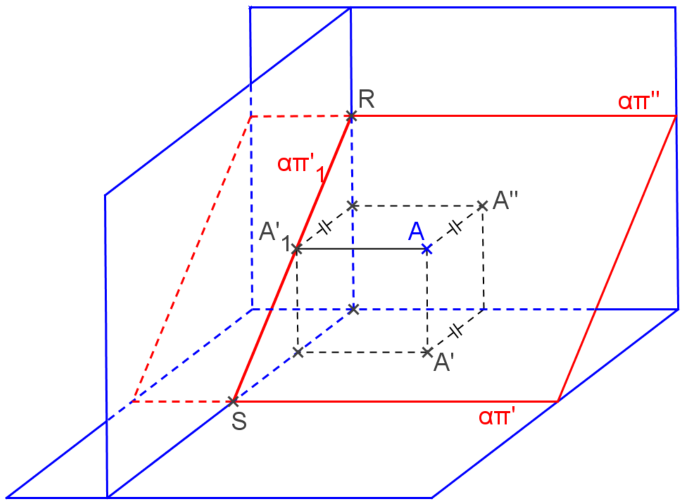
8. Represente as projeções do hexaedro regular de aresta AB, com a base sobre o plano paralelo à linha de terra α(A,B). Dados: A(45,15,15) e B(65,10,30).

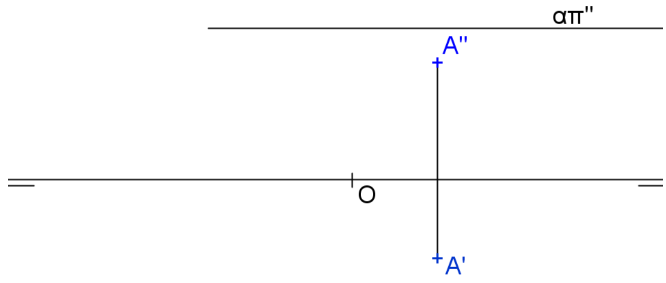
9. Construa as projeções de um octaedro regular de aresta AB com a seção equatorial ABCD contida no plano paralelo à linha de terra definido por A e B.



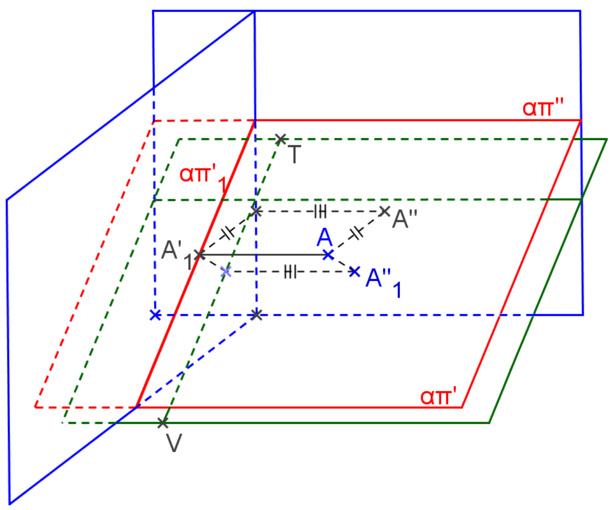
Outra maneira de encontrar a VG de uma figura contida em um plano paralelo à linha de terra é o inverso da anterior:

1. Mudança de π' para transformar o plano paralelo à linha de terra em plano vertical:
basta considerar a nova linha de terra perpendicular a $\alpha\pi''$, e fazer a mudança de plano das primeiras projeções:





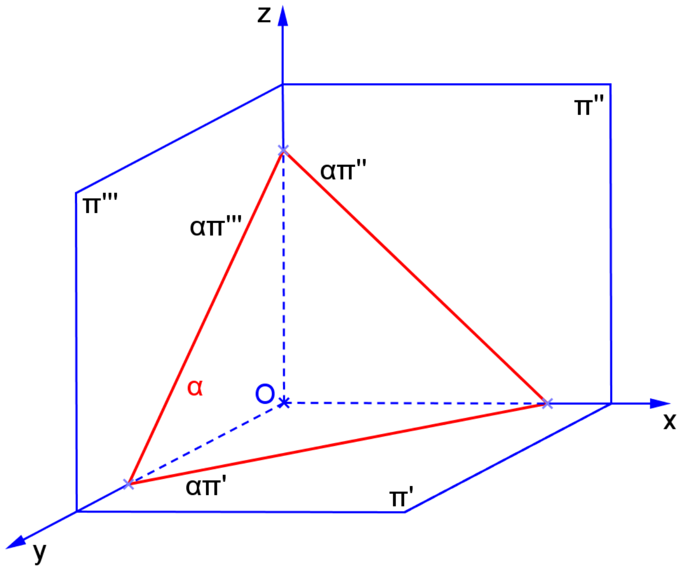
2. Mudança de π'' para transformar o plano vertical em plano frontal:
basta considerar a nova linha de terra paralela a $\alpha\pi'_1$, e fazer a mudança de plano das segundas projeções:

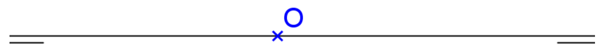


4.7. PLANO QUALQUER

a) Característica espacial: ____________________

b) Épura:





c) Traços: ________________

____

____

d) É plano projetante? ____

e) Tem alguma projeção em VG? ____

f) Retas contidas no plano: ____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: _________________________________

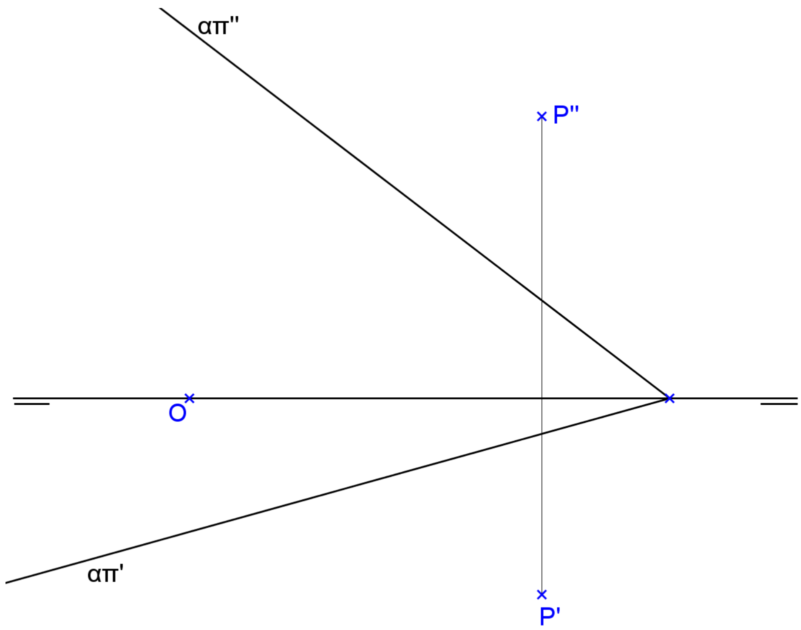
h) Ângulos:

com π' __________________

com π'' __________________

com π''' __________________

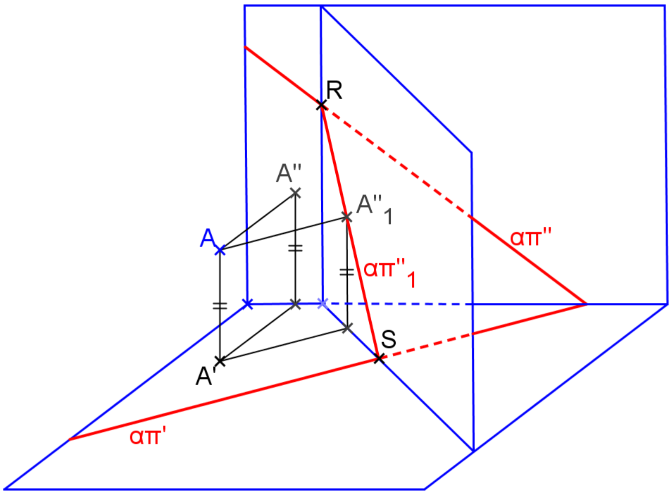
i) Reta perpendicular ao plano que passa por um ponto P.

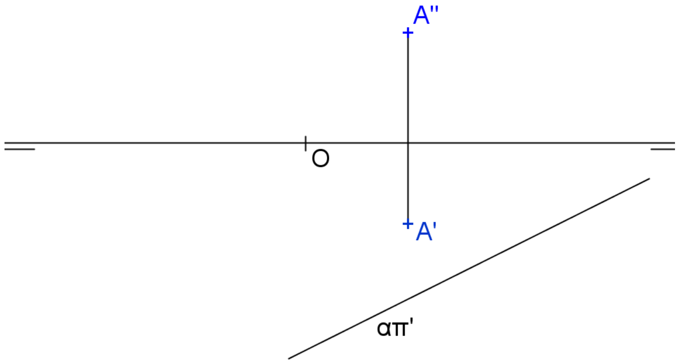


Mudança de planos de projeção

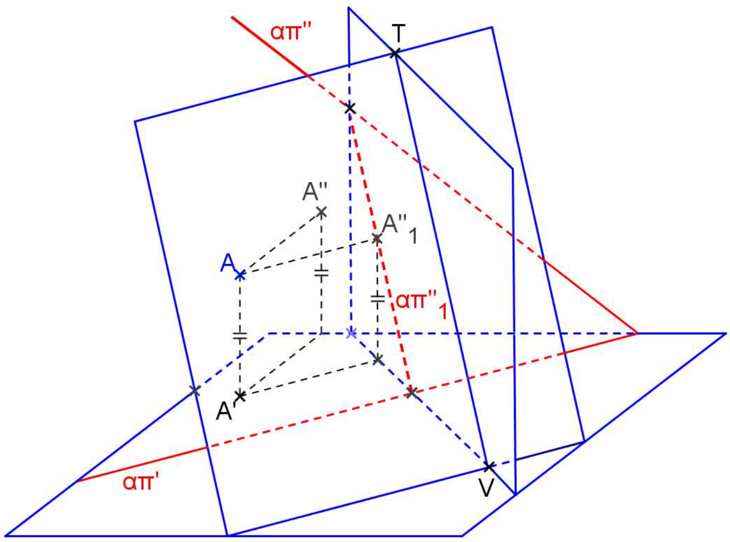
Para encontrar VG de uma figura contida em um plano qualquer precisamos de 2 mudanças de planos de projeção:

1. **Mudança de π''** para transformar o plano qualquer em plano de topo:
   basta considerar a nova linha de terra perpendicular a $\alpha\pi'$, e fazer a mudança de plano das segundas projeções:



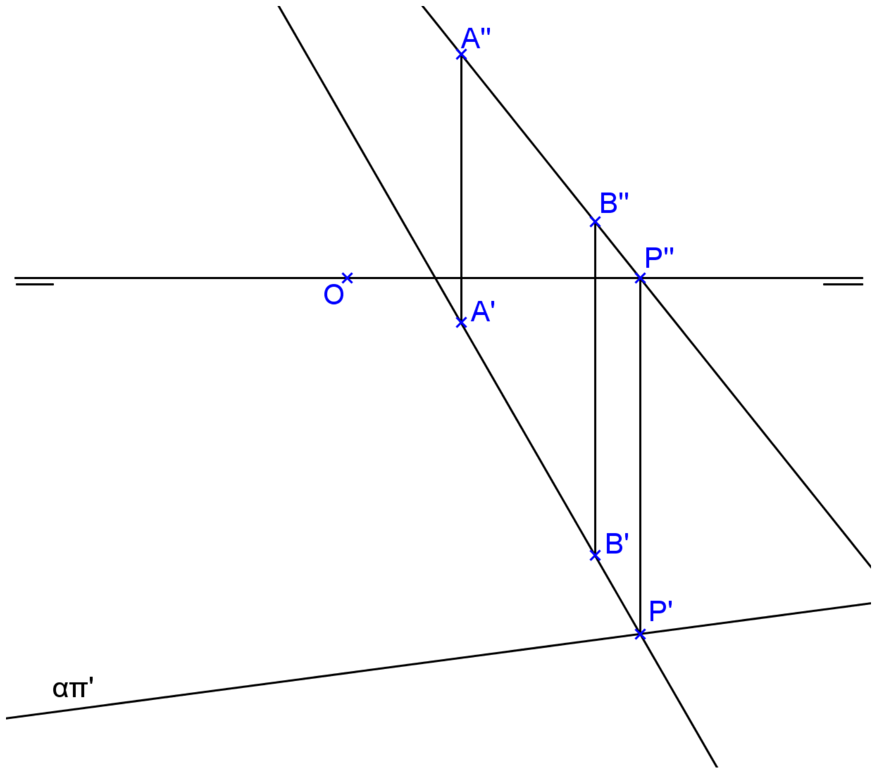


2. **Mudança de π'** para transformar o plano de topo em plano horizontal:
   basta considerar a nova linha de terra paralela a $\alpha\pi''_1$, e fazer a mudança de plano das primeiras projeções:

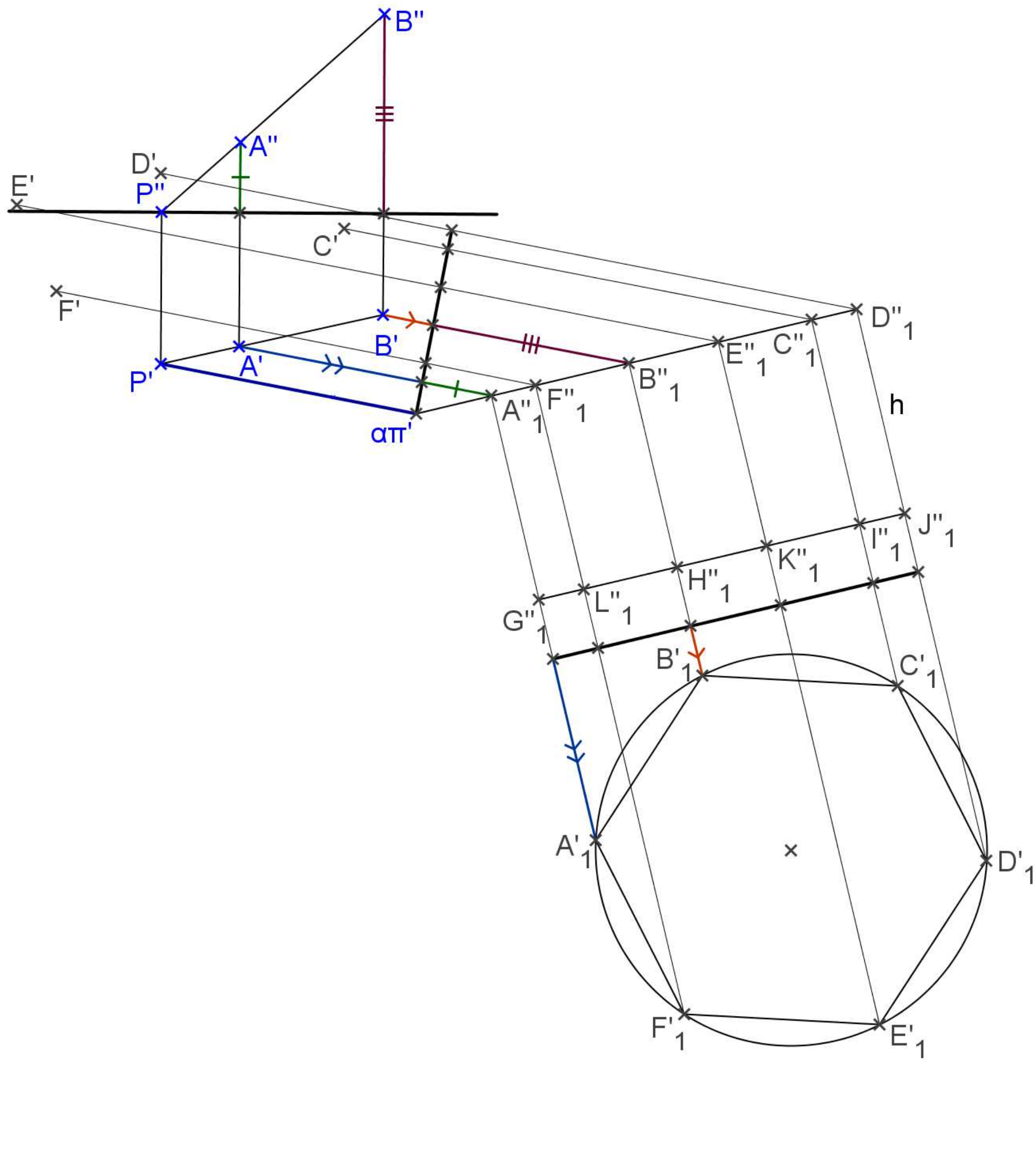


Exercícios

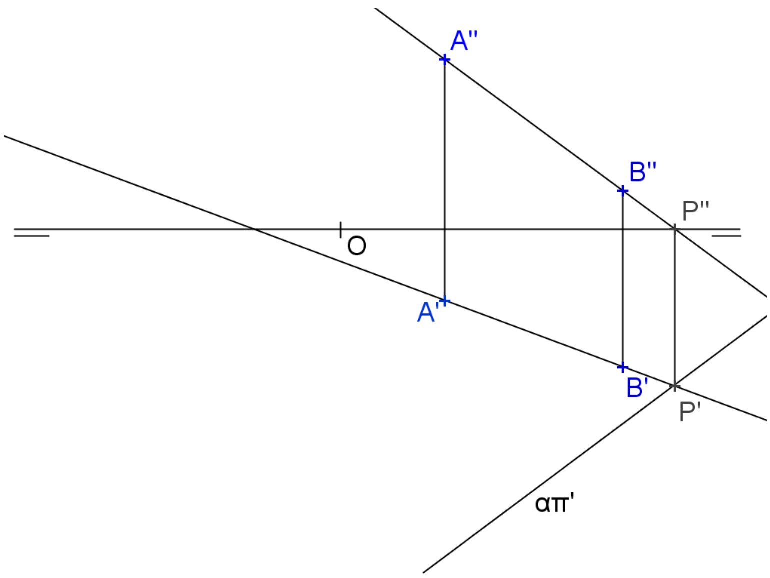
1. Construa as projeções do triângulo equilátero ABC contido no plano qualquer dado pelos pontos A e B e o traço $\alpha\pi'$.



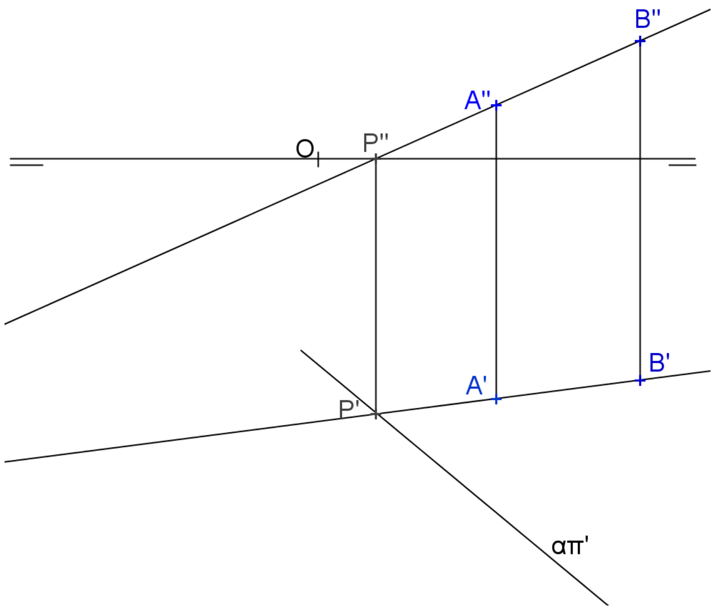
2. Represente as projeções do prisma regular hexagonal, dado o plano da base definido pela aresta AB e o traço $\alpha\pi'$.



3. Represente as projeções do prisma quadrangular regular de base ABCD contida no plano qualquer definido pelos pontos A, B e pelo traço $\alpha\pi'$, sabendo-se que a altura mede h=45. Representar a seção plana neste prisma feita por um plano de topo que passa pela origem e forma 45^{o} com π'.

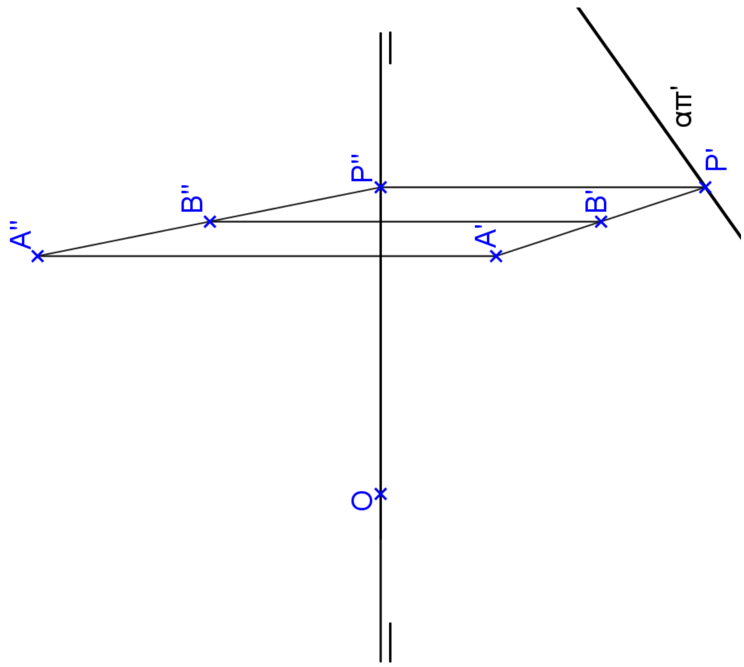


4. Representar as projeções da pirâmide regular hexagonal com a base ABCDEF contida no plano qualquer definido pelos pontos A, B e pelo traço $\alpha\pi'$. A altura da pirâmide mede h=50.



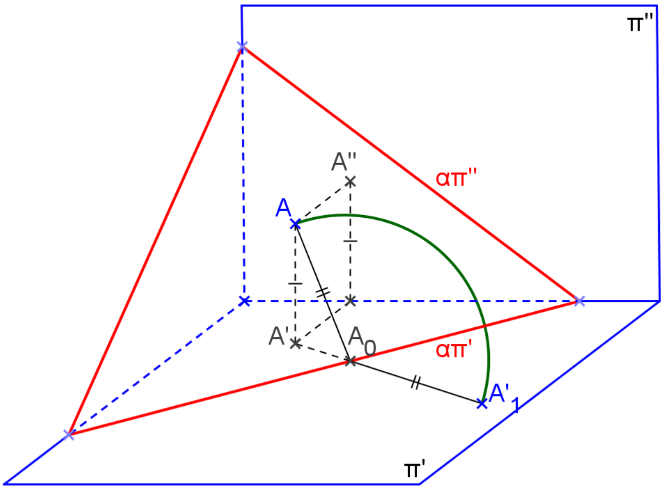
5. Represente as projeções do octaedro regular de aresta AB, com a seção equatorial ABCD contida no plano qualquer α(A,B,P). Dados: A(40,40,20), B(60,15,35) e P(30,05,50).

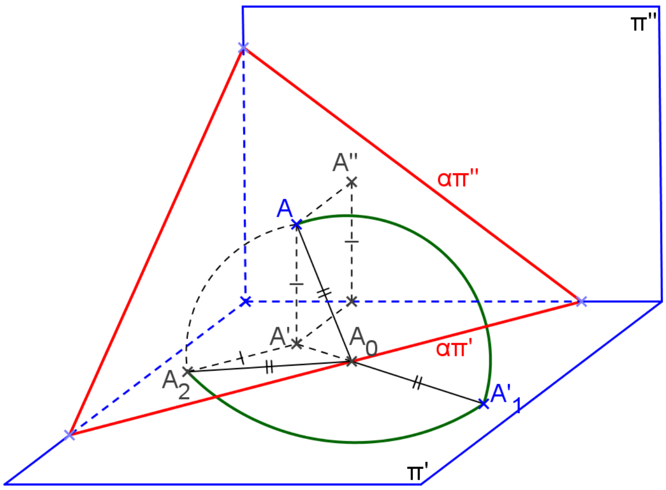
6. Represente as projeções do prisma arquimediano de bases pentagonais contidas em planos quaisquer, dados o traço $\alpha\pi'$ e a aresta AB.



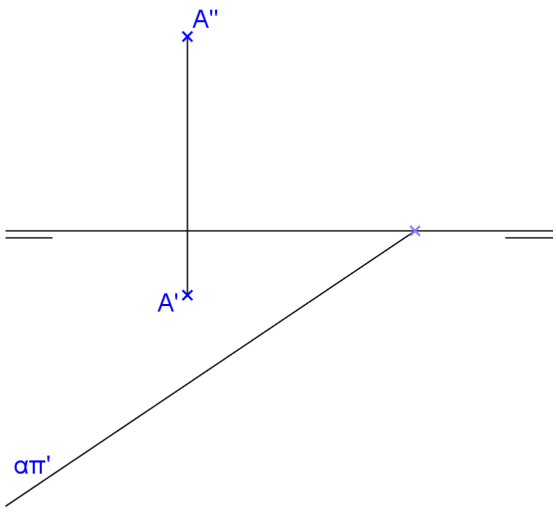
Rebatimento de um plano qualquer sobre π'

O rebatimento do plano qualquer é feito da mesma forma que fizemos no plano paralelo à linha de terra.

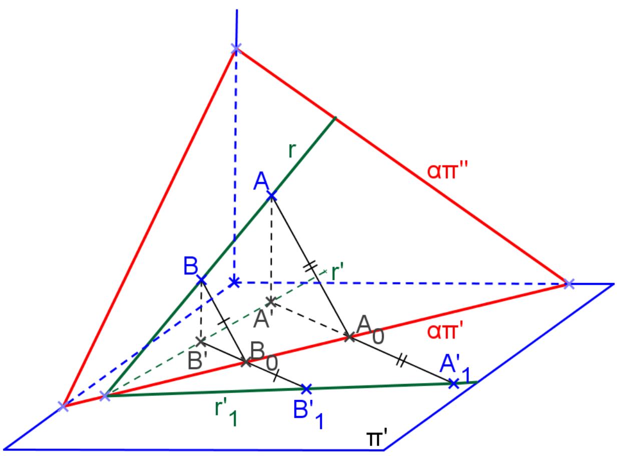


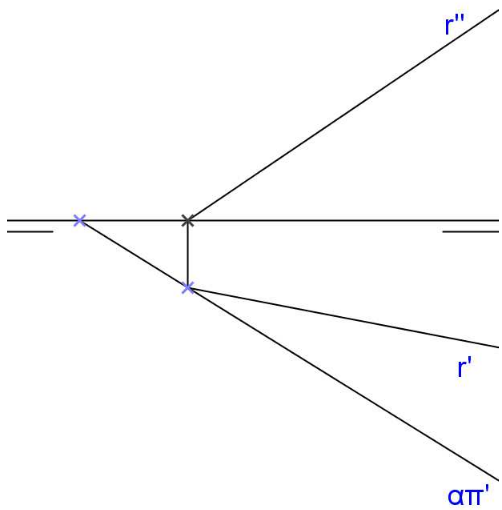


$AA'A_0$ é o triângulo fundamental do rebatimento; $A'A_2 \parallel \alpha\pi'$



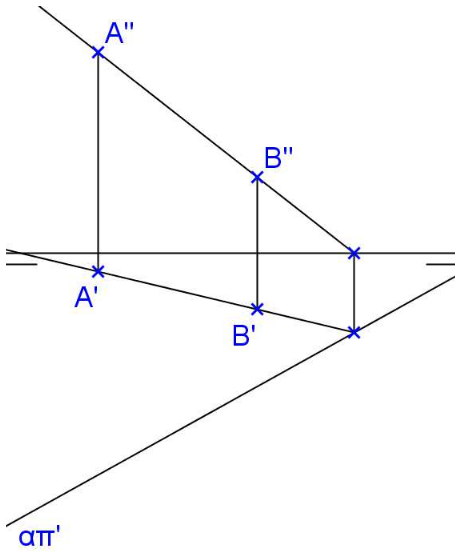
Rebatimento da reta AB sobre π':



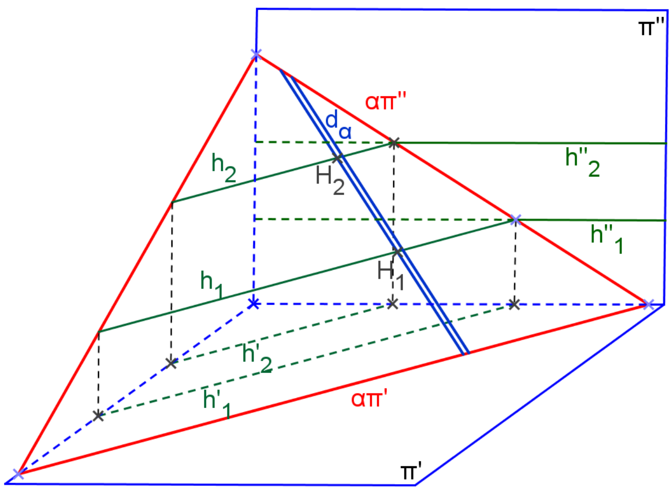


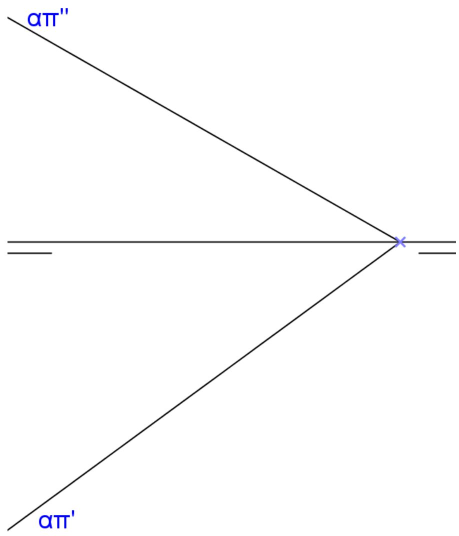
Exercício

Construir as projeções do quadrado de lado AB contido no plano qualquer α determinado por απ′ e AB.

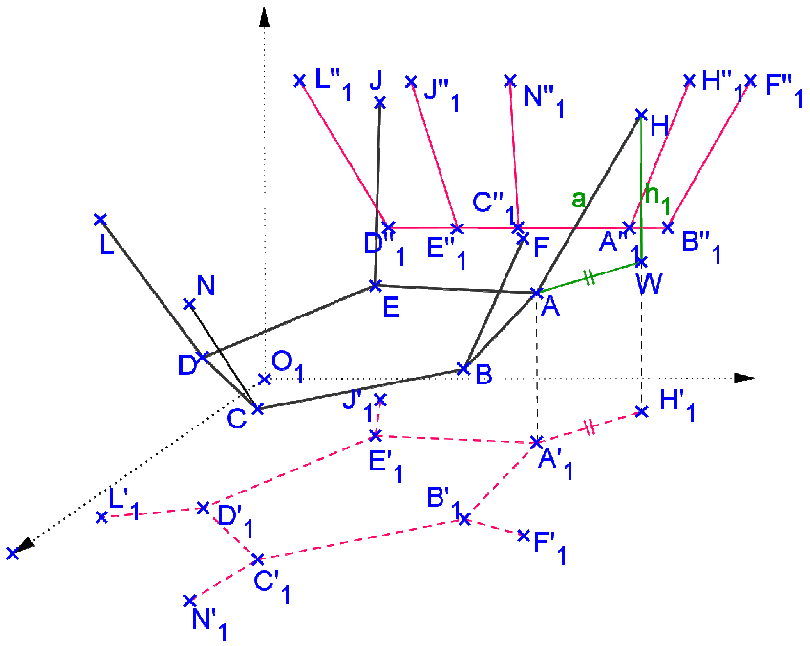


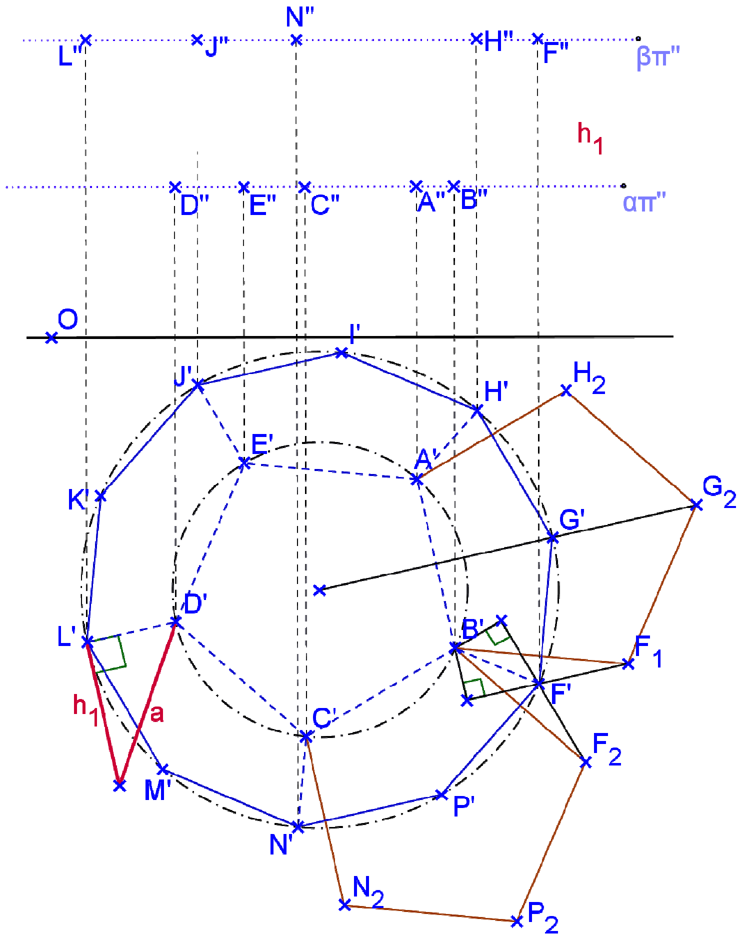
Escala de declive do plano

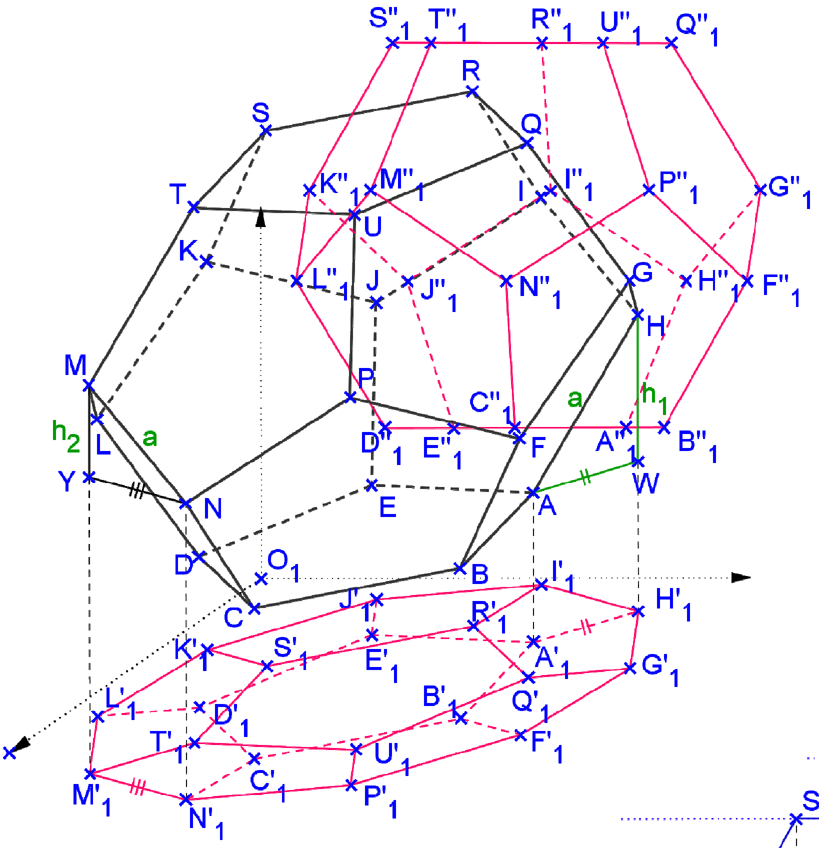


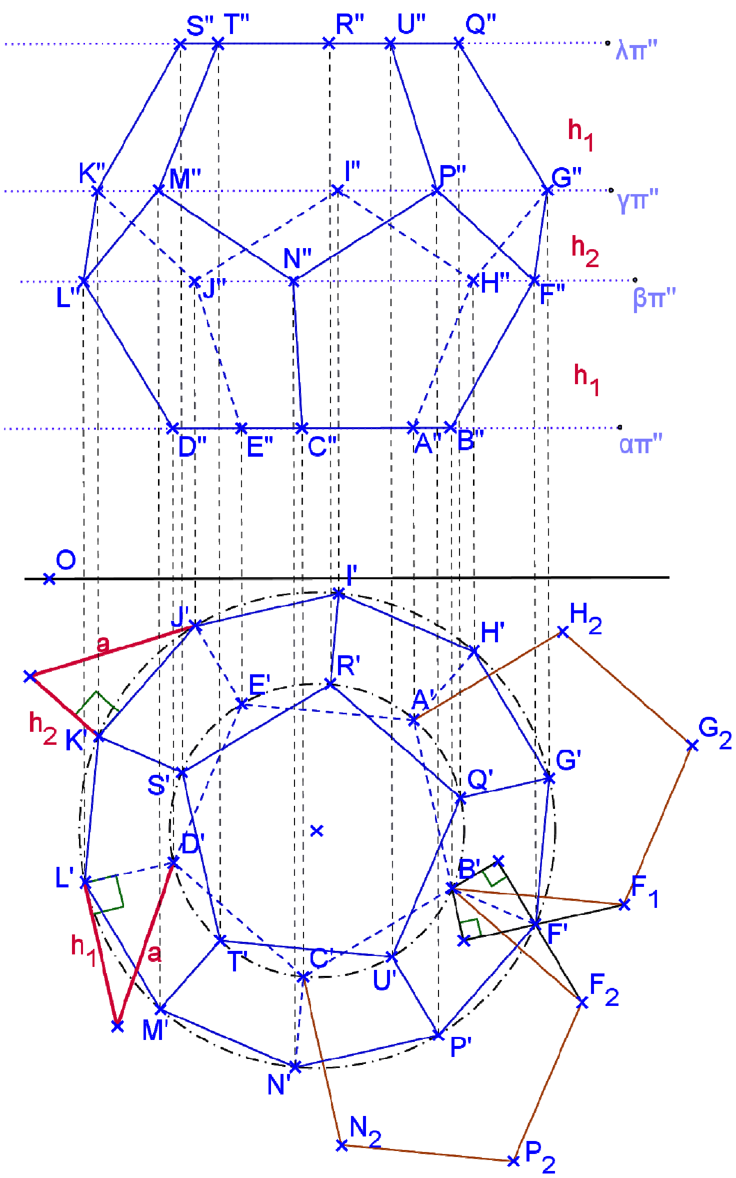


Dodecaedro regular






S"1 T"1 R"1 U"1 Q"1
R S Q T U K"1 M"1 I"1 P"1 G"1
K L"1 J J"1 N"1 G H"1 F"1 H
M P C"1 a h1
h2 L a D"1 E"1 F A"1 B"1
Y N E A W
D O1 B I'1
C J'1 R'1 H'1
K'1 S'1 E'1 A'1 G'1
L'1 D'1 B'1 Q'1
T'1 U'1 F'1
M'1 C'1
N'1 P'1


S" T" R" U" Q" λπ"
h1
K" M" I" P" G" γπ"
h2
N" L" J" H" F" βπ"
h1
D" E" C" A" B" απ"
O I'
J' H2
a H'
E' R' A'
h2 K' G2
G'
S' Q'
D'
L' B' F1
F'
h1 a
T' C' U' F2
M' P'
N'
N2 P2

Represente as projeções do dodecaedro regular de aresta AB, com a face ABCDE contida no plano horizontal α. Dados A(60,25,25) B(75,57,25).