MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE EXPRESSÃO GRÁFICA
Professoras Deise Maria Bertholdi Costa e Luzia Vidal de Souza
Disciplina – Expressão Gráfica

I - INTRODUÇÃO

1. POSTULADOS DO DESENHO GEOMÉTRICO

Assim como no estudo da Geometria se aceitam, sem definir, certas noções primitivas e sem demonstrar certas proposições primitivas (ou postulados, ou axiomas), no estudo do Desenho é necessário aceitar certos postulados que tornam a matéria objetiva.

1º Postulado: Os únicos instrumentos permitidos no Desenho Geométrico, além do lápis, papel, borracha e prancheta, são: a régua não graduada e o compasso.

A graduação da régua ou "escala" só pode ser usada para colocar no papel os dados de um problema ou eventualmente para medir a resposta, a fim de conferi-la.

2º Postulado: É proibido em Desenho Geométrico fazer contas com as medidas dos dados; todavia, considerações algébricas são permitidas na dedução (ou justificativa) de um problema, desde que a resposta seja depois obtida graficamente obdecendo aos outros postulados.

3º Postulado: Em Desenho Geométrico é proibido obter respostas "à mão livre", bem como "por tentativas".

Admite-se, no entanto, o traçado de uma cônica à mão livre ou com o uso de curvas francesas, desde que a resposta de um problema não seja obtida através desse traçado.

2. INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO

Régua, compasso, esquadros, lapiseira grafite B e HB

3. EXERCÍCIOS BÁSICOS DE DESENHO GEOMÉTRICO

3.1 Traçar a mediatriz do segmento AB dado.

3.2 Traçar por um ponto P, uma reta r, perpendicular à reta s.
  a) com compasso
  b) com esquadros

3.3 Traçar a reta s, paralela à reta r, por um ponto P dado.
  a) com compasso
  b) com esquadros

3.4 Traçar a bissetriz do ângulo dado.

3.5 Construir a circunferência que passe pelos pontos A, B e C.

3.6 Dividir o segmento AB em n partes iguais.

3.7 Transportar um ângulo dado.

3.8 Construir os ângulos de 15º, 30º, 45º, 60º, 75º, 90º, 105º, 135º, 150º.
a) com compasso
b) com esquadros

3.9 Dividir o ângulo de 90º em 3 partes iguais.

3.10 Dividir uma circunferência em n partes iguais (n = 2, 4, 5, 6, 8, 10)

3.11 Construir um polígono regular de 3, 5 e 6 lados iguais, dado o lado.

3.12 Construir o triângulo ABC, sabendo-se que:
a) O triângulo é eqüilátero e é dado o lado a = 40mm
b) O triângulo é isósceles, dados a base BC = 40mm e o ângulo B = 60º
c) O triângulo é isósceles e são dados a base BC = 40mm e a altura h_a = 40mm
d) São dados os lados BC = 40mm, o ângulo C = 45º e a altura h_a = 30mm

3.13 Construir um quadrado, dada a diagonal.

3.14 Construir o triângulo ABC e encontrar:
a) O baricentro (G)
b) O incentro (I)
c) O circuncentro (O)
d) O ortocentro (H)

4. ESCALA, FORMATO DE PAPEL, LEGENDA, MARGENS E COTAGEM

4.1 ESCALA

Definição: A razão existente entre a distância gráfica *u* (medida no desenho) e a distância natural *U* (medida real do objeto) chama-se escala e é calculada a partir da equação 1.

$$E = \frac{u}{U} \tag{1}$$

Onde E é a escala, u é a medida no desenho e U é a medida real. As escalas podem ser: natural (1:1), de redução (1:2,1:50,1:100,...) e de ampliação (2:1,5:1,...).

Exercícios:

1. Representar 1m na escala 1:50.
2. Representar 1m na escala 1:20.
3. Representar 1mm na escala 15:1.
4. Um segmento foi representado por r, na escala E. Determinar sua medida real.
   a) r = 18,5cm; E=1:700
   b) r = 14cm; E=1:20

4.2 FORMATO DE PAPEL

Formatos da série A:

As dimensões das folhas do formato A são padronizadas pela ABNT. São formatos baseados em um retângulo de área igual a 1m^2 (formato A0). A partir deste formato básico são obtidos os demais formatos da série A: A1, A2, A3 e A4, através da divisão dos retângulos obtidos sempre ao meio, conforme Figura 1.

Tabela 1 – Formato do papel e margens

FORMATO	DIMENSÕES	MARGEM ESQUERDA	OUTRAS MARGENS
A4	210 x 297mm	25mm	7mm
A3	420 x 297mm	25mm	7mm
A2	594 x 420mm	25mm	7mm
A1	841 x 594mm	25mm	10mm
A0	1189 x 841mm	25mm	10mm

As folhas de desenho acima do padrão A4 devem ser dobradas para facilitar seu arquivamento. O tamanho final de todos os formatos é A4. A forma de dobragem para o formato A0 é apresentado na Figura 2, para o formato A1, na Figura 3, para o formato A2 na Figura 4 e para o formato A3 na Figura 5. A margem esquerda é maior devido ao arquivamento.

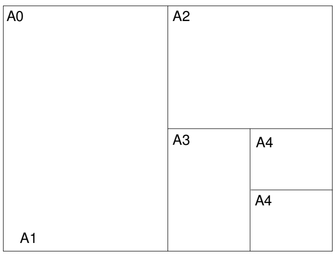


Figura 1 – Formato Série A

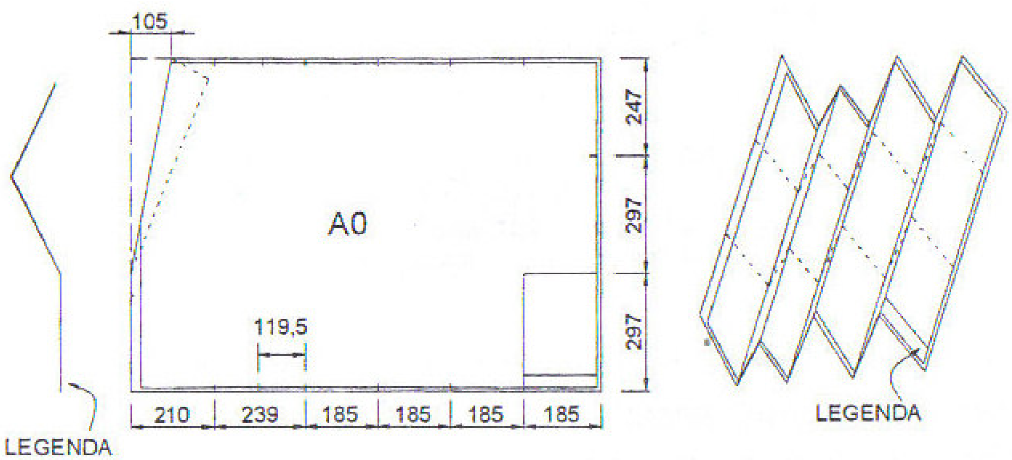


Figura 2 – Dobragem do papel formato A0

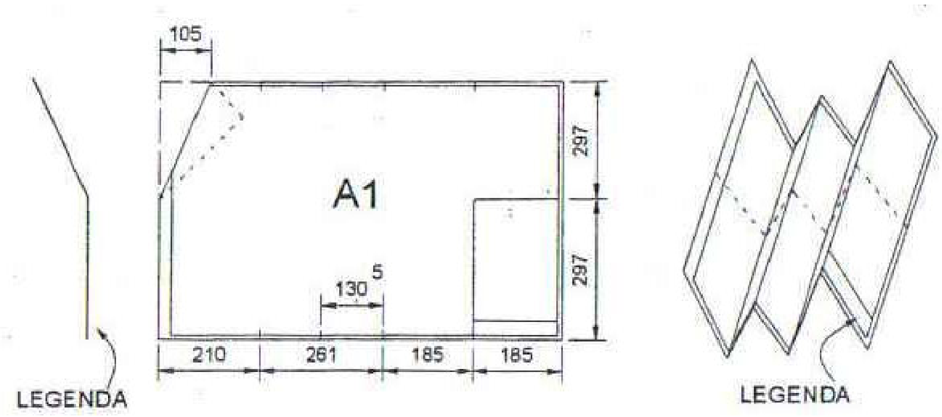


Figura 3 – Dobragem do papel formato A1

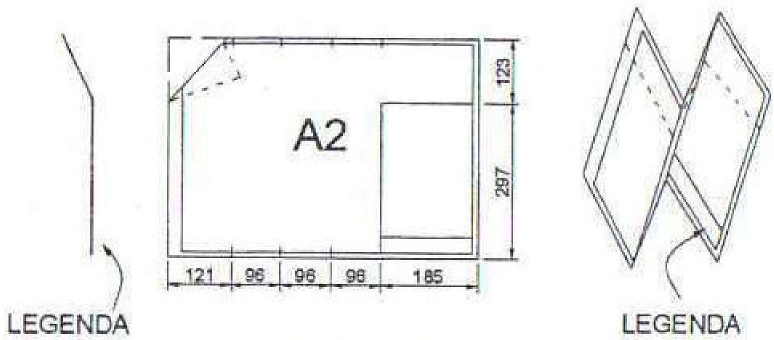


Figura 4 – Dobragem do papel formato A2

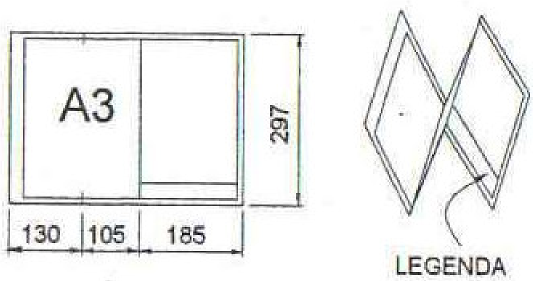


Figura 5 – Dobragem do papel formato A3

4.3 LEGENDA

A legenda deve ficar na parte externa ao final do dobramento e representa o espaço onde deverão constar as informações sobre o desenho: número do desenho, título, origem, data, escala, profissional responsável pelo projeto, conteúdo e demais informações pertinentes. Sua altura pode variar, porém a largura é especificada pela ABNT, conforme apresentado na tabela 2. O espaço reservado para a legenda somado à margem direita sempre resultará num total de 185mm. Na Figura 6 é apresentado um modelo de legenda. O título deve estar centralizado.

Tabela 2 – Formato do papel e margens

Formato	Legenda
A0 e A1	175mm
A2, A3 e A4	178mm

<table>
<tr><td colspan="4">TÍTULO
COLOCAR O TÍTULO</td></tr>
<tr><td>CURSO
NOME DO CURSO - UFPR</td><td colspan="2">DATA</td><td rowspan="3">TRABALHO</td></tr>
<tr><td>DISCIPLINA
EXPRESSÃO GRÁFICA - TURMA</td><td>UNID.</td><td>ESC.</td></tr>
<tr><td>ALUNO(A)</td><td colspan="2">NOTA</td></tr>
</table>

Figura 6 – Modelo de Legenda

4.4 COTAGEM

Para que um objeto possa ser fabricado é necessário que se forneça sua forma e dimensões. As dimensões mostradas no desenho recebem o nome de cotas e a técnica de representá-las chama-se cotagem. As cotas podem ser colocadas dentro ou fora do desenho, com a máxima clareza, de modo a admitir interpretação única. A linha de cota é fina e traçada sempre paralela à dimensão representada. O valor representa a dimensão em milímetros ou outra unidade, conforme indicação na legenda. Os valores representam as medidas reais do objeto e a escala será indicada na legenda.

Nas extremidades da linha de cota são colocadas setas, com comprimentos de 2 a 3mm e largura de aproximadamente 1/3 deste comprimento. Estas setas são delimitadas por linhas de extensão, que ficam ligeiramente afastadas do desenho. As regras de cotagem podem ser encontradas na ABNT.

II – LUGARES GEOMÉTRICOS, ÂNGULOS E SEGMENTOS

1. O MÉTODO DOS LUGARES GEOMÉTRICOS

Os problemas em Desenho Geométrico resumem-se em encontrar pontos. E para determinar um ponto basta obter o cruzamento entre duas linhas.

Definição: Um conjunto de pontos do plano constitui um lugar geométrico (LG) em relação a uma determinada propriedade P quando satisfaz às seguintes condições:
a) Todo ponto que pertence ao lugar geométrico possui a propriedade P;
b) Todo ponto que possui a propriedade P pertence ao lugar geométrico.

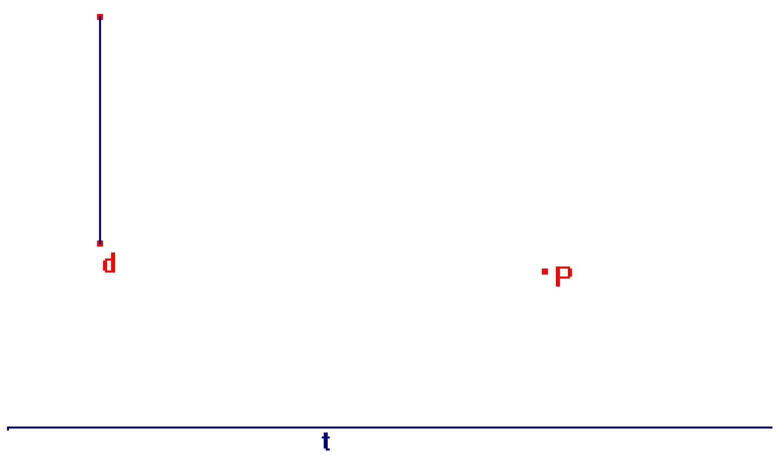
Observação: Na resolução de problemas, procuramos construir graficamente uma determinada figura que satisfaça as condições impostas (ou propriedades). Geralmente, estas condições impostas são lugares geométricos construtíveis com régua e compasso. O emprego de figuras que constituem lugares geométricos na resolução de problemas gráficos é chamado de Método dos Lugares Geométricos. Na discussão do problema deve constar o número de possíveis soluções.

1.1 LUGAR GEOMÉTRICO 1 - CIRCUNFERÊNCIA

Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano situados a uma distância constante, r, de um ponto fixo O é a circunferência de centro O e raio r.
Notação: Circunf(O,r).

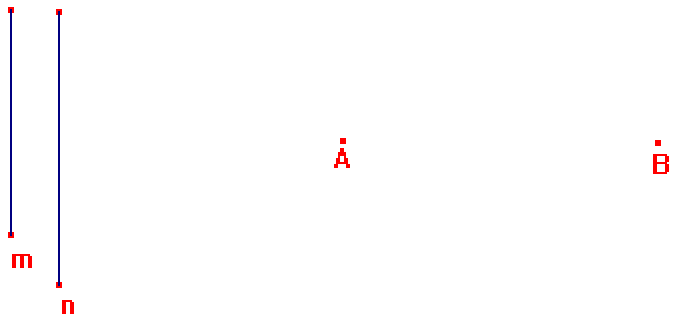
Exercícios:

1. Dados o ponto P, a reta t e uma distância d. Determinar um ponto X da reta t que esteja à distância d do ponto P.



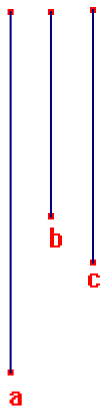
Discussão: ___________________

2. Dados os pontos A e B, e as distâncias m e n. Obter um ponto X que esteja situado à distância *m* de A e *n* de B.



Discussão: ___________________

3. Construir um triângulo ABC sendo dados os três lados a, b e c.

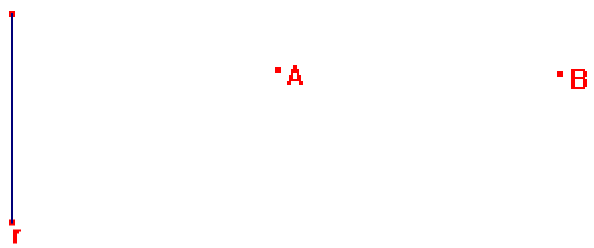


Discussão: ___________________

<u>Observação</u>: Construir um triângulo equivale a determinar 3 pontos (vértices). Devemos levar em consideração: a posição, a forma e o tamanho.

<u>Propriedade dos triângulos</u>: um triângulo fica determinado em forma e tamanho quando dele são conhecidos 3 elementos, sendo pelos menos um deles linear, isto é, um lado ou uma mediana, etc.

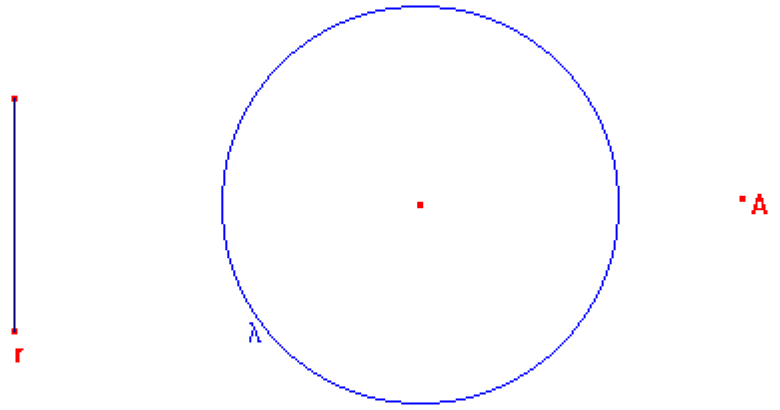
4. Dados os pontos A e B, e uma distância r. Construir a circunferência que passa pelos pontos A e B e que tenha raio igual a r.



Discussão: ___________________

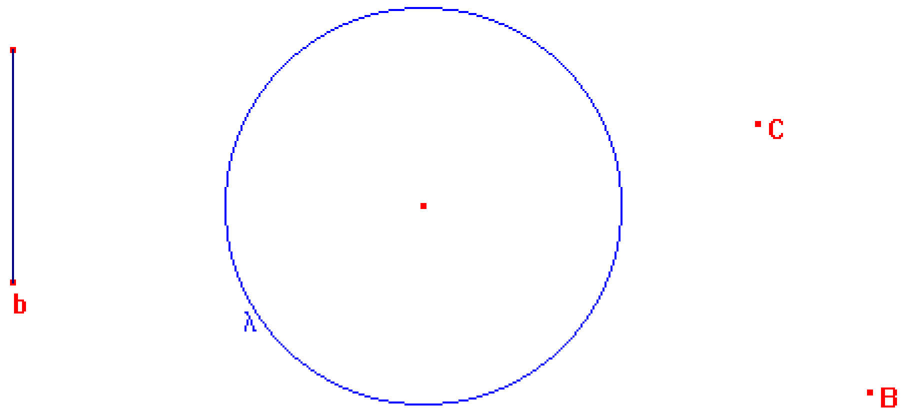
Exercícios propostos:

1. Dados o ponto A, a circunferência λ e a distância r. Determinar um ponto X de λ que esteja à distância r do ponto A.



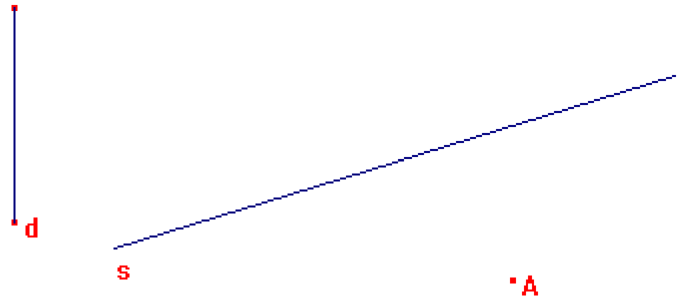
Discussão: ___________________

2. Dados os pontos B e C e uma circunferência λ. Construir um triângulo ABC, sendo dado o lado b e sabendo que o vértice A pertence à circunferência λ.



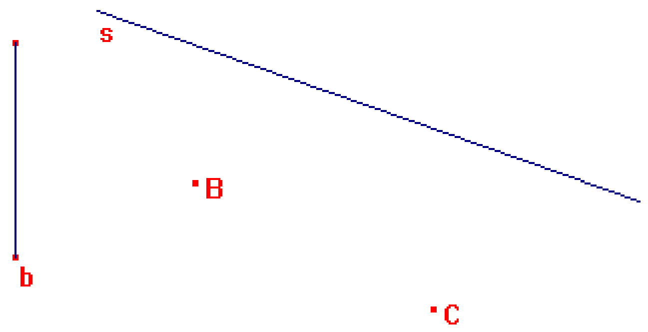
Discussão: ___________________

3. Dados a reta s, o ponto A e a distância *d*. Construir o triângulo ABC, isósceles de base BC, sabendo os lados têm medida *d* e que a base BC está contida na reta s.



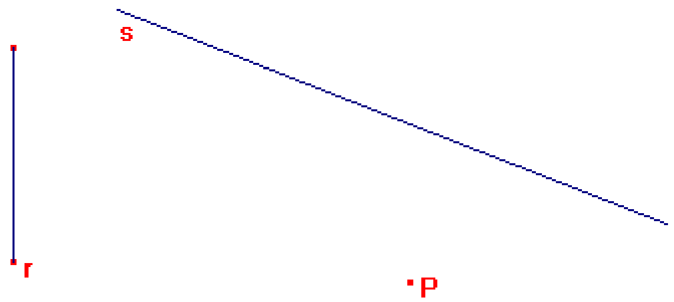
Discussão: ___________________

4. Dados os pontos B e C e a reta s. Construir um triângulo ABC, sendo dado o lado b e sabendo que A pertence à reta s.



Discussão: ___________________

5. Dados o ponto P, a reta s e a distância r. Construir a circunferência que passe pelo ponto P, tenha raio r e cujo centro pertença à reta s.



Discussão: ___________________

6. Construir uma forma humana, um objeto e um animal utilizando apenas arcos de circunferência.

7. Reproduza a forma apresentada na figura 7, construindo um quadrado de l = 50mm. Com centro no ponto médio dos lados, construa arcos de circunferência externos com raio 25mm e internos com raio 15mm. Com centro nos vértices do quadrado construa os arcos internos.

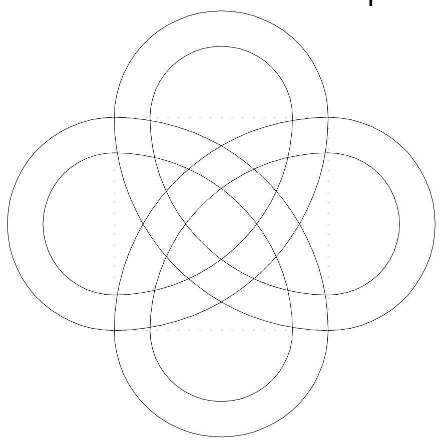


Figura 7 – Arcos de circunferência

1.2 LUGAR GEOMÉTRICO 2 - MEDIATRIZ

Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano eqüidistantes de dois pontos A e B dados é a mediatriz do segmento AB.

Definição: Uma circunferência é dita circunscrita a um triângulo quando ela passa pelos seus três vértices. O centro da circunferência circunscrita é denominado circuncentro.

Definição: Duas retas são ditas perpendiculares quando são concorrentes e formam ângulos de 90^o entre si.

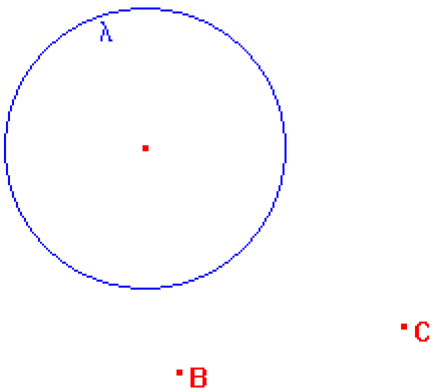
Definição: A distância de um ponto a uma reta é a medida do segmento traçado do ponto até a reta, perpendicularmente à mesma.

Exercícios:

1. Construir a mediatriz do segmento dado AB.

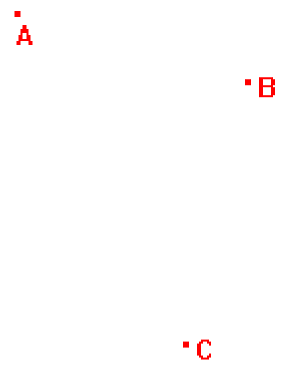
Discussão: ____________________

2. Dados dois pontos B e C e uma circunferência λ. Construir um triângulo ABC, isósceles, de base BC, sabendo-se que o vértice A pertence a λ.



Discussão: ____________________

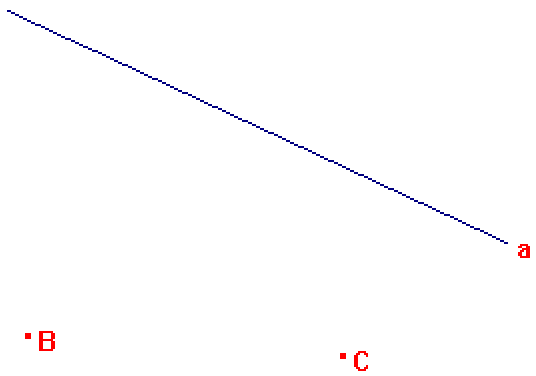
3. Dados três pontos A, B e C, não colineares, construir a circunferência que passe por esses pontos.



Discussão: ___________________

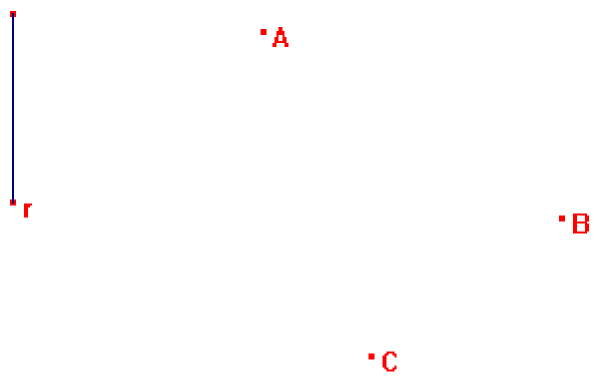
Exercícios Propostos:

1. Dados os pontos B e C e a reta *a*. Determinar um ponto de *a* que seja eqüidistante de B e C.



Discussão: ___________________

2. Dados os pontos A, B e C, e uma distância r. Determinar um ponto X, tal que a distância de X a B seja igual a r e X seja eqüidistante de A e C.

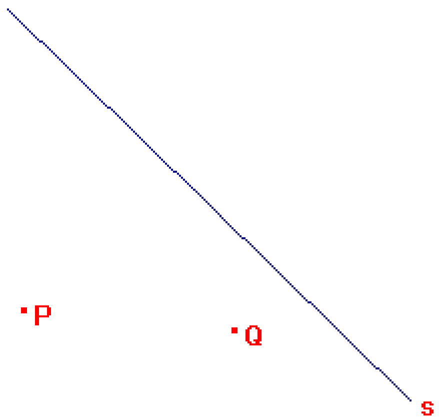


Discussão: ___________________

4. Dados os pontos A, B, C e D. Determinar um ponto X que seja eqüidistante de A e B, e que seja também eqüidistante de C e D.

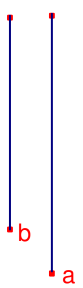
Discussão: ___________________

5. Dados os pontos P e Q e uma reta s. Construir uma circunferência que passe por P e Q, sabendo que seu centro pertence à reta s.



Discussão: ___________________

6. Construir um triângulo ABC, sendo dados a, b e $\hat{A}=90^o$.



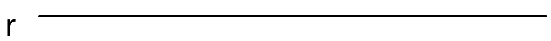
1.3 Lugar Geométrico 3 - Paralelas

<u>Propriedade</u>: O lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância d de uma reta r, compõe-se de duas retas s_1 e s_2, <u>paralelas</u> à reta r e que têm distância até ela igual à distância dada.

<u>Exercícios</u>:

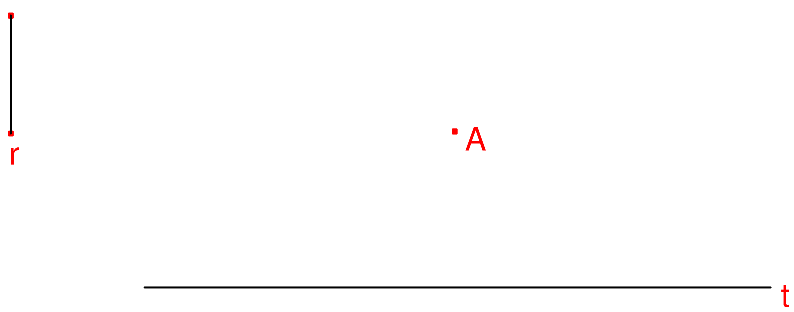
1. Dados uma reta t e um ponto P, não pertencente a t, traçar pelo ponto P, a reta s paralela a reta t.

2. Dada uma reta r, construir o LG dos pontos que distam 2cm de r.



Discussão: ____________________

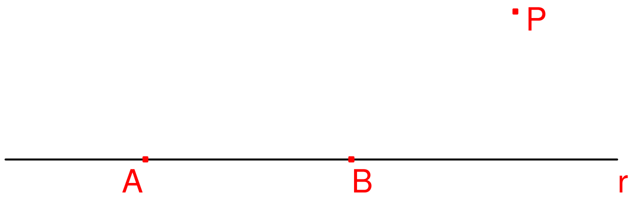
3. São dados um ponto A, uma reta t e uma distância r. Construir uma circunferência de raio r, que passe pelo ponto A e seja tangente à reta t.



Discussão: ____________________

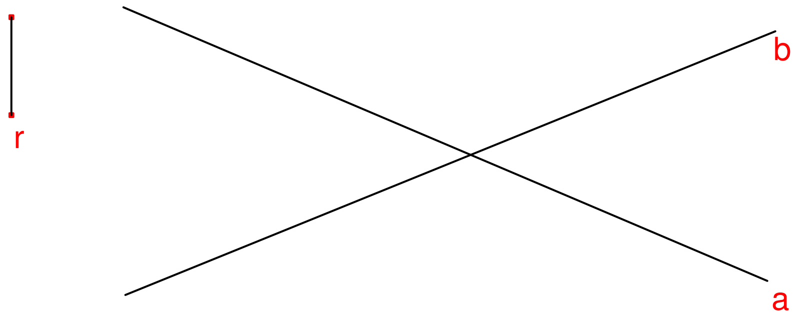
Exercícios Propostos:

1. Dados a reta r, os pontos A e B sobre r e o ponto P fora de r. Construir uma circunferência que passe por A e B, sabendo que o seu centro pertence à reta paralela a r conduzida por P.



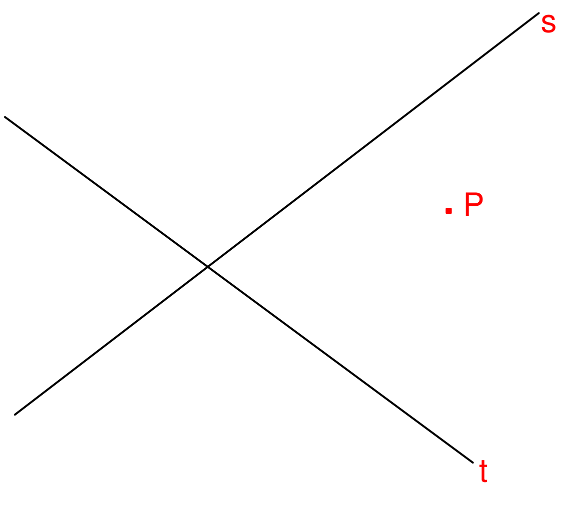
Discussão: ___________________

2. Dadas duas retas a e b concorrentes, construir uma circunferência de raio r que seja tangente às duas retas.



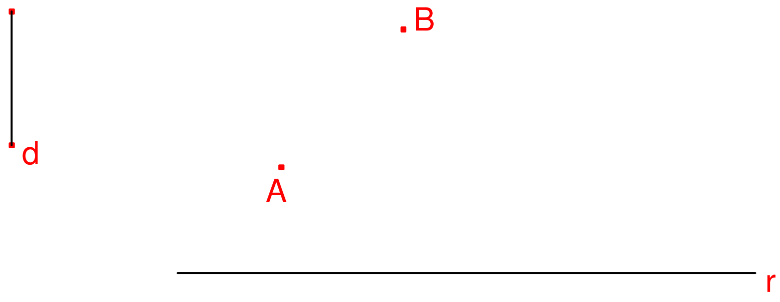
Discussão: ___________________

3. Dadas duas retas concorrentes s e t e um ponto P fora delas. Determinar a reta r que passe por P e seja paralela à reta t. Construir uma circunferência tangente à reta t, sabendo que o seu centro é o ponto de interseção das retas r e s.



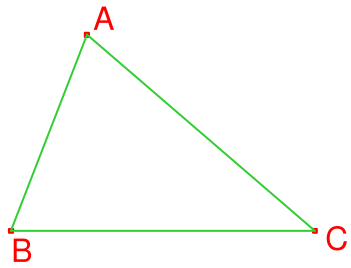
Discussão: ___________________

4. Dados dois pontos A e B, a reta r e a distância d. Obter um ponto X que diste d de r e seja eqüidistante de A e B.



Discussão: ____________________

5. Obter um triângulo isósceles MNP de base NP que possua a mesma área do triângulo dado ABC, tal que sua base coincida com a base BC.



Discussão: ____________________

6. Construir um quadrado com 100mm de lado, dividir horizontalmente o quadrado. Na parte superior construir linhas paralelas distantes 10mm umas das outras e na parte inferior construir linhas paralelas entre si, verticalmente, e distantes 10mm umas das outras.

7. Reproduzir a figura abaixo, construindo um quadrado com 100mm de lado e divida os lados superior e lateral esquerdo em 7 partes iguais, a partir destes pontos, construir retas paralelas e concluir o desenho conforme apresentado na figura 8.

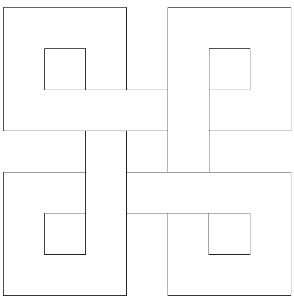


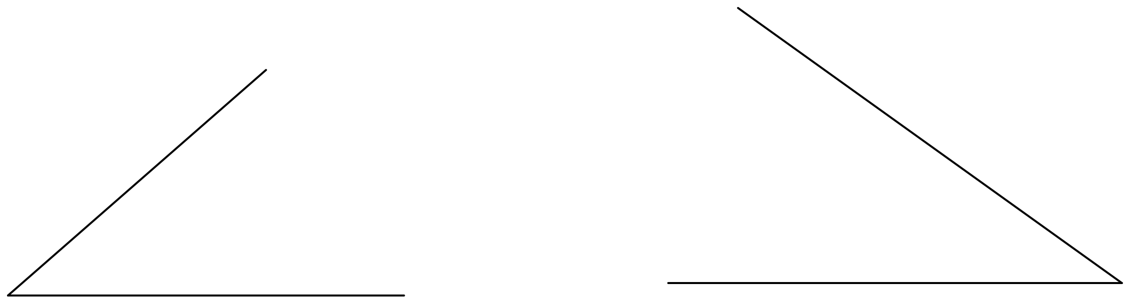
Figura 8 - Paralelas

1.4 LUGAR GEOMÉTRICO 4 - BISSETRIZ

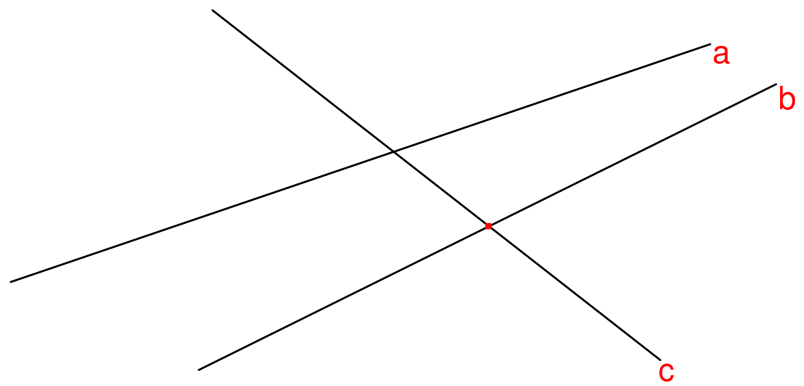
Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de duas retas concorrentes dadas é composto por duas outras retas, perpendiculares entre si e bissetrizes dos ângulos formados pelas retas dadas.

Exercícios:

1. Construir a bissetriz do ângulo dado.

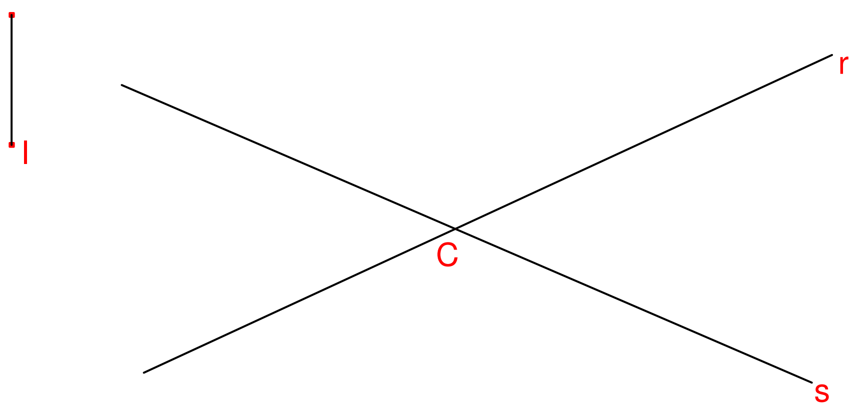


2. Dadas as retas a, b e c. Construir uma circunferência tangente às retas b e c, sabendo-se que o seu centro pertence à reta a.



Discussão: ____________________

3. Dadas duas retas r e s concorrentes num ponto C e uma distância *l*. Construir uma circunferência tangente às retas r e s, sabendo-se que a distância do seu centro a C é igual a *l*.



Discussão: ____________________

4. Construir a circunferência inscrita ao triângulo ABC dado, e as circunferências ex-inscritas. Dados: a=90mm, b=75mm, c=60mm.

Definição: Uma circunferência é dita inscrita a um triângulo quando ela for tangente aos lados do triângulo. O centro da circunferência inscrita é denominado incentro. Uma circunferência é ex-inscrita ao triângulo quando ela for tangente a um dos lados e aos prolongamentos dos outros dois. O centro da circunferência ex-inscrita é denominado de ex-incentro.

1.5 ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Definição 1: Em uma circunferência de centro O e raio r, define-se:

- Corda: é qualquer segmento que possui as extremidades em dois pontos da circunferência;
- Diâmetro: é qualquer corda que passa pelo centro de uma circunferência;
- Dois pontos A e B de uma circunferência dividem-na em duas partes, $\overset{\frown}{AMB}$ e $\overset{\frown}{ANB}$. Cada parte denomina-se arco circular ou simplesmente arco e os pontos A e B são os extremos (Figura 09).

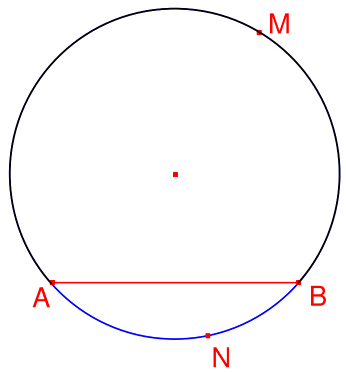


Figura 09 – Arcos de circunferência

Notação: $\overset{\frown}{AMB}$, $\overset{\frown}{ANB}$, $\overset{\frown}{AB}$ (esta última representação vale somente para o menor arco)

Observação: A corda que une os extremos de um arco subtende o arco.

Definição 2: Ângulo central é todo o ângulo que possui o vértice no centro da circunferência e cada um de seus lados contém um raio da mesma (Figura 10).

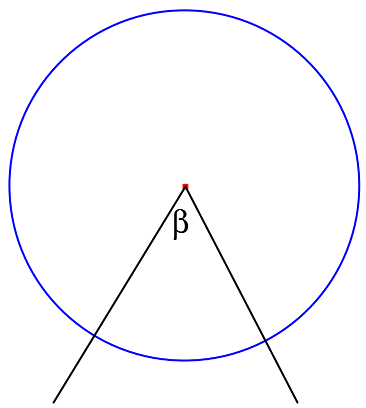


Figura 10 – Ângulo Central

Observações:

1. O arco interceptado por um ângulo central é correspondente a esse ângulo, ou ele é chamado arco que o ângulo central enxerga.
2. A medida angular de um arco de circunferência é a medida do ângulo central correspondente.

Definição 3: Ângulo inscrito é todo ângulo convexo que possui seu vértice sobre a circunferência e cada um de seus lados contém uma corda da mesma (Figura 11).

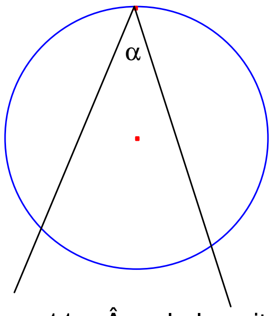


Figura 11 – Ângulo Inscrito

Observações:

1. O arco interceptado por um ângulo inscrito é correspondente a esse ângulo, ou ele é chamado arco que o ângulo inscrito enxerga.

2. Quando os lados de um ângulo inscrito e de um ângulo central cortam-se sobre os mesmos pontos sobre a mesma circunferência então eles são ditos ângulos correspondentes na circunferência.

Definição 4: Ângulo de segmento (ou ângulo semi-inscrito) é o ângulo formado por uma corda e a tangente à circunferência conduzida por uma das extremidades da corda (Figura 12).

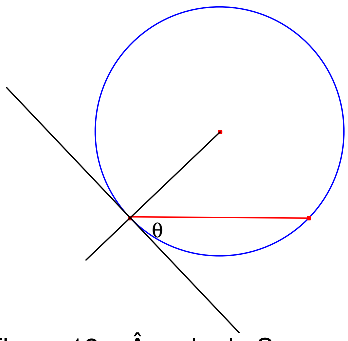


Figura 12 – Ângulo de Segmento

Propriedade 1: A medida do ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos outros dois ângulos internos não adjacentes (Figura 13).

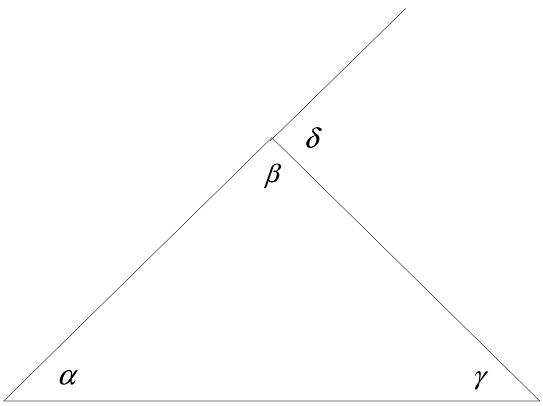
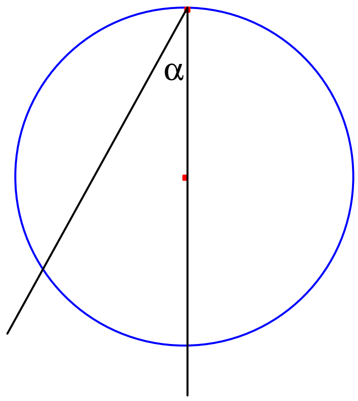
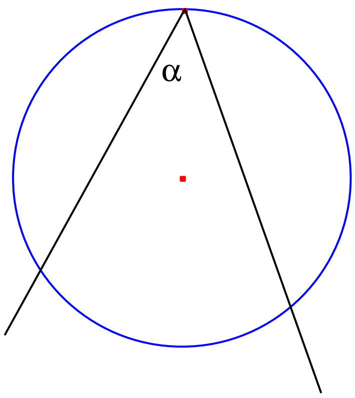
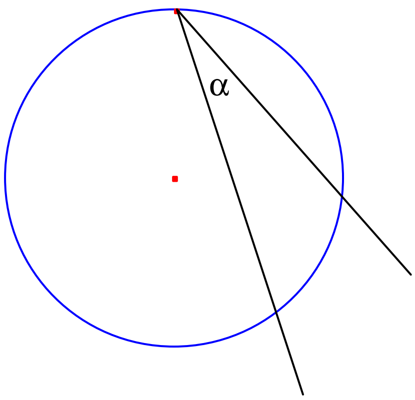


Figura 13 – Ângulo Externo

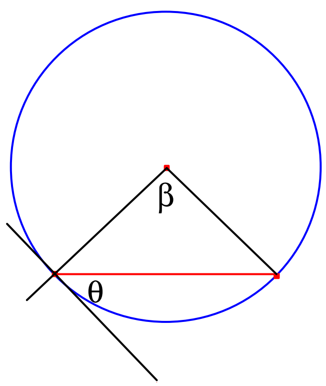
Propriedade 2: Todo ângulo inscrito numa circunferência mede a metade do ângulo central correspondente.







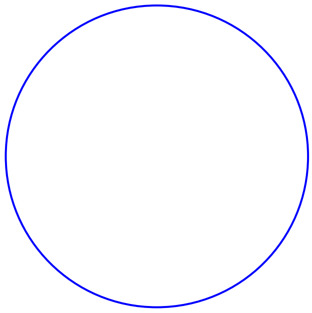
Propriedade 3: A medida de um ângulo de segmento é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.



Observação: Pode-se dizer, então, que o ângulo de segmento, assim como o ângulo inscrito, tem sua medida igual à metade do ângulo central correspondente.

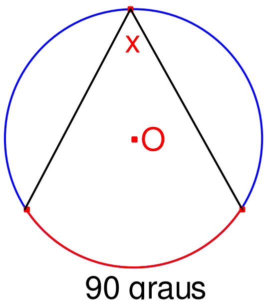
Exercícios Propostos:

1. Obter o raio de uma circunferência dada, sem utilizar o seu centro.

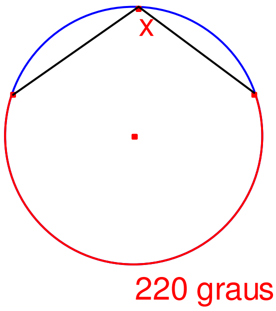


2. Calcular o valor de x.

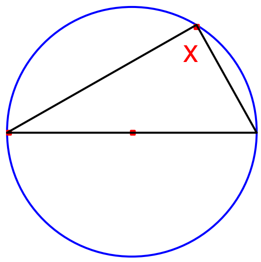
a)



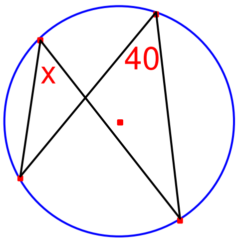
b)



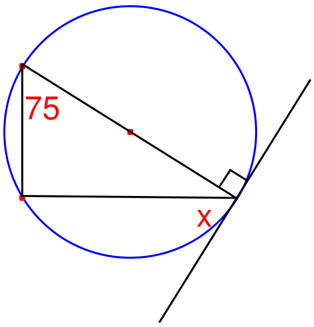
c)



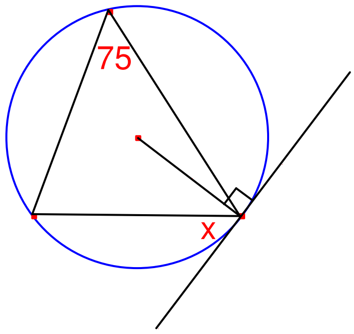
d)



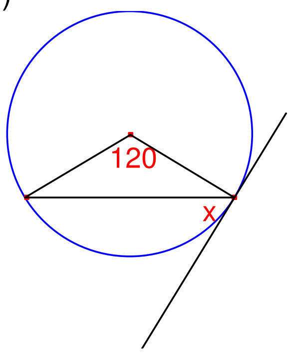
e)



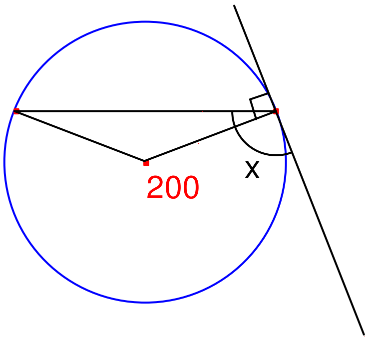
f)



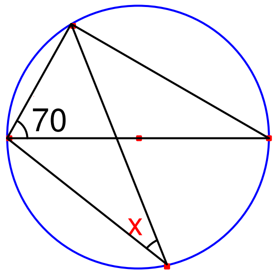
g)



h)

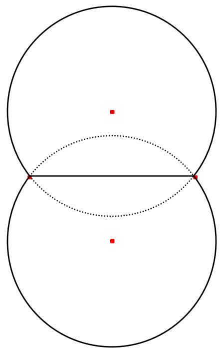


i)



1.6 Lugar Geométrico 5 – Arco Capaz

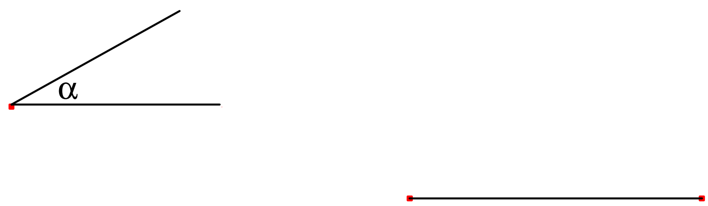
Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano que enxergam um segmento AB segundo um ângulo de medida α constante é o par de arcos capazes do ângulo α descrito sobre $\overline{AB}$.



Exercícios:

1. Construir o par de arcos capazes de um segmento AB dado segundo um ângulo dado α.

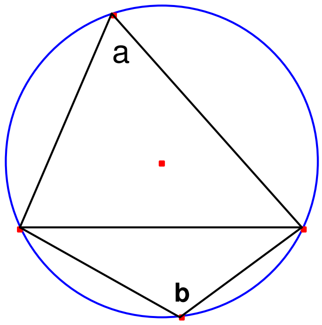
a)



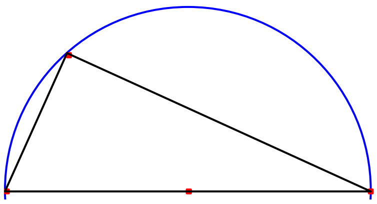
b) $\alpha = 60º$

c) $\alpha=120º$

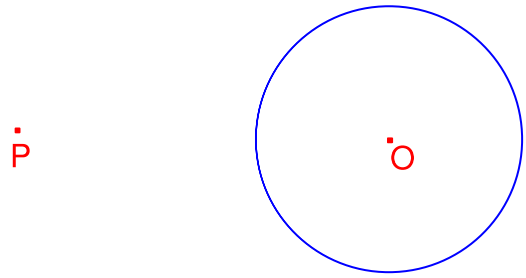
2. Quanto vale a em função de b?



3. Quanto vale o ângulo inscrito numa semicircunferência?



4. São dados uma circunferência λ de centro O e um ponto P exterior a mesma. Traçar pelo ponto P retas tangentes a λ.



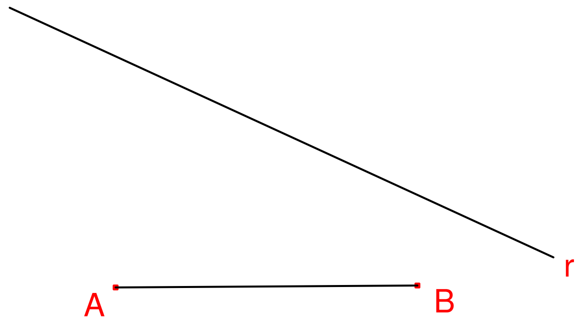
5. Construir um triângulo ABC dados o lado a=50mm, a altura h_a=30mm e o ângulo Â=60º.

<u>Exercícios Propostos</u>:

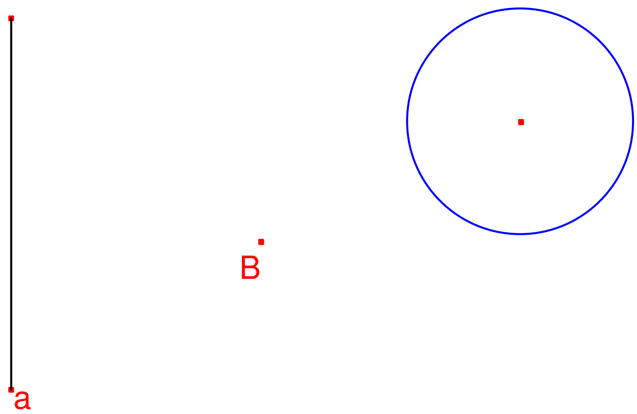
1. Construir os arcos capazes do segmento $\overline{AB}$=4cm segundo os ângulos de 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, e 150°.

2. Construir um triângulo ABC, sendo dados o lado a=50mm, a altura relativa ao lado a, h_a=30mm e o ângulo e Â=60°.

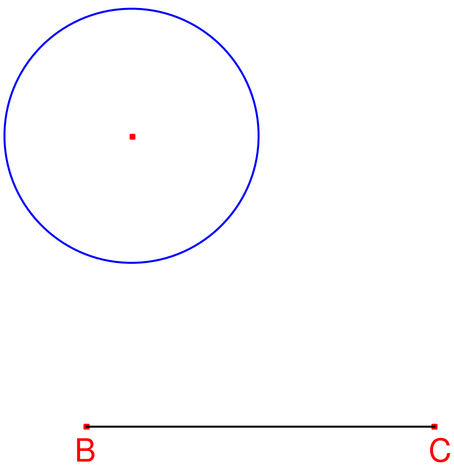
2. Construir um triângulo ABC sendo dados dois vértices A e B, sabendo-se que o vértice C pertence à reta dada r e que $\hat{C}$ mede 60º.



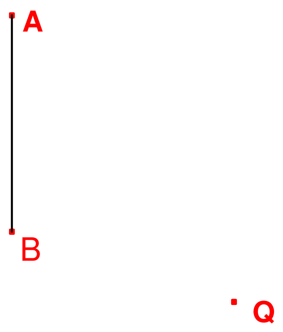
3. Construir um triângulo ABC, dados o vértice B, a circunferência inscrita e o lado a.



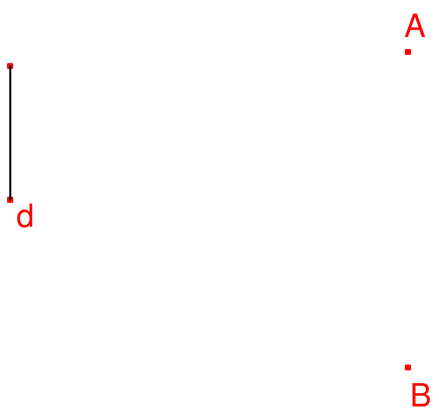
4. São dados dois pontos B e C e uma circunferência λ. Construir um triângulo ABC, sabendo-se que A pertence a λ e Â=60o.



5. Dados dois pontos P e Q e um segmento AB determine um ponto X que seja eqüidistante de P e Q, sabendo-se que X enxerga AB segundo um ângulo de 30°.



6. Dados dois pontos A e B e uma distância d, determine um ponto P distante d de A tal que o ângulo APB seja 60°.



2. OPERAÇÕES COM SEGMENTOS

2.1 DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM PARTES PROPORCIONAIS

Teorema de Tales: um feixe de retas concorrentes corta um outro feixe de retas paralelas segundo segmentos proporcionais.

Exercícios:

1. Dividir um segmento AB em n partes iguais.

2. Dividir um segmento AB em partes proporcionais a segmentos dados.

3. Dividir um segmento AB em partes proporcionais a números dados.

Exercícios Propostos:

1. Dados os segmentos 2p=15cm, q=5cm, r=3,5cm e s=4cm. Construir um triângulo ABC de perímetro igual a 2p, sabendo-se que os lados a, b e c são proporcionais a q, r e s, respectivamente.

2. Construir um triângulo ABC, sendo dados a+b = 9cm, o ângulo C = 60^{o}, e sabendo-se que a e b são proporcionais a 2 e 3, respectivamente.

3. Dado um segmento m, obter um segmento x, tal que x = 2/5m.

2.2 QUARTA PROPORCIONAL

Definição: Dados três segmentos (ou números) a, b e c, a quarta proporcional aos três segmentos é um segmento (ou número) x, tal que, na ordem dada, eles formem uma proporção, conforme equação 2:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x} \tag{2}$$

Exercício:
1. Dados os segmentos a, b e c obter a quarta proporcional nesta ordem.

2.3 TERCEIRA PROPORCIONAL

Definição: Dados dois segmentos (ou números) a e b, a terceira proporcional aos dois segmentos é um segmento x, tal que, na ordem dada, eles formem uma proporção, conforme equação 3 :

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{x} \tag{3}$$

Exercícios:
1. Obter a terceira proporcional aos segmentos a e b, nessa ordem.

2. Dados os segmentos l=3cm, m=3,5cm e n=4cm. Construir um triângulo ABC, sabendo-se que Â=60°, a=(m.n)/l e b=l^2/n.

2.4 MÉDIA ARITIMÉTICA

A média aritimética entre dois segmentos é a soma dois, dividida por dois. A forma geométrica é dada pela equação 4.

$$x = \frac{a+b}{2} \tag{4}$$

2.5 MÉDIA GEOMÉTRICA (OU MÉDIA PROPORCIONAL)

Dados dois segmentos p e q, a média geométrica entre eles é o segmento x, tal que (Eq. 5):

$$\frac{p}{x} = \frac{x}{q} \quad \text{ou} \quad x^2 = p.q \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{p.q} \tag{5}$$

<u>Propriedade</u>: Sejam *m* e *n* as projeções ortogonais dos catetos *b* e *c*, respectivamente, sobre a hipotenusa *a* de um triângulo retângulo ABC. Tem-se então que: $b^2=a.m$, $c^2=a.n$ e $h^2=m.n$, sendo *h* a altura relativa ao ângulo reto. Ver Figura 9.

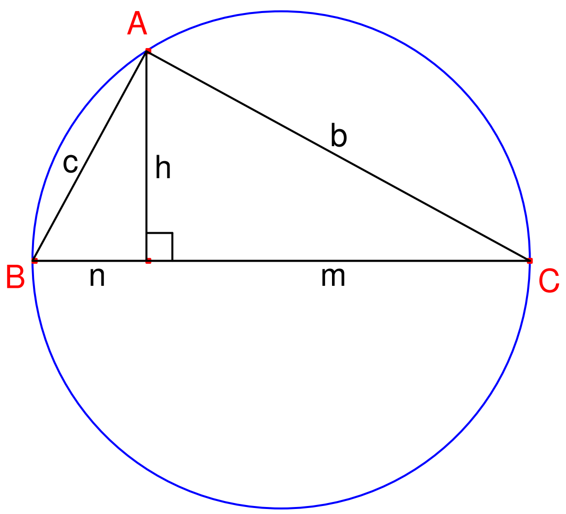
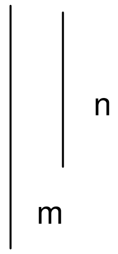


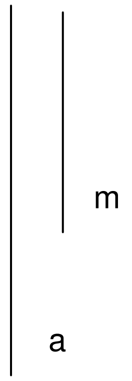
Figura 9 – Propriedades no triângulo Retângulo

<u>Exercícios</u>:

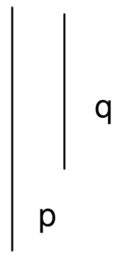
1. Construir um triângulo retângulo sendo dados as projeções *m* e *n* dos catetos *b* e *c*, respectivamente.



2. Construir um triângulo retângulo sendo dados a hipotenusa *a* e a projeção *m* do cateto *b* sobre a hipotenusa.



3. Obter a média geométrica entre os segmentos p e q dados



4. Dado o segmento p, obter:
   a) $x = p\sqrt{2}$
   b) $y = p\sqrt{3}$
   c) $z = p\sqrt{4}$
   d) $t = p\sqrt{10}$

Exercícios Propostos:

1. Dados a, b e c. Obter um segmento x tal que $x^2 = (a+b).c$.

2. Dados a, b e c. Obter um segmento x tal que $x^2 = a^3.b/c^2$.

3. Dado o segmento p, obter t, x, y, z tal que $\frac{t}{\sqrt{1}} = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z}{\sqrt{4}} = \frac{p}{\sqrt{5}}$.

2.6 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Teorema de Pitágoras: Num triângulo retângulo de hipotenusa *a* e catetos *b* e *c* tem-se que $a^2=b^2+c^2$.

Exercícios:

1. Dados p e q obter x, tal que $x^2 = p^2 + q^2$.

2. Dados p e q obter x, tal que $x^2 = p^2 - q^2$.

3. Dados p, q e r obter x tal que $x^2 = p^2 + q^2 - r^2$.

4. Dados p, q e r obter um segmento x tal que $x^2 = p^2 + q^2 + r^2$.

2.7 SEGMENTO ÁUREO (DIVISÃO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO)

Definição: Dado um segmento $\overline{AB}$, efetua-se uma divisão áurea de AB por meio de um ponto P, quando este ponto divide o segmento em duas partes desiguais, tal que a maior (esta é o segmento áureo) é média geométrica entre a menor e o segmento todo.

Assim, o segmento $\overline{AP}$ é áureo do segmento dado $\overline{AB}$ quando:

$$\overline{AP}^2 = \overline{PB}.\overline{AB} \text{ ou, é o mesmo que } \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AP}}$$

Exercícios:

1. Dado o segmento $\overline{AB}$ obter o seu segmento áureo $\overline{AP}$.

Consideração:

Seja o segmento $\overline{AB}$ de medida a, como queremos a medida do segmento áureo de $\overline{AB}$ consideremos $\overline{AP}$=x, onde x é uma medida a ser determinada. Logo, $\overline{PB}$=(a-x).

Como $\overline{AP}$ deve ser áureo de $\overline{AB}$ então deve satisfazer a seguinte relação: $\overline{AP}^2 = \overline{AB}.\overline{PB}$ ou $x^2 = a.(a-x)$

$$x^2 = a^2 - a.x$$
$$x^2 + a.x - a^2 = 0$$

Portanto, a solução desta equação é:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} - \dfrac{a}{2} \\ x'' = \dfrac{-a - a\sqrt{5}}{2} = -\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2} + \dfrac{a}{2}\right) \end{cases}$$

Consideremos destas duas raízes apenas x' (por ter medida menor que a=$\overline{AB}$). Para determinarmos a medida do segmento áureo devemos obter um segmento com a medida x, ou seja, obter os segmentos de medidas:

$\frac{a\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{a}{2}$. Basta observar que estas medidas são hipotenusa e cateto de um triângulo retângulo de catetos a e a/2.

Construção:

2. Dado o segmento AB obter AQ, do qual AB seja áureo.

Consideração:

Conhecemos agora a medida do segmento áureo $\overline{AB}$, fazendo $\overline{AB}$=a e $\overline{AQ}$=x (pois devemos achar sua medida) então $\overline{BQ}$=(x-a).

Como $\overline{AB}$ deve ser áureo de $\overline{AQ}$ então pela definição devemos ter: $\overline{AB}^2 = \overline{BQ}.\overline{AQ}$. Ou seja, $a^2 = (x-a).x$

$$a^2 = x^2 - ax$$
$$x^2 - ax - a^2 = 0$$

Portanto, a solução desta equação é:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{a + a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} + \dfrac{a}{2} \\ x'' = \dfrac{a - a\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{a\sqrt{5}}{2} + \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

Consideremos apenas a primeira raiz x'. Assim, para obter a medida de $\overline{AQ}$ basta construir um triângulo retângulo, onde a e a/2 são catetos e $a\sqrt{5}/2$ será a hipotenusa.

Construção:

<u>Observações</u>:

a) Segundo Euclides, encontrar o segmento áureo é dividir um segmento em média e extrema razão.
b) A existência de duas raízes indica que existem dois pontos P e P_2 que dividem o segmento AB em duas partes desiguais, tal que a maior seja média geométrica entre a menor e o segmento todo. Mas somente o segmento AP é dito segmento áureo de AB.
c) $\dfrac{a\sqrt{5}}{2} - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \cong 0{,}618a$, $\dfrac{a\sqrt{5}}{2} + \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}(\sqrt{5} + 1) \cong 1{,}618a$ e $\Phi \cong 1{,}618$.

Exercícios Propostos:

1. Construir o segmento áureo de um segmento AB dado de 100mm de medida. Qual é, aproximadamente, a medida desse segmento?

2. Construir um retângulo áureo.

3. Construir uma espiral áurea.

4. Construir um triângulo ABC sendo dados o lado a, áureo do segmento p=6,5cm, a altura h_b=3cm, relativa ao lado b e o ângulo A=60º.

III – TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

1. CEVIANAS E PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

Definição 1: Ceviana é todo segmento que tem uma extremidade num vértice qualquer de um triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto a esse vértice.

Definição 2: O encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é único e chama-se circuncentro.

Propriedade 1: O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Observação: O circuncentro pode ser interno (no triângulo acutângulo) ou externo (no triângulo obtusângulo) ou pertencer a um dos lados, sendo, neste caso o seu ponto médio (no triângulo retângulo).

Definição 3: Mediana é toda ceviana que tem uma extremidade no ponto médio de um lado. O ponto de encontro das medianas é único e chama-se baricentro.

Propriedade 2: o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida do terceiro lado.

Propriedade 3: O baricentro de um triângulo divide cada mediana na razão de 2 para 1, a partir do vértice.

Observação: O baricentro é sempre interno ao triângulo.

Definição 4: Bissetriz interna é toda ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos adjacentes e congruentes. O ponto de encontro das bissetrizes internas é único e chama-se incentro.

Propriedade 4: O incentro é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

Observação: O incentro é sempre interno ao triângulo.

Definição 5: Altura é toda ceviana perpendicular a um lado ou ao seu suporte. O ponto de encontro das alturas de um triângulo é único e chama-se ortocentro.

Observação: O ortocentro pode ser interno (no triângulo acutângulo) ou externo (no triângulo obtusângulo) ou coincidir com um dos vértices, no caso, o do ângulo reto (no triângulo retângulo).

Definição 6: O triângulo $H_aH_bH_c$ é denominado triângulo órtico ou pedal.

2. CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS

Construir um triângulo significa determinar a posição dos seus vértices. Devem ser fornecidos sempre 3 elementos, um deles necessariamente linear, isto é, ou um lado ou uma altura ou uma mediana, etc.

Na discussão da quantidade de soluções pode-se analisar a posição na qual o triângulo foi desenhado e o tamanho obtido.

Exercícios:

1. Construir triângulo ABC, sendo dados:
- **1.1.** os três lados. a=5cm, b=4,5, c=5cm.
- **1.2.** dois lados e um ângulo adjacente. a=5cm, b=3,5cm, $\hat{B}=30°$.
- **1.3.** um lado e dois ângulos adjacentes. a=5cm, $\hat{B}=30°$, $\hat{C}=45°$.
- **1.4.** um lado, ângulo oposto e ângulo adjacente. a=4cm, $\hat{A}=45°$, $\hat{B}=22,5°$.
- **1.5.** dois lados e o ângulo oposto ao terceiro lado. a=4cm, b=3cm, $\hat{C}=60°$.

2. Construir o triângulo ABC, retângulo em A, dados:
- **2.1.** um cateto e o ângulo oposto. b=2cm, $\hat{B}=30°$.
- **2.2.** a hipotenusa e um ângulo adjacente. a=4cm, $\hat{B}=60°$.
- **2.3.** a hipotenusa e um cateto. a=5cm, c=2cm.
- **2.4.** os catetos. b=3,5; c=2cm.
- **2.5.** as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. m=2cm, n=3cm
- **2.6.** um cateto e a sua projeção sobre a hipotenusa. c=3,5cm; n=2cm.

3. Construir triângulo ABC, dados dois ângulos $\hat{B}=60°$ e $\hat{C}=45°$, e
- **3.1.** uma altura. h_a=3,5cm.
- **3.2.** uma mediana. m_a=4,5cm.
- **3.3.** uma bissetriz. b_a=4cm.
- **3.4.** o raio da circunferência circunscrita. R=3cm.
- **3.5.** o raio da circunferência inscrita. r=1,5cm.

4. Construir o triângulo ABC, dados
- **4.1.** dois lados e a altura relativa a um deles. a=3,5cm, c=2,5cm, h_a=2cm.
- **4.2.** um lado, altura relativa ao mesmo e um ângulo adjacente. a=3cm, h_a=2cm, $\hat{B}=30°$.
- **4.3.** um lado, um ângulo adjacente e a mediana relativa ao mesmo. a=4cm, $\hat{B}=45°$, m_a=2,5cm
- **4.4.** dois lados e a altura relativa ao terceiro lado. b=4,5cm, c=4cm, h_a=3cm.
- **4.5.** um lado, ângulo oposto e a altura relativa ao mesmo. a=3,5cm, h_a=2,5, $\hat{A}=45°$.
- **4.6.** um lado, altura relativa ao mesmo e altura relativa a outro lado. a=5cm, h_a=3,5cm, h_b=4cm.
- **4.7.** um lado e as alturas relativas aos outros lados. a=5cm, h_b=4cm, h_c=4,5cm.
- **4.8.** dois lados e a mediana relativa a um deles. a=5cm, c=4cm, m_c=4,5.
- **4.9.** um lado, mediana relativa ao mesmo e a altura relativa ao outro lado. a=6cm, m_a=3,5cm, h_b=5cm.
- **4.10.** dois lados e a mediana relativa ao terceiro. a=5cm, c=4cm, m_b=3,5.

4.11. as medianas. m_a=3cm, m_b=4cm, m_c=5cm.

4.12. um ângulo, mediana relativa ao lado oposto e outra mediana. Â=60°, m_a=5cm, m_c=4cm.

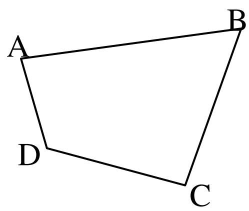
4.13. uma altura e uma mediana relativas ao mesmo lado e o raio da circunferência circunscrita. h_a=4cm; m_a=4,5cm; R=3,5cm

4.14. um lado, um ângulo e o raio da circunferência inscrita. b=6cm, r=1,5cm; Â=90°.

4.15. os pontos médios dos lados em posição. M_aM_b=3,5cm, M_aM_c=3cm, M_bM_c=2,5.

3. Algumas Propriedades dos Quadriláteros

- Num quadrilátero qualquer ABCD a soma dos ângulos internos é 360º.
- Um quadrilátero ABCD é inscritível quando a soma de seus ângulos opostos é 180º.
- Um quadrilátero ABCD é circunscritível quando as somas das medidas de seus lados opostos são iguais.



4. Construção de Quadriláteros

Um quadrilátero pode ser entendido como uma composição de dois triângulos. Para construí-lo, é necessário conhecer 5 de seus elementos, sendo necessariamente um deles linear:

- Com três deles, pode-se construir um dos triângulos em que o quadrilátero fica dividido por uma de suas diagonais;
- Com os outros dois determina-se o quarto vértice.

Observação: Quando se trata de um quadrilátero notável, há dados que já estão implícitos.

5. Quadriláteros Notáveis

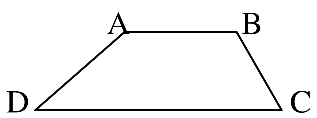
5.1. Trapézio

Definição: Trapézio é todo quadrilátero que possui um par, e somente um par, de lados opostos paralelos.

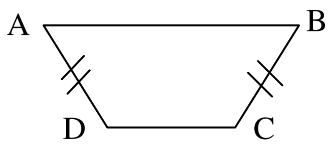
A distância entre as bases é chamada de altura do trapézio.

Os trapézios se classificam em:

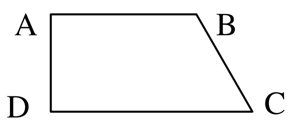
- Escaleno: quando os lados não-paralelos não são congruentes (a)
- Isósceles: quando os lados não-paralelos são congruentes (b)
- Retângulo: quando um dos os lados não-paralelos é perpendicular às bases (c)



(a)



(b)



(c)

Propriedade: Num trapézio isósceles os ângulos de uma mesma base são iguais e as diagonais são também são iguais.

5.2. PARALELOGRAMO

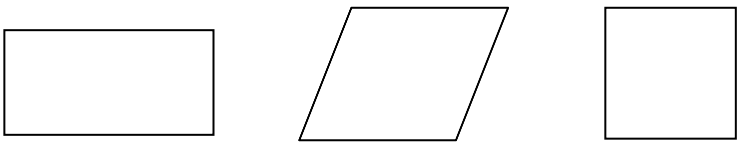
Definição: Paralelogramo é todo quadrilátero que possui os pares de lados opostos respectivamente paralelos.

Propriedades:

Os ângulos opostos são iguais, os lados opostos são iguais e as diagonais interceptam-se em no ponto médio.

Os paralelogramos se classificam em:

- Paralelogramos
- Retângulo: quando possui ângulos retos.
- Losango: quando possui os quatro lados congruentes.
- Quadrado: quando possui os ângulo retos e os quatro lados congruentes.



O retângulo, o quadrado e o losango possuem todas as propriedades dos paralelogramos. E, além disso, possuem as seguintes propriedades:

- Em todo retângulo as diagonais são ________________________.

- Em todo losango as diagonais são ______________________ e ______________________ dos ângulos internos.

- Como todo quadrado é um retângulo, então suas diagonais são ______________________, e como ele também é losango, suas diagonais são _____________________________ e _____________________ dos ângulos internos.

Exercícios:

1. Construir um quadrado dado
1.1. o lado. a=3cm.
1.2. a diagonal. BD=4cm.
1.3. o segmento áureo do lado. a=3cm.
1.4. o raio da circunferência circunscrita. R=2,5cm.
1.5. o raio da circunferência inscrita. r=2cm.

2. Construir um retângulo dados
2.1. os lados. a=4cm, b=2,5cm.
2.2. diagonal e o lado. a=2,5, d=3,5.
2.3. diagonal e o ângulo formado pelas mesmas. d=4cm, α=120°.
2.4. o semi-perímetro p e a média proporcional m dos dois lados. p=8cm, m=3cm
2.5. um lado sabendo-se que o mesmo é áureo do outro. l=3cm.

3. Construir um losango dados:
3.1. as diagonais. AC=5cm, BD=3cm.
3.2. um lado e uma diagonal. AB=3cm, AC=4,5.
3.3. um lado e um ângulo. AB=3cm, $\hat{C}$=45°.

4. Construir um paralelogramo ABCD dados
4.1. os lados e um ângulo. AB=4cm, BC=7cm, $\hat{B}$=45°.
4.2. os lados e uma diagonal. AB=5cm, BC=3cm, AC=4cm.
4.3. as diagonais e um lado. AC=5cm, BD=4cm, BC=2,5cm.
4.4. as diagonais e o ângulo por elas formado. BD=4cm, AC=3cm, α=120°.
4.5. os lados e a altura. BC=5cm, AB=3cm, h_{BC}=2,5.

5. Construir um trapézio ABCD dados
5.1. os lados. AB=5,5cm, BC=3,5cm, CD=4cm, AD=3cm.
5.2. as bases e as diagonais. AB=4,5cm, CD=3,5cm; BD=5,5cm; AC=5cm
5.3. as bases, uma diagonal e o ângulo formado pelas diagonais. AB=4,5cm; AC=4cm, DC=2,5, AÊB=120° (E é o ponto de interseção das diagonais).
5.4. uma base, dois lados e o ângulo formado por um dos lados com a base dada. AB=4,5cm, AD=3cm, BC=2,5, Â=60°.

6. Construir um trapézio isósceles dados
6.1. as bases e altura. AB=3cm, CD=4,5cm, h=2cm.
6.2. as bases e uma diagonal. AB=4cm, CD=3cm, AC=4cm.
6.3. as bases e o raio da circunferência circunscrita. AB=5,5cm, CD=3cm, R=3cm.

7. Construir um trapézio retângulo em A dados
7.1. as bases e a altura. AB=3,5cm, CD=2cm, h=2,5cm.
7.2. uma base, um lado e a altura. AB=3,5cm; BC=2,5cm; h=2cm.
7.3. uma base, a soma da outra base com um lado e a altura. AB=4cm, s=6cm, h=2cm.

8. Construir um quadrilátero qualquer dados
8.1. os lados e uma diagonal. AB=5,5cm; BC=3,5cm; CD=4,5cm; DA=2cm; AC=6cm.
8.2. os lados e um ângulo. AB=5cm; BC=3cm; CD=5,5cm; DA=5cm; $\hat{B}$=105°.

IV - TANGÊNCIA E CONCORDÂNCIA

1. PROPRIEDADES DE TANGÊNCIA

Definição 1: A tangente a uma curva é uma reta que tem um só ponto em comum com esta curva.

Propriedade 1: Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Definição 2: Duas curvas são tangentes num ponto dado T, quando as tangentes a essas curvas nesse ponto são coincidentes.

Propriedade 2: Se duas circunferências são tangentes então o ponto de tangência e os centros são colineares.

Observação: Duas circunferências podem se tangenciar interna ou externamente.

2. PROPRIEDADES DE CONCORDÂNCIA

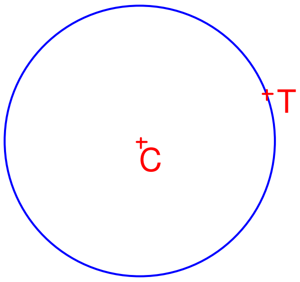
Definição: Concordar duas linhas é reuni-las de forma tal que nos pontos de contato se possa passar de uma para a outra sem reversão ou ângulo. Ponto de concordância é o ponto de contato das linhas concordantes (o ponto de concordância entre duas linhas concordantes corresponde ao ponto de tangência entre duas linhas tangentes). Centro de concordância é cada um dos centros das curvas concordantes.

Propriedades de concordância:

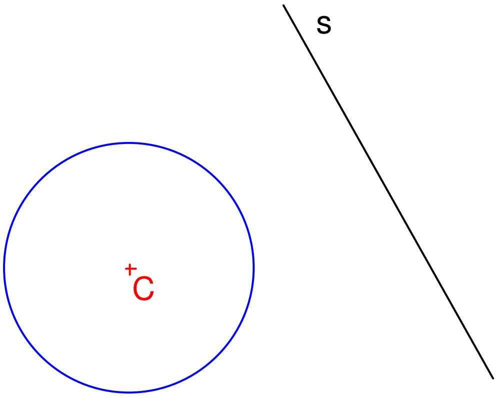
1. Um arco e uma reta estão em concordância num ponto quando a reta é tangente ao arco nesse ponto.
2. Na concordância de reta com arco de circunferência, o ponto de concordância e o centro de concordância estão sobre uma mesma perpendicular.
   Dois arcos de circunferência estão em concordância num ponto quando admitem nesse ponto uma tangente comum.

3. PROBLEMAS DE TANGÊNCIA

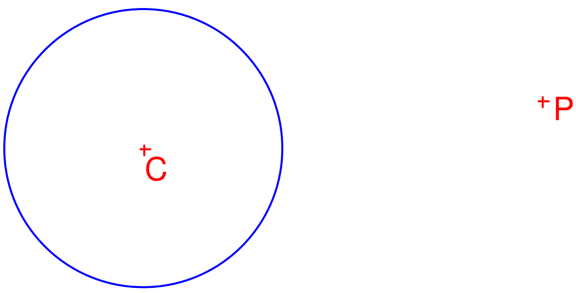
1. Traçar reta tangente a uma circunferência (C, m) dada, por um ponto da mesma.



2. Traçar retas tangentes a uma circunferência (C, m) paralelas a uma reta s dada.

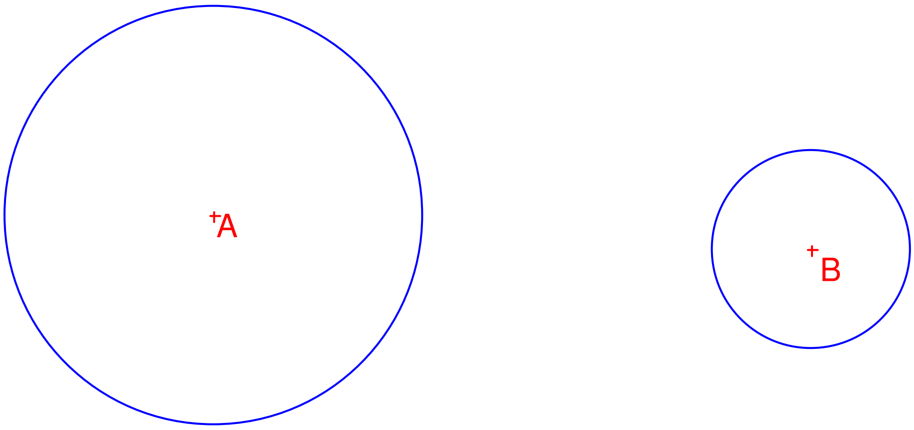


3. Traçar tangentes a uma circunferência (C,m) dada pelo ponto P.

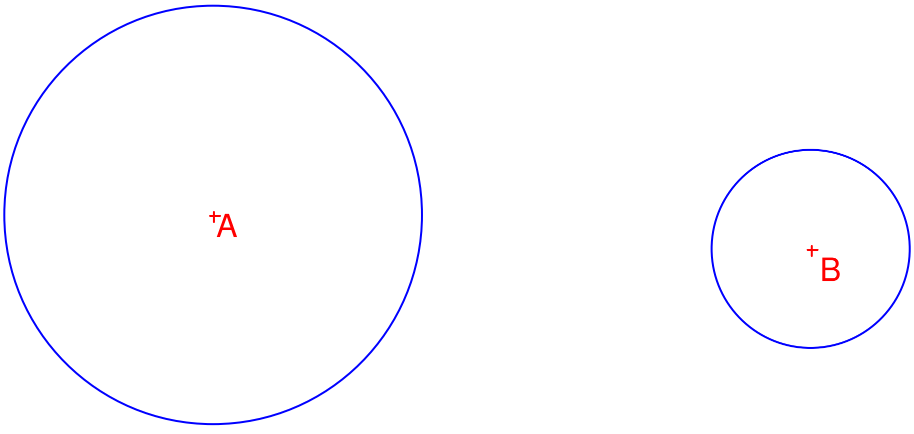


4. Traçar retas tangentes comuns a duas circunferências (A, m) e (B, n) dadas.

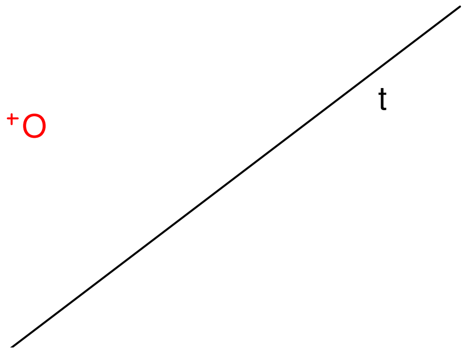
4.1. Tangentes exteriores



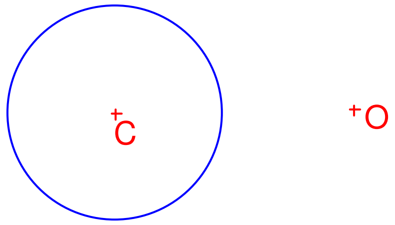
4.2. Tangentes interiores



5. Traçar circunferências de centro O dado, tangentes a reta t dada.

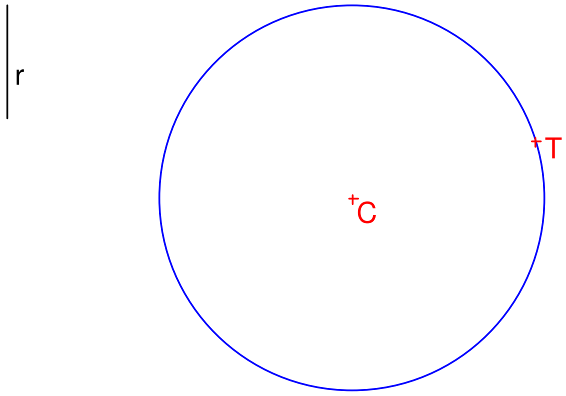


6. Traçar circunferências de centro O dado, tangentes a circunferência (C, m).

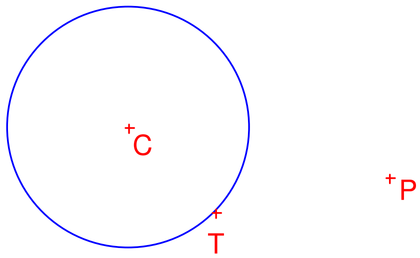


7. Traçar circunferências de raio r, tangentes à reta t num ponto T da mesma.

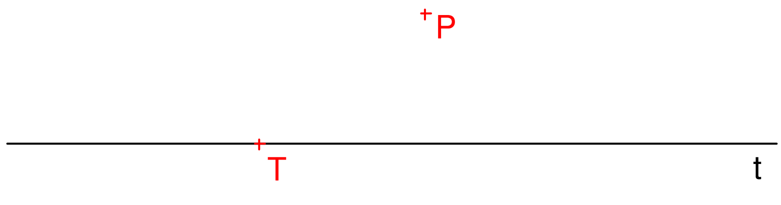
8. Construir as circunferências de raio r, tangentes à circunferência (C, m) num ponto T da mesma.



9. Traçar circunferência que passa por um ponto P e é tangente a circunferência (C, m) em T.

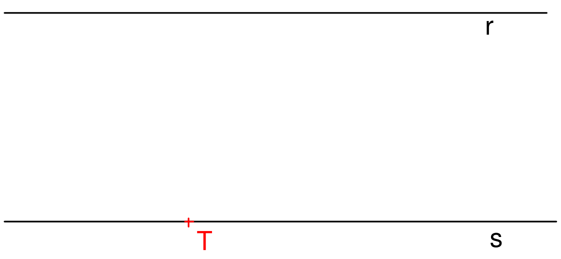


10. Traçar circunferências que passam pelo ponto P e são tangentes a reta r em T.

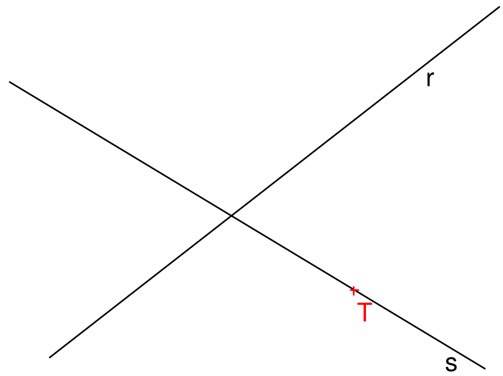


11. Traçar circunferências tangentes às retas r e s, dado o ponto de tangência T sobre uma delas.

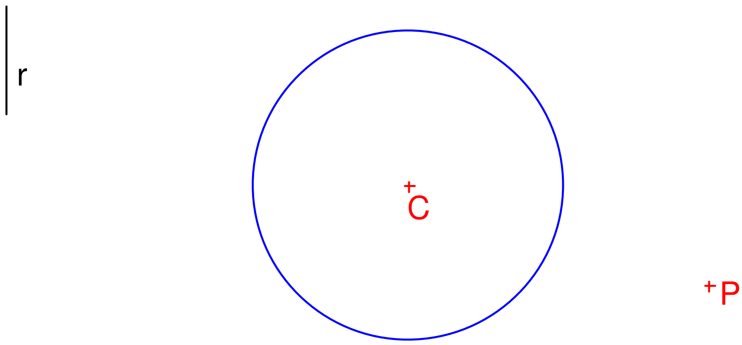
a) r e s são paralelas



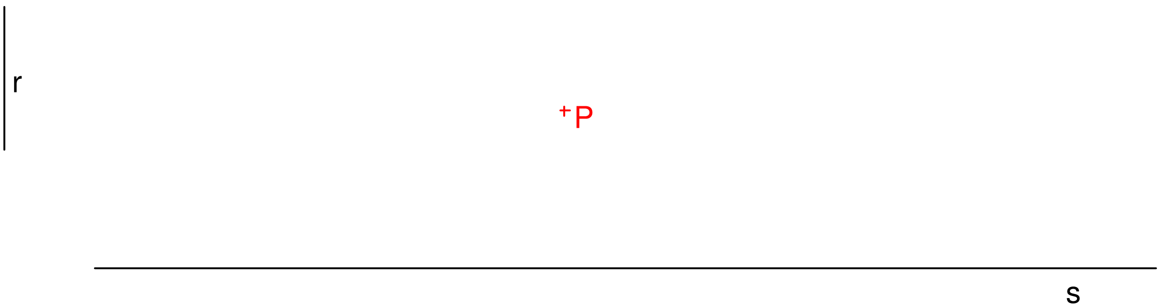
b) r e s são concorrentes



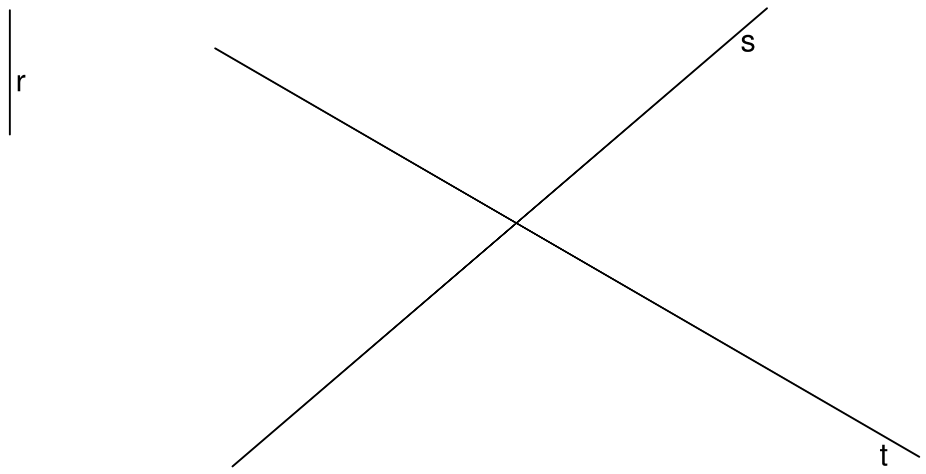
12. Traçar circunferências de raio r, que passam pelo ponto P e que sejam tangentes à circunferência (C, m).



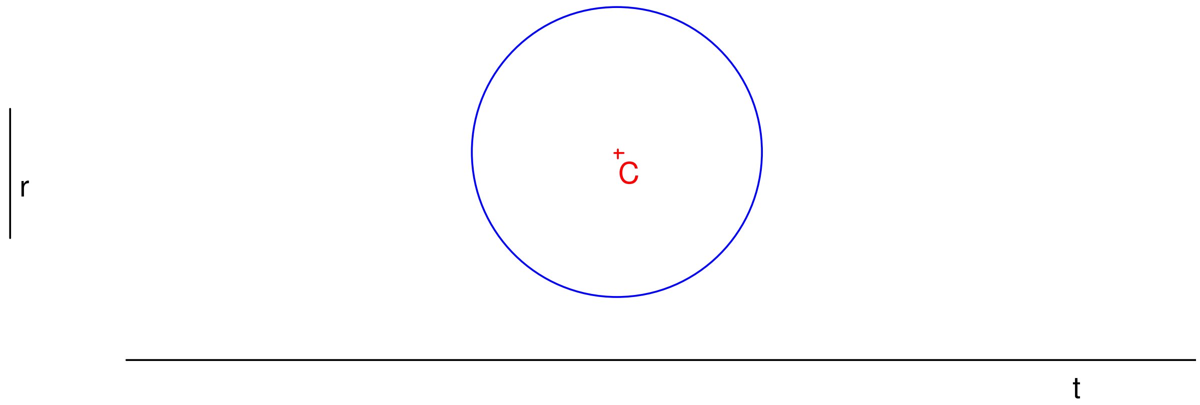
13. Traçar circunferências de raio r, que passem pelo ponto P e que sejam tangentes à reta s.



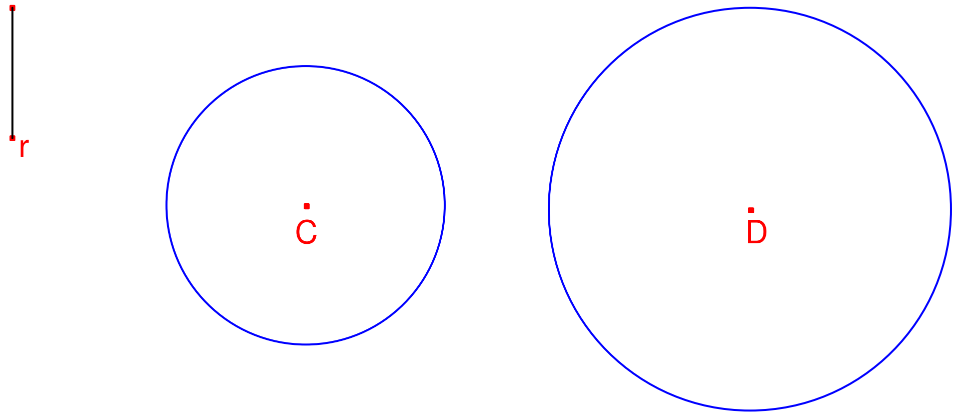
Traçar circunferências de raio r, tangentes às retas s e t.



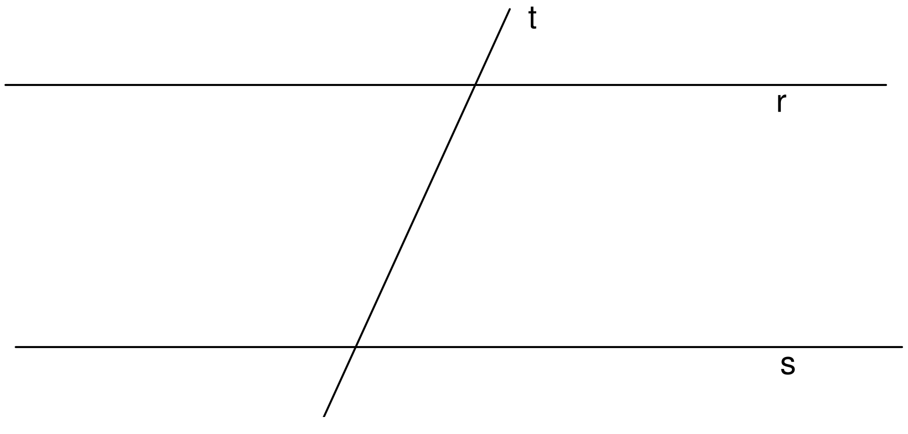
15. Traçar circunferências de raio r, tangentes a reta t e a circunferência (C,m).



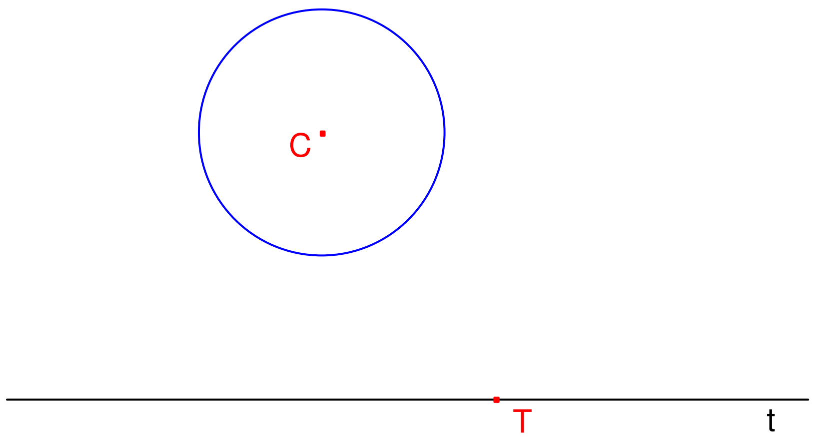
16. Traçar circunferências de raio r, tangentes às circunferências (C,m) e (D,n).



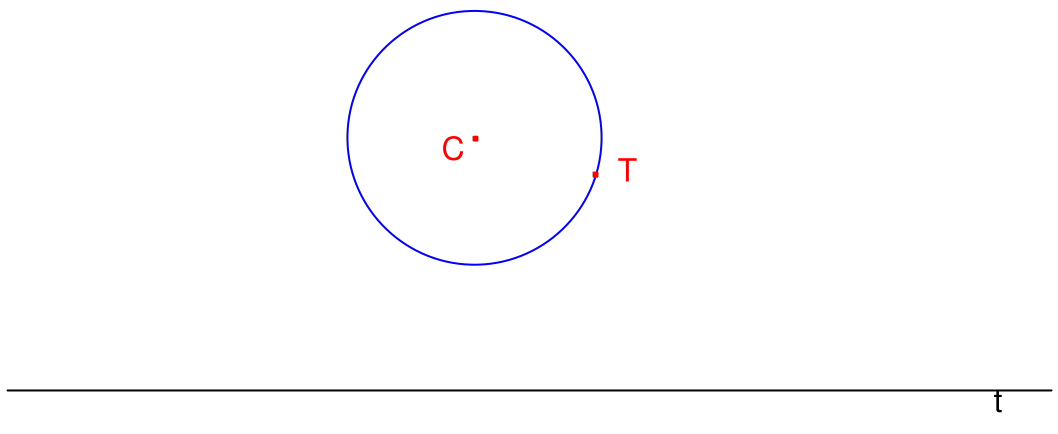
17. Traçar circunferências tangentes às retas r, s e t, sendo r e s paralelas.



18. Traçar circunferências tangentes à reta t em T e à circunferência (C,m).



19. Traçar circunferências tangentes à reta t e à circunferência (C,m) em T.



V - Divisão, Retificação e Desretificação da Circunferência e Polígonos Regulares

1. Divisão da Circunferência em Partes Iguais

Dividir a circunferência em partes (ou arcos) iguais é o mesmo que construir polígonos regulares. Isso porque os pontos que dividem uma circunferência em um número n (n>2) qualquer de partes iguais são sempre vértices de um polígono regular inscrito na mesma.

Ao dividir uma circunferência em n partes iguais, tem-se também a divisão da mesma em 2n partes, bastando para isso traçar bissetrizes.

Existem processos exatos e aproximados para a divisão da circunferência. Se existe um processo exato para divisão da circunferência este deve ser utilizado (e não um aproximado).

1.1 Processos Exatos

Ao dividir a circunferência em n partes iguais, divide-se o ângulo central de 360^o em n partes também iguais. Logo, o ângulo central (vértice no centro e lados passando por vértices consecutivos do polígono) correspondente à divisão da circunferência em n partes iguais medirá $360^o/n$. O lado de um polígono regular de n lados é denotado por l_n.

Problemas:

1) Dividir uma circunferência em n = 2, 4, 8, 16,... = 2.2^m partes; $m \in N$

Medida do l_4 numa circunferência de raio r é $l_4 = r\sqrt{2}$.

n	Ângulo Central	Polígono Regular
2	180^o	2 arcos capazes de 90^o
4	90^o	Quadrado
8	45^o	Octógono
16	$22,5^o$	Hexadecágono

2) Dividir uma circunferência em n = 3, 6, 12, ... = 3.2^m partes; $m \in N$

Medida do l_6 numa circunferência de raio r é l_6 = r.
Medida do l_3 numa circunferência de raio r é l_3 = $r\sqrt{3}$.

n	ÂNGULO CENTRAL	POLÍGONO REGULAR
3	120°	Triângulo equilátero
6	60°	Hexágono
12	30°	Dodecágono

3) Dividir uma circunferência em n = 5, 10, 20, ... = 5.2^m partes; $m \in N$

Propriedade: Para uma mesma circunferência, o l_5 é hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são o l_6 e l_{10}.

n	ÂNGULO CENTRAL	POLÍGONO REGULAR
5	72°	Pentágono
10	36°	Decágono
20	18°	Icoságono

Exercícios:

1) Construir os polígonos regulares de n lados sendo dado a medida do lado l.

a) n = 3
b) n = 4
c) n = 5
d) n = 6
e) n = 8

1.2 Processos Aproximados

Para dividir uma circunferência em 7, 9, 11, 13,... partes iguais, utiliza-se processos aproximados.

Processo de Rinaldini: Divide-se o diâmetro em n partes iguais, tantas quantas se quer dividir a circunferência. Obtendo os pontos A e B. Construir uma circunferência de centro A e raio igual ao diâmetro da mesma, e outra circunferência de centro B e raio igual ao diâmetro da circunferência, determinando os pontos P e Q. Unir os pontos P e Q aos pontos de divisão do diâmetro, utilizando os pares ou os ímpares.

1.3 Polígonos Estrelados

Definição: Polígono estrelado é um polígono cujos ângulos são alternadamente salientes e reentrantes, e cujos lados pertencem a uma linha poligonal fechada que é percorrida sempre no mesmo sentido.

Propriedade: Pode-se obter tantos polígonos estrelados de n vértices quantos números p há, exceto a unidade, menores que a metade de n e primos com n.

Definição: Polígono regular estrelado é aquele que se forma de cordas iguais e onde há lados iguais e ângulos iguais.

Processo Geral de Construção: Para obter um polígono regular estrelado de n vértices, deve-se dividir a circunferência em n partes iguais, e unir os pontos de divisão de p em p, sendo que:

$p < n/2$, $p \neq 1$ e p e n primos entre si.

Exercícios:

1. Construir os polígonos estrelados de n lados.
   a) Para n=7
   b) Para n=8
   c) Para n=15

2. Dada uma circunferência de centro O e raio r=3cm, construir os seguintes polígonos regulares estrelados:
   a) Pentágono (n=5, p=2)
   b) Octógono (n=8, p=3)
   c) Decágono (n=10, p=3)

3. Quantos polígonos regulares estrelados distintos podem ser traçados quando uma circunferência está dividida em 20, 24, 30 e 36 partes iguais?

4. Construir o pentágono regular estrelado dado a medida a=4cm do seu lado.

2. RETIFICAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Retificar uma circunferência consiste em obter o seu perímetro. Ou seja, obter seu comprimento C, tal que $C = 2\pi r$.

Considere o seguinte problema:

Obter o lado l de um quadrado cuja área seja igual à de um círculo de raio r conhecido, utilizando apenas régua e compasso. (Problema da quadratura do círculo).

Como as áreas devem ser iguais então devemos ter $l^2 = \pi r^2 = \pi r.r$, logo, l é média geométrica entre πr e r.

Em 1882, Lindemann (1852-1939) demonstrou que a quadratura do círculo é impossível utilizando apenas régua e compasso, ou seja, que é impossível obter graficamente o valor πr.

Desta forma, foram desenvolvidos vários processos pelos quais se obtém <u>valores aproximados</u> para a construção do segmento de medida πr.

2.1 PROCESSO DE ARQUIMEDES

Utiliza-se o valor aproximado para π: $\pi' = 22/7 = 3\ 1/7 = 3{,}1428571... \cong \pi = 3{,}141592....$

Logo, o valor aproximado para o perímetro de uma circunferência de raio r é:

$$C' = 2\pi' r = \pi' d = 3\,\frac{1}{7}\,d = 3d + \frac{1}{7}\,d$$

<u>Problema</u>: Retificar uma circunferência de raio 2cm utilizando o processo de Arquimedes.

2.2 Processo de Kochansky ou da Tangente de 30°

Este procedimento fornece o semi-perímetro de uma circunferência.

Problema: Retificar a circunferência pelo processo de Kochansky.

2.3 Processo de Desretificação da Circunferência

Considerando que o comprimento da circunferência é dado por $C=2\pi r$ e utilizando o valor de 22/7 para π e que $2r=d$, tem-se que: $C=d\pi$, assim $d=C/\pi$.

Problema: Desretificar uma circunferência de comprimento 120mm.

3. RETIFICAÇÃO DE ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

3.1 PROCESSO DE ARQUIMEDES PARA ARCOS DE MEDIDA INFERIOR A 90°

Problema: Retificar o arco AB dado, r = 4cm e AÔB = 60°.

3.2 RETIFICAÇÃO DE ARCOS ENTRE 90° E 180°

Problema: Retificar o arco AB dado, r = 4cm e AÔB = 135°.

Exercícios:

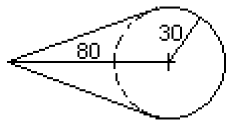
1. Desretificar um arco de comprimento l=2,5cm de uma circunferência de raio r=2cm.

2. Dividir o arco AB, de raio r e amplitude α, em três partes iguais.
   a) r=3cm e α=75º
   b) r=3,5cm e α=120º

3. Dividir o arco AB, de raio r e amplitude em partes proporcionais a 3, 1 e 2.
   a) r=3,5cm e α=135º
   b) r=3cm e α=120º

4. Determine graficamente a medida aproximada em graus de um arco de 2cm de comprimento em uma circunferência de 2,5cm de raio.

5. Uma chapa de metal tem a forma indicada a seguir. Fazer um desenho na escala 1:10, e obter graficamente o perímetro da chapa, utilize como unidade o cm.



VI - EQUIVALÊNCIA E DIVISÃO DE ÁREAS

1. ÁREAS DAS PRINCIPAIS FIGURAS GEOMÉTRICAS

Área do retângulo: S = lado x altura relativa a este lado
Área do triângulo: S = (lado x altura relativa a este lado) / 2
Área do paralelogramo: S = lado x altura relativa a este lado
Área do losango: S = lado x altura relativa a este lado = (diagonal maior X diagonal menor) / 2
Área do trapézio: S = (base média x altura) = (base maior + base menor) x altura /2
Área de um polígono regular de lado l_n: S = p.a, onde p é o semi-perímetro e a o apótema (raio da circunferência inscrita).
Área do círculo: $S = \pi r^2$.
Área do setor circular: $S = (\theta/2)r^2$, θ em radianos.

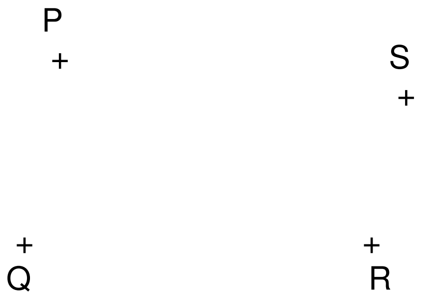
2. EQUIVALÊNCIA

Propriedade Fundamental da Equivalência: Considerar um triângulo ABC. Conduzir pelo vértice A uma reta r paralela ao lado BC. Considerar os pontos A_1, A_2, A_3,... pertencentes à reta r. Os triângulos de base BC comum e vértices A_1, A_2, A_3 ... são todos equivalentes.

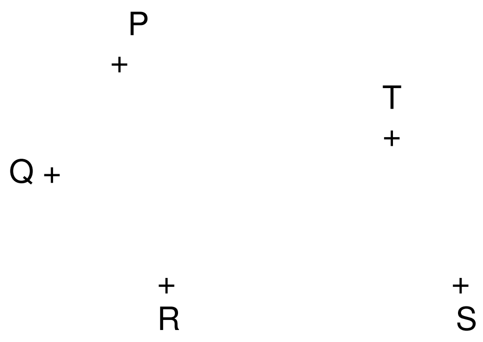
De fato, $S(ABC)=S(A_1BC)=S(A_2BC)=...=(ah_a)/2$, pois as medidas da base e da altura não foram alteradas.

Exercícios:

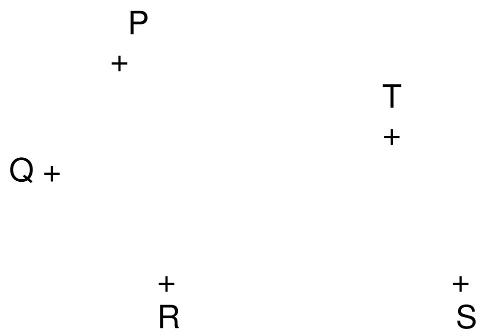
01. Construir um triângulo ABC, equivalente a um quadrilátero PQRS dado, sabendo-se que P≡A e que o segmento BC está sobre a reta QR.



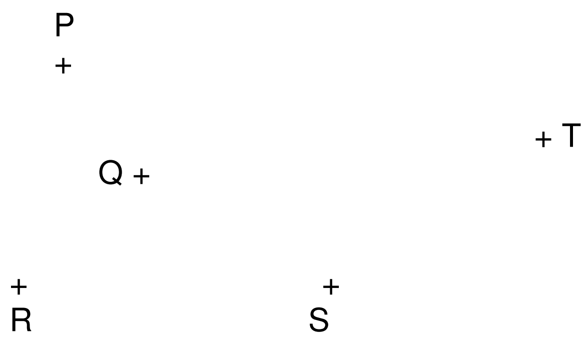
02. Construir um triângulo ABC, equivalente a um polígono dado, sabendo-se que o ponto A coincide com o ponto P e o segmento BC está sobre a reta RS.



03. Construir um triângulo ABC, equivalente a um polígono dado, sabendo-se que o ponto A pertence ao segmento PQ e o segmento BC está sobre a reta RS.



04. Construir um triângulo ABC, equivalente a um polígono dado, sendo A≡P e que o segmento BC está sobre a reta RS.



3. PROBLEMAS DE QUADRATURA

Problema geral: Construir um quadrado equivalente a uma figura dada (triângulo, retângulo, círculo, trapézio, etc)

Exercícios:

01. Construir um quadrado equivalente a um triângulo ABC dado

A +

B + + C

02. Obter graficamente o lado do quadrado equivalente ao trapézio ABCD dado.

A + +B

D + +C

03. Obter graficamente o lado de um quadrado equivalente ao octógono regular inscrito numa circunferência de raio 2cm.

04. Construir um quadrado equivalente a um círculo de raio 3cm.

05. Determinar graficamente o lado de um quadrado equivalente a um setor circular de 75^{o} de um círculo de raio 4,3cm.

4. Problemas gerais de Equivalência

4.1 Primeiro problema geral

Razão entre áreas de figuras semelhantes:

$$F_1 \sim F_2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1} = ... = k \Leftrightarrow \frac{S_2}{S_1} = k^2$$

Exercícios:

01. Os pentágonos dados são semelhantes, calcular algebricamente a razão entre suas áreas.

02. São dados dois setores circulares semelhantes. Se a área do maior é o triplo da área do menor, calcular algebricamente o raio do maior (x) em função do menor (r).

03. São dados dois triângulos eqüiláteros, sendo a área de um o dobro da área do outro. Calcular algebricamente o lado do maior (x) em função do menor (l).

04. Sendo *a* o lado de um quadrado de área S, qual é a medida algébrica do lado de um quadrado de área 5S (S1/5)?

Primeiro Problema Geral: Construir uma figura F_2 semelhante a outra figura dada, cuja área seja m vezes a área da figura F_1 dada.

01. Construir um triângulo eqüilátero de lado 41mm. Construir um segundo triângulo eqüilátero de área igual ao dobro da área do primeiro. Qual é a medida do lado do segundo triângulo (algebricamente)?

02. Construir um setor circular semelhante ao setor dado e de área igual a três vezes a área do mesmo.

03. Construir um quadrado de lado 30mm. Construir um segundo quadrado de área igual ao triplo da área do primeiro. Qual é a medida do lado do segundo quadrado (algebricamente)?

04. Construir um triângulo eqüilátero equivalente a um hexágono regular de lado 27mm. Qual é, aproximadamente (graficamente), a medida do lado do triângulo?

4.2 SEGUNDO PROBLEMA GERAL

Divisão de áreas:

01. É dado um triângulo ABC. Calcular algebricamente, em função de *b*, a que distância x do vértice A (sobre o lado b) deve-se traçar uma paralela a BC para dividir o triângulo ABC em dois polígonos equivalentes.

02. Calcular algebricamente a distância x da reta dada r ao vértice A (sobre o lado b), em função de *b*, para que a área do trapézio DBCE seja o dobro da área do triângulo ADE.

03. Calcular algebricamente as distâncias x e y, em função de b, sabendo que as retas r e s dividem o triângulo ABC em três polígonos equivalentes. Sendo r e s paralelas a BC.

04. É dado um círculo de raio r=3cm. Determinar algebricamente o raio x de uma circunferência concêntrica ao círculo dado e que o divide em duas partes equivalentes.

Segundo Problema Geral: Através de retas paralelas a um dos lados de um polígono, dividi-lo em partes de áreas iguais ou proporcionais a números inteiros dados.

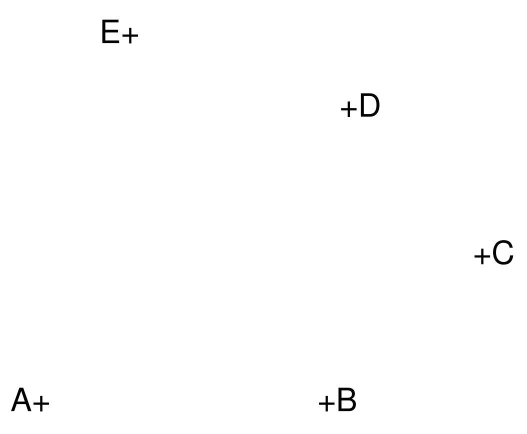
01. Seja ABC um triângulo de lados a=80mm, b=70mm e c=85mm. Traçar retas r e s paralelas a BC, tais que dividam o triângulo dado em 3 partes equivalentes.

02. Seja ABC um triângulo de lados a=80mm, b=70mm e c=85mm. Traçar retas r, s e t paralelas a BC, tais que dividam o triângulo dado em 4 partes equivalentes.

03. Decompor um círculo de raio r=3cm dado, através de uma circunferência concêntrica, em um novo círculo e uma coroa circular de áreas proporcionais a 1 e 1, respectivamente.

04. Decompor um círculo de raio r=3cm dado, através de uma circunferência concêntrica, em um novo círculo e uma coroa circular de áreas proporcionais a 2 e 3, respectivamente.

05. Seja ABCDE um pentágono dado. Dividi-lo em 3 partes equivalentes, por segmentos paralelos aos lados BC, CD e DE.



06. Dividir um trapézio ABCD em 3 partes equivalentes, por meio de retas paralelas à base.

A + +B

D + +C

07. Dividir uma coroa circular de raios 1,5 e 4cm em 3 partes equivalentes por meio de circunferências concêntricas.

4.3 TERCEIRO PROBLEMA GERAL

Terceiro problema geral: Construir uma figura de forma conhecida e de área dada.

01. Construir um pentágono regular equivalente ao triângulo ABC dado.

02. Construir um polígono semelhante ao polígono dado e que seja equivalente ao retângulo dado.