



VISUALIZAÇÃO DOS POLIEDROS QUASE REGULARES E SEUS DUAIS POR MEIO DE UM AMBIENTE WEB DE REALIDADE VIRTUAL

VISUALIZATION OF THE QUASI-REGULAR POLYHEDRA AND THEIR DUALS THROUGH A VIRTUAL REALITY WEB ENVIRONMENT

SIQUEIRA, Paulo Henrique¹

Resumo

Este artigo mostra o uso de recursos web, para a criação de ambientes para a visualização de Poliedros Quase Regulares e os seus respectivos poliedros duais. Estes ambientes foram criados com o uso de recursos da Realidade Virtual (RV), que permitem ao visitante a manipulação dos poliedros e a comparação entre os poliedros e seus duais. As transformações geométricas de translação e rotação foram usadas para as construções das salas virtuais, com a inserção de cada poliedro por meio de estruturas de hierarquias de páginas HTML. Os recursos apresentados neste artigo podem ser usados em sala de aula para a visualização dos poliedros com óculos imersivos e até mesmo em Realidade Aumentada (RA) com o uso de *smartphones* e *tablets*. Uma fita de DNA foi modelada com os Poliedros Quase Regulares e seus respectivos duais, com o objetivo de mostrar as relações entre os elementos destes sólidos. Este artigo mostra a criação de materiais didáticos com uma tecnologia simples, gratuita e com grande contribuição para a melhoria do ensino da Geometria, além de outras áreas que utilizam representações gráficas de objetos 3D.

Palavras-chave: Realidade Virtual; Dualidade; Poliedros Quase Regulares.

Abstract

This article shows the use of web resources to create environments for visualizing Quasi-Regular Polyhedra and their respective dual polyhedra. These environments were created using Virtual Reality (VR) resources, which allow the visitor to manipulate the polyhedra and compare the polyhedra and their duals. The geometric transformations of translation and rotation were used to construct the virtual rooms, with the insertion of each polyhedron through HTML page structures. The resources presented in this article can be used in the classroom to visualize polyhedra with immersive glasses and even in Augmented Reality (AR) using smartphones and tablets. A DNA ribbon was modeled with Quasi Regular Polyhedra and their respective duals, with the aim of showing the relations between these elements solids. This article shows the creation of teaching materials with a simple, free technology that makes a great contribution to improving the teaching of Geometry, as well as other areas that use graphic representations of 3D objects.

Keywords: Virtual Reality; Duality; Quasi-Regular polyhedra.

¹ Universidade Federal do Paraná - UFPR, ORCID: 0000-0002-7498-0721, e-mail: paulohs@ufpr.br

1 Introdução

Os conteúdos apresentados em algumas disciplinas que envolvem conceitos tridimensionais podem ser compreendidos, por parte dos alunos, de maneira mais eficiente com o uso de recursos auxiliares. Os materiais concretos, feitos com impressoras 3D, podem ser usados nas aulas de Matemática (Quigley, 2021), Biologia (Olumorin et al., 2022), ou disciplinas com conteúdos que envolvem o desenvolvimento e habilidades espaciais (Karaismailoglu e Yildirim, 2023). A criação de ambientes ou aplicativos web para o ensino pode colaborar no ensino de conceitos de Biologia (Delgado, Bhark e Donahue, 2021) e Física (Komikesari et al., 2019; Rozal et al., 2021) e tem sido utilizada como uma alternativa atraente para auxílio da aprendizagem dos alunos.

A modelagem de objetos com o uso de tecnologias virtuais também pode auxiliar na aprendizagem de conteúdos que envolvem conceitos em três dimensões (3D). A Realidade Virtual (RV) permite a criação de um ambiente imersivo e interativo com manipulação dos objetos por meio de controles e óculos imersivos (Marougkas et al., 2023).

Ambientes desenvolvidos em RV podem ajudar na visualização de fenômenos físicos, biológicos ou químicos (Kumar et al., 2021), simulações de situações de treinamentos, jogos educacionais (Pirker et al., 2020), simulações de construções (Soliman et al., 2021), Medicina (Pottle, 2019), e outras áreas ligadas à educação (Melinda e Widjaja, 2022).

O uso de materiais auxiliares, tais como poliedros planejados, montados com materiais alternativos, ou impressos em 3D, auxiliam a aprendizagem dos alunos dos conteúdos das disciplinas de Geometria Euclidiana, Geometria Descritiva ou Desenho Técnico (Andrade, Santos e Moura, 2017). Os conteúdos que envolvem visualizações de faces e arestas, além dos cálculos de áreas e volumes podem ser explorados com materiais manipuláveis ou modelados em ambientes virtuais.

Os ambientes virtuais programados em RV podem complementar a utilização dos materiais didáticos tradicionais no ensino dos poliedros, pois os alunos podem interagir e visualizar os sólidos e suas propriedades de maneira mais efetiva e significativa. A RV pode colaborar na interação dos alunos com as representações dos poliedros modelados, facilitando as visualizações e a compreensão das propriedades dos objetos.

Neste artigo são apresentados os recursos web para criação de ambientes imersivos que possibilitam a manipulação de poliedros Quase Regulares e seus duais com as tecnologias de RV e Realidade Aumentada (RA). Nas visualizações dos poliedros com o uso de RA, são disponibilizados os links para as páginas desenvolvidas em RV.

Na página programada em RA, os alunos visualizam e manipulam os poliedros em diversos pontos de vista e acessam as páginas programadas em RV para manipularem as representações dos sólidos com dispositivos móveis, computadores ou podem até imergirem na cena utilizando óculos de RV.

2 Modelagem dos Poliedros

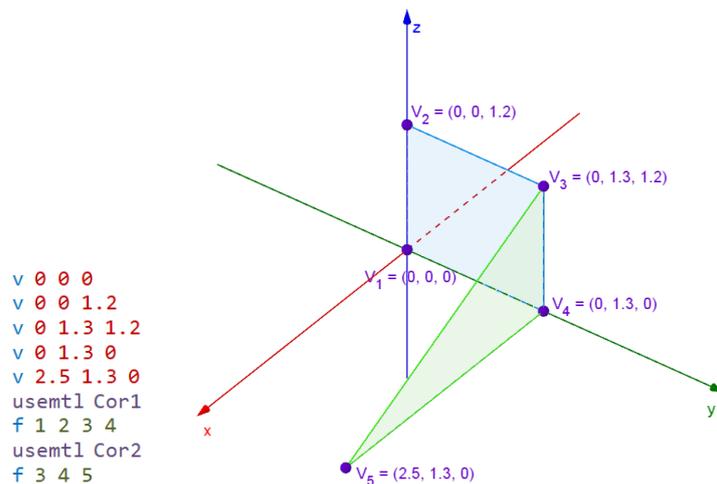
Um poliedro é denominado Quase Regular quando possui dois tipos de faces regulares, cada uma inteiramente cercada por faces do outro tipo. Além disso, todas as arestas destes poliedros têm mesma medida e os valores das medidas de seus ângulos diédricos são iguais. Desconsiderando-se os poliedros de Arquimedes que satisfazem estas propriedades, existem 7 poliedros Quase Regulares (Coxeter, 1973; Weisstein, 2024).

Os poliedros podem ser representados utilizando-se as coordenadas de seus vértices ou por meio das construções dos polígonos que representam as faces dos sólidos. Em Siqueira (2021) são apresentados os códigos usados para representação dos poliedros de Arquimedes usando as simetrias e ângulos entre arestas e faces que definem os sólidos.

Neste artigo, a modelagem dos poliedros Quase Regulares foi feita de uma maneira um pouco diferente, usando as coordenadas dos vértices e definindo-se quais vértices formam cada face do sólido. Estas informações foram inseridas em arquivos com formato *obj* (Fileformat, 2024), que funcionam de maneira bastante intuitiva.

Por exemplo, um quadrilátero que tem os vértices 1, 2, 3 e 4 e um triângulo que tem os vértices 3, 4 e 5 são definidos em um arquivo com extensão *obj* (Figura 1). As faces são definidas com comandos *f*, que possuem as sequências de vértices definidos nos comandos *v*, que contém as coordenadas 3D. As cores podem ser definidas no arquivo de materiais com extensão *mtl* por meio do comando *usemtl*.

Figura 1 - Trecho de código de arquivo em formato *obj* que define um quadrilátero e um triângulo



Fonte: Autor

Os arquivos com extensão *obj* com as arestas são criados da mesma forma, com o uso dos comandos de linhas *l*. Os códigos de programação HTML com os recursos A-Frame (2024) de cada poliedro são feitos inserindo os *links* (caminhos) dos arquivos que contém os poliedros modelados em arquivos de extensão *obj*.

A Figura 2 mostra o código para a modelagem de um Grande Rombihexaedro em RV. Entre as linhas 10 e 12 são definidos os *links* dos arquivos que contém o poliedro e as

arestas. Nas linhas 16 e 17 são inseridos os poliedros modelados na cena. Finalmente, entre as linhas 18 e 41 são usados os comandos *a-sphere* para representação dos 24 vértices do Grande Rombihexaedro. Os outros poliedros Quase Regulares são definidos usando o mesmo tipo de arquivo HTML.

Figura 2 - Código da modelagem de um Grande Rombihexaedro em RV usando recursos A-Frame

```

1 <!DOCTYPE html>
2 <html>
3 <head>
4 <script src="https://aframe.io/releases/1.3.0/aframe.min.js"></script>
5 </head>
6 <body>
7 <a-scene>
8 <a-entity camera></a-entity>
9 <a-assets>
10 <a-asset-item id="poliedro" src="poli/GreatRhombihexahedron.obj"></a-asset-item>
11 <a-asset-item id="linhas" src="poli/GreatRhombihexahedronL.obj"></a-asset-item>
12 <a-asset-item id="material" src="poli/solidos.mtl"></a-asset-item>
13 </a-assets>
14 <a-sky color="aliceblue"></a-sky>
15 <a-entity scale="1.5,1.5,1.5" position="0,0,0">
16 <a-obj-model src="#poliedro" mtl="#material"></a-obj-model>
17 <a-obj-model src="#linhas" mtl="#material"></a-obj-model>
18 <a-sphere position="-0.5,-0.5,-0.207107" radius="0.02"></a-sphere>
19 <a-sphere position="-0.5,0.5,0.207107" radius="0.02"></a-sphere>
20 <a-sphere position="-0.5,0.5,-0.207107" radius="0.02"></a-sphere>
21 <a-sphere position="0.5,-0.5,0.207107" radius="0.02"></a-sphere>
22 <a-sphere position="0.5,-0.5,-0.207107" radius="0.02"></a-sphere>
...
40 <a-sphere position="0.5,-0.207107,0.5" radius="0.02"></a-sphere>
41 <a-sphere position="-0.5,-0.5,0.207107" radius="0.02"></a-sphere>
42 </a-entity>
43 </a-scene>
44 </body>
45 </html>

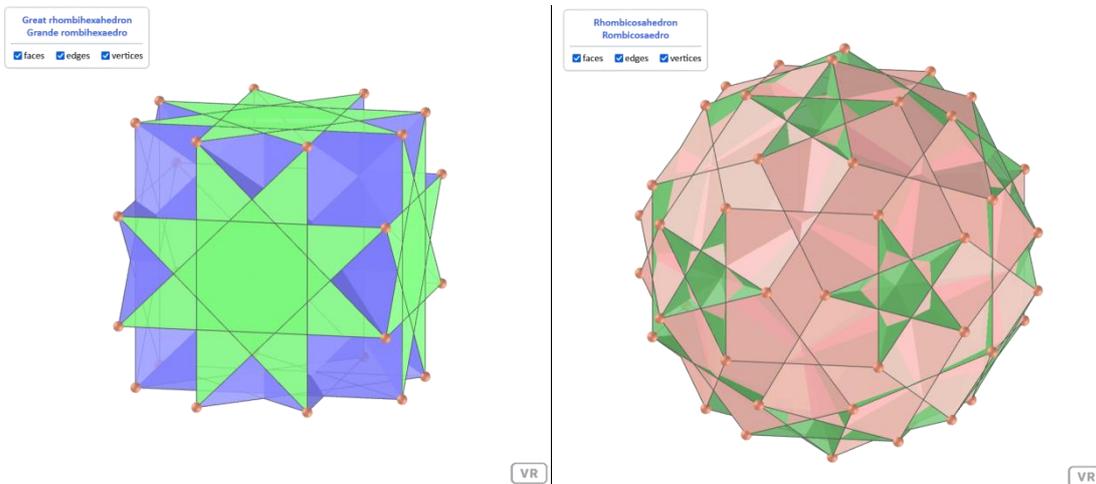
```

Fonte: Autor

A Figura 3 apresenta o resultado das modelagens dos poliedros Grande Rombihexaedro e Rombicosaedro utilizando arquivos com formato *obj*. Os modelos dos poliedros Quase Regulares, as salas imersivas e os QR codes para visualização de cada poliedro usando a tecnologia de Realidade Aumentada (RA) estão disponíveis na página:

<https://paulohscwb.github.io/polyhedra/quasiregular/>

Figura 3 - Modelagem dos poliedros Quase Regulares Grande Rombihexaedro e Rombicosaedro



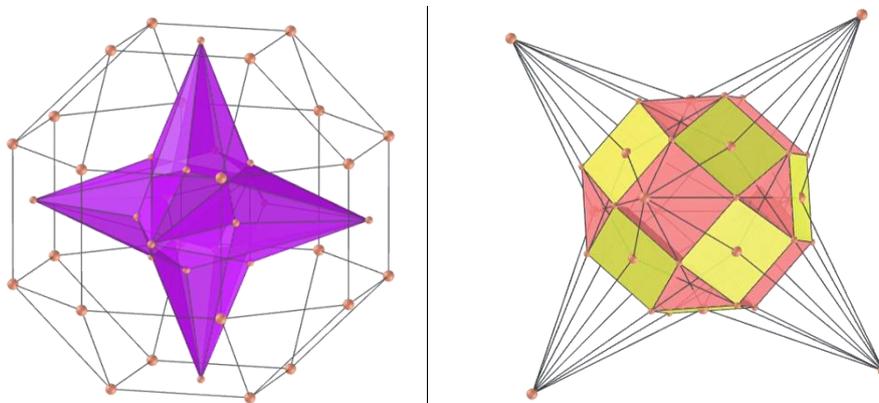
Fonte: Autor

3 Dualidade de Poliedros

O conceito de dualidade na Geometria está associado com uma estrutura secundária de um poliedro. De acordo com Wenninger (2003), esta estrutura é definida pela correspondência biunívoca entre os vértices de um poliedro com as faces do outro poliedro. As arestas entre os pares de vértices de um poliedro têm a correspondência biunívoca com as arestas entre os pares de faces do poliedro dual.

Considere o Pequeno Rombihexaedro, que possui 12 faces quadradas, 6 faces octogonais, 48 arestas e 24 vértices (Figura 4). A correspondência entre cada face deste poliedro com os vértices do dual determina um sólido com 18 vértices e 24 faces denominado Pequeno Rombihexacro (Coxeter, 1973; Weisstein, 2024).

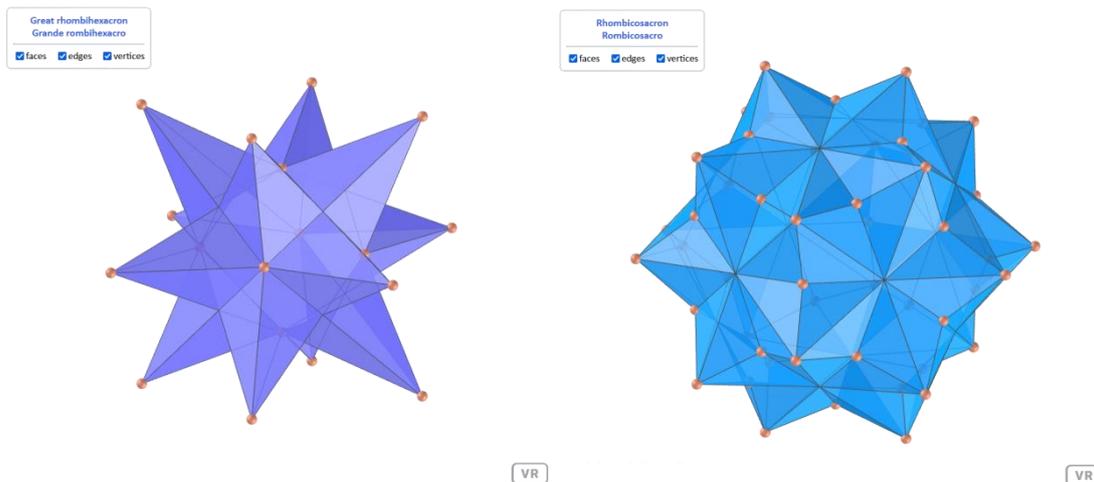
Figura 4 - Correspondência entre arestas, faces e vértices entre o Pequeno Rombihexaedro e o Pequeno Rombihexacro



Fonte: Autor

As arestas do poliedro dual são ortogonais às arestas do poliedro primal, e o dual do dual sempre é o poliedro primal. A Figura 5 mostra as modelagens dos poliedros Grande Rombihexacro e Rombicosacro com arquivos *obj*. Estes poliedros são os duais dos poliedros Quase Regulares Grande Rombihexaedro e Rombicosaedro da Figura 3.

Figura 5 - Modelagem dos poliedros Grande Rombihexacro e Rombicosacro

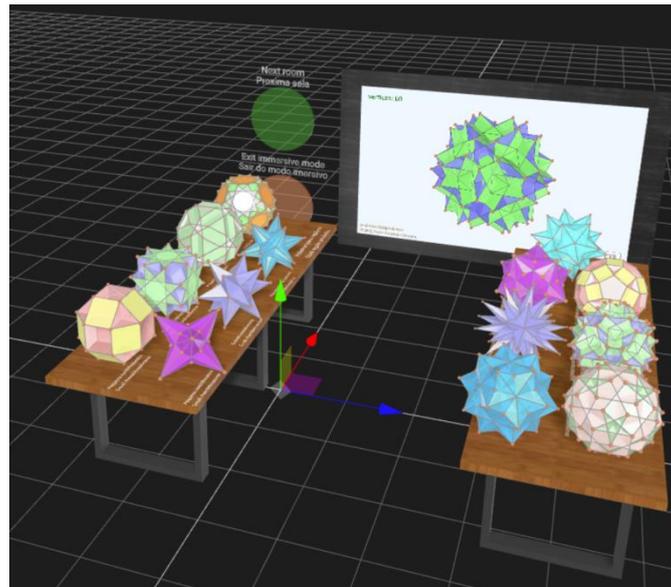


Fonte: Autor

4 Salas imersivas com os poliedros modelados

Os poliedros Quase Regulares modelados foram inseridos em uma sala de imersão de RV, que pode ser acessada utilizando qualquer dispositivo. Mesas de apoio para os poliedros, fotos equiretangulares de fundo e uma tela de projeção com as propriedades de alguns sólidos foram inseridas nos ambientes programados. A Figura 6 mostra uma visão geral do ambiente de uma sala virtual com os poliedros Quase Regulares, sem a imagem equiretangular de fundo.

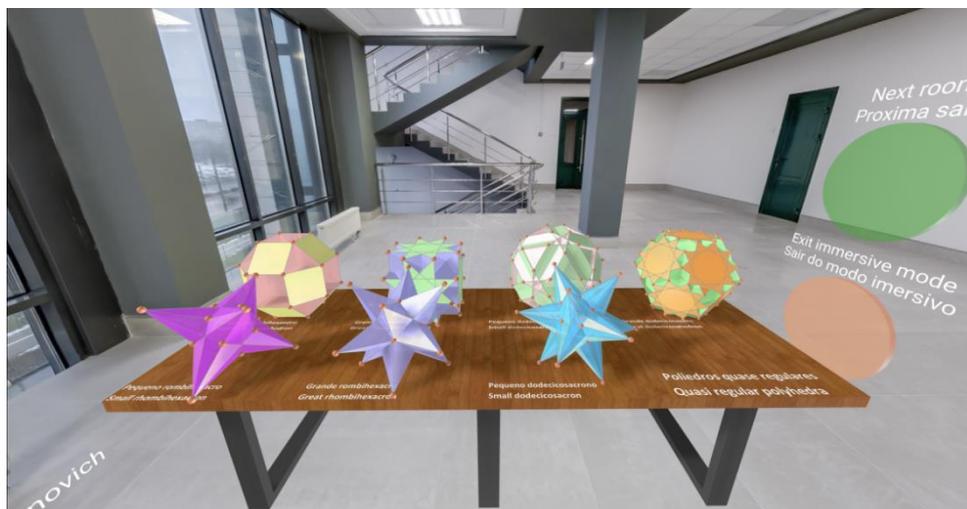
Figura 6 - Visão geral de uma sala virtual com os poliedros Quase Regulares



Fonte: Autor

As propriedades de efeitos de gravidade e de sombras do A-Frame foram programadas nas salas virtuais, com o objetivo de melhorar a sensação de imersão. As Figuras 7 e 8 mostram as mesas com os poliedros Quase Regulares e seus respectivos duais, com a inserção da imagem de fundo em formato equiretangular (Tsyrukovich, 2024).

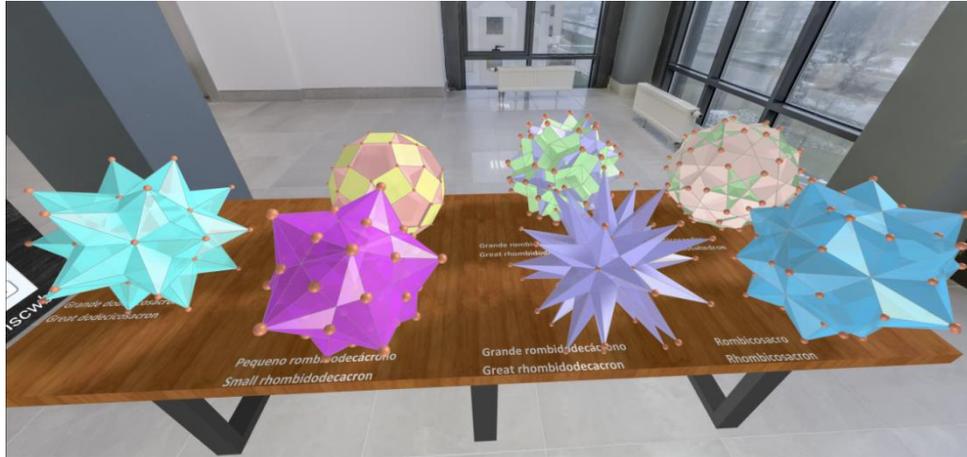
Figura 7 - Detalhe da sala virtual com a mesa que contém 4 poliedros Quase Regulares e 3 duais



Fonte: Autor

Os modelos dos poliedros estão apoiados nas mesas, com os rótulos que contém os respectivos nomes em inglês e português de cada sólido. Utilizando controles de óculos imersivos, o clique do *mouse* ou o *touch* do *smartphone* ou do *tablet*, o visitante pode movimentar os poliedros, mudar de sala virtual e sair do ambiente imersivo.

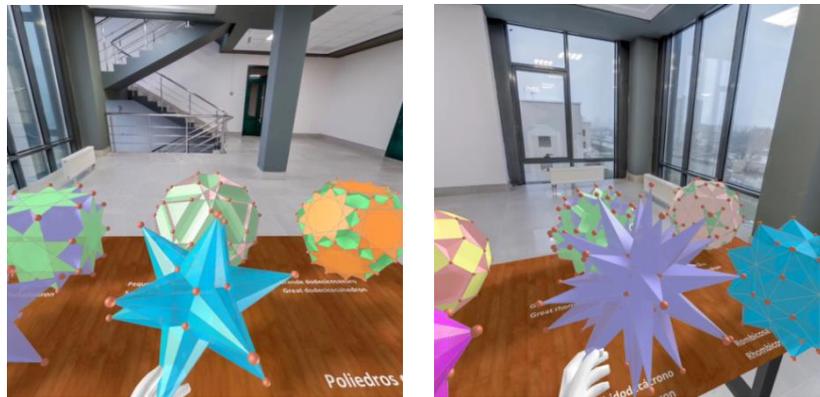
Figura 8 - Detalhe da sala virtual com a mesa que contém 3 poliedros Quase Regulares e 4 duais



Fonte: Autor

A Figura 9 mostra o uso dos controles de manipulação dos óculos de Realidade Virtual na sala que contém os poliedros Quase Regulares.

Figura 9 - Detalhes da sala imersiva com as manipulações dos poliedros utilizando os controles dos óculos de RV



Fonte: Autor

5 Conexões entre os poliedros e seus duais

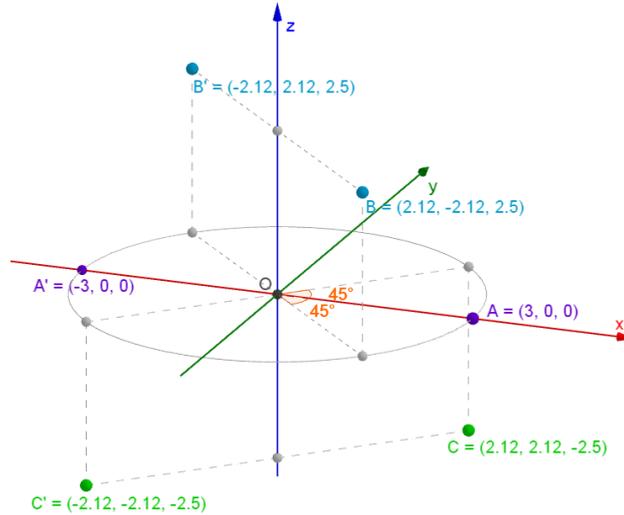
As relações entre os poliedros Quase Regulares e seus respectivos duais podem ser compreendidas de forma mais eficiente quando são estabelecidas ligações entre estes sólidos. Uma fita de DNA pode servir de base para a visualização das ligações entre os elementos dos poliedros duais. A construção de uma fita de DNA pode ser feita usando duas hélices cilíndricas simétricas em relação ao eixo z.

Considere o raio da hélice $r = 3$, e o primeiro par com um poliedro Quase Regular no ponto A e seu respectivo dual na posição simétrica A' (Figura 10). Considere que cada par

de poliedros está localizado com uma rotação de 45°, relativa ao eixo z em comparação com o par anterior de poliedros. Logo, o segundo par de poliedros tem as coordenadas x e y iguais, que podem ser encontradas usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa r com catetos iguais:

$$x^2 + x^2 = r^2 \Rightarrow 2x^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 = 4,5 \Rightarrow x \cong 2,12.$$

Figura 10 - Construção de uma fita de DNA com duas hélices cilíndricas

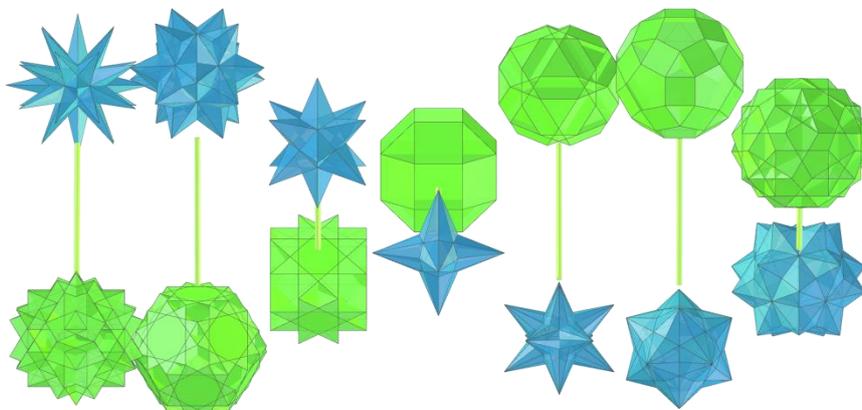


Fonte: Autor

Considerando a distância vertical $z = 2,5$, temos o segundo par de duais nos pontos B e B'. O terceiro par de poliedros possui a medida da coordenada $z = -2,5$ e localiza-se nas posições simétricas de B e B' em relação ao eixo x. Os outros 4 pares de poliedros podem ser posicionados seguindo o mesmo raciocínio.

Para melhorar a visualização desta fita da DNA na sala virtual, considera-se uma rotação das hélices com rotação de 90° em torno do eixo y. A Figura 11 mostra o resultado da modelagem desta fita de DNA com as duas hélices cilíndricas.

Figura 11 - Modelagem da fita de DNA com as conexões entre os poliedros Quase Regulares e seus respectivos duais

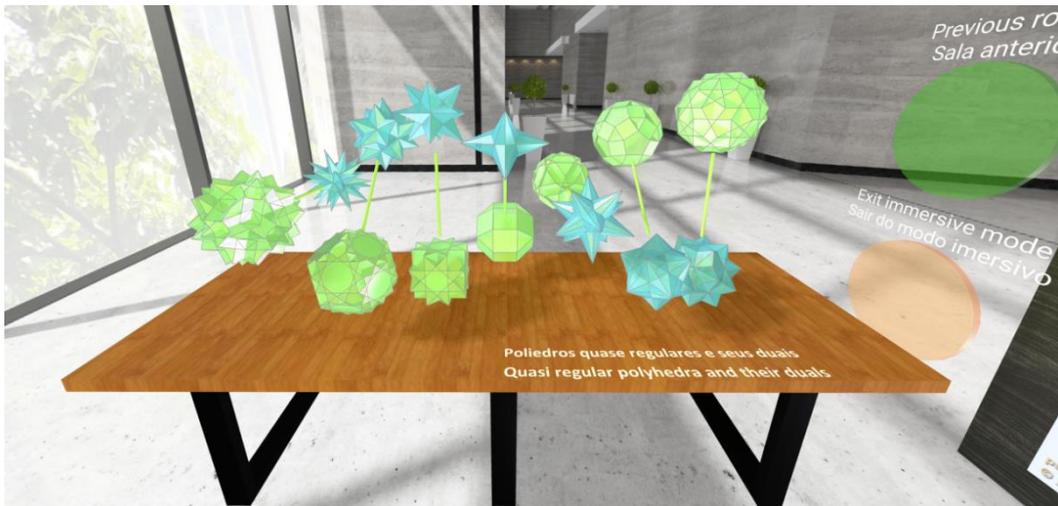


Fonte: Autor

A modelagem da fita de DNA permite que os alunos enxerguem as sobreposições de vértices de um poliedro, que determinam os centros das faces de seu respectivo dual. Da mesma forma apresentada nos poliedros visualizados individualmente, os visitantes podem escolher a visualização somente de arestas ou somente de faces dos poliedros, além de manipular a visualização da fita de DNA.

Uma sala virtual imersiva foi criada para visualização destas conexões entre os poliedros Quase Regulares e seus duais. A Figura 12 mostra o detalhe com a mesa, a fita de DNA e a imagem equiretangular (Hemul, 2024) no ambiente virtual criado.

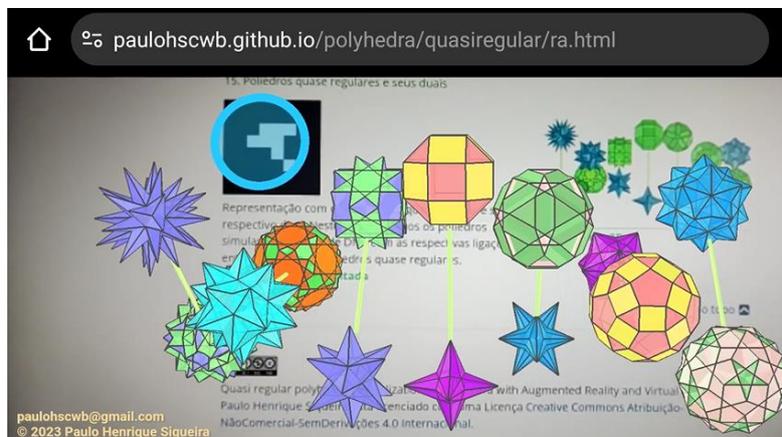
Figura 12 - Sala virtual com a fita de DNA que mostra as conexões entre os poliedros Quase Regulares e seus respectivos duais.



Fonte: Autor

Além das salas virtuais e dos recursos individuais de visualização dos poliedros, a tecnologia de Realidade Aumentada (RA) pode ser usada para visualizar cada poliedro e a fita DNA com as conexões entre os poliedros duais. A Figura 13 mostra o uso do recurso de RA para visualizar a fita DNA mostrada nesta seção.

Figura 13 - Visualização da Fita de DNA utilizando o recurso de Realidade Aumentada



Fonte: Autor

6 Conclusões

Este artigo mostra o uso de páginas web para a criação de ambientes de visualização de poliedros Quase Regulares e seus duais, por meio de tecnologias de Realidade Virtual e Realidade Aumentada. Utilizando-se os marcadores impressos, os visitantes podem visualizar os sólidos em RA em qualquer dispositivo com webcam e acesso à internet, com *links* para as visualizações em RV.

A modelagem de poliedros e a criação das salas virtuais usadas neste trabalho utilizam as estruturas de hierarquias da programação de páginas web com scripts A-Frame, facilitando a inserção de vários poliedros em uma mesma página. O resultado mostra que se trata de uma ferramenta útil para uso em sala de aula, pois permite que os alunos visualizem e manipulem as representações gráficas dos poliedros em seus dispositivos ou que usem os óculos de RV para imersão completa nas salas virtuais.

Os ambientes programados podem ser explorados em aulas de Geometria, auxiliando na compreensão dos elementos dos poliedros ou em tópicos como cálculos de áreas e volumes, relação de Euler, seções planas ou simplesmente na visualização de cada sólido modelado. A fita DNA modelada neste artigo auxilia na visualização das conexões existentes entre os elementos dos poliedros Quase Regulares e seus respectivos duais.

Os elementos que formam os poliedros modelados podem ser visualizados em RV e RA e os visitantes podem movimentar a câmera da cena para encontrarem os melhores pontos de vista dos sólidos com ferramentas desenvolvidas para o A-frame para orbitar a câmera em torno dos objetos.

As ferramentas de programação de páginas de web mostradas neste artigo são simples e intuitivas, e podem ser usadas em salas de aula com materiais impressos ou com os óculos imersivos. Os alunos acessam a página programada em RA, visualizam os sólidos com seus respectivos marcadores impressos e podem interagir com os poliedros programados em RV. Nas salas virtuais, os alunos podem interagir, movimentar e visualizar os poliedros por meio dos controles dos óculos imersivos. Com todas as ferramentas mostradas neste artigo, os alunos podem explorar os conceitos geométricos dos poliedros de forma mais eficiente e dinâmica.

A criação de ambientes de RA e RV como páginas da web para uso em sala de aula tem algumas vantagens, tais como a praticidade, o baixo custo, o ótimo desempenho, a simplicidade de programação e o funcionamento em todos os tipos de dispositivos. Os carregamentos das páginas programadas com RA e RV são quase imediatos, pois são construídas em HTML com referências de bibliotecas de RV desenvolvidas com a linguagem JavaScript. Os alunos não precisam fazer download de aplicativos e diversos marcadores podem ser usados em uma mesma página de HTML, que permitem a criação de materiais didáticos com diversos temas programados em RA e RV. Esta ferramenta

pode ser usada em outras disciplinas, tais como Cálculo Diferencial e Integral, Biologia, Química, Física, Estatística, Engenharia e outras áreas que utilizam representações gráficas em 3D.

Referências

- A-FRAME. **A-frame documentation of Virtual Reality**. Disponível em: <<https://aframe.io/docs/1.3.0/introduction/>>. Acesso em: 20 mar. 2024.
- ANDRADE, C. B., SANTOS, J. C. B., MOURA, V. C. S. **Comparação entre os métodos de ensino aprendizagem, com e sem a utilização de materiais manipuláveis**. Revista Científica Doctum: Educação, v. 1, n. 2, p. 1-15, 2017.
- COXETER, H. S. M. **Regular Polytopes**, New York: Dover, 1973.
- DELGADO, T., BHARK, S. J., DONAHUE, J. **Pandemic Teaching: Creating and teaching cell biology labs online during COVID-19**. Biochemistry and Molecular Biology Education, v. 49, n. 1, p. 32-37, 2021.
- FILEFORMAT. **Wavefront OBJ File Format Summary**. Disponível em: <<https://www.fileformat.info/format/wavefrontobj/egff.htm>>. Acesso em: 20 mar. 2024.
- HEMUL. **Imagem equiretangular produzida por Hemul75**. Disponível em: <<https://depositphotos.com/photo/spherical-360-panorama-projection-interior-of-reception-3d-illustration-180154184.html>>. Acesso em: 20 mar. 2024.
- KARASMAILOGLU, F., YILDIRIM, M. **The effect of 3D modeling performed using Tinkercad or concrete materials in the context of the flipped classroom on pre-service teachers' spatial abilities**. Research in Science & Technological Education, v. 42, n. 1, p. 1-20, 2023.
- KOMIKESARI, H. et al. **Development of e-module using flip pdf professional on temperature and heat material**. Journal of Physics: Conference Series, v. 1572, n. 1, p. 12-17, 2020.
- KUMAR, V. V. et al. **Virtual reality in chemical and biochemical engineering education and training**. Education for Chemical Engineers, v. 36, p. 143-153, 2021.
- MAROUKAS, A. et al. **Virtual reality in education: a review of learning theories, approaches and methodologies for the last decade**. Electronics, v. 12, n. 13, p. 1-21, 2023.
- MELINDA, V., WIDJAJA, A. E. **Virtual Reality Applications in Education**. International Transactions on Education Technology, v. 1, n. 1, p. 68-72, 2022.
- OLUMORIN, C. O., BABALOLA, E. O., AYoola, D. A. **Design and development of human excretory system model to teach a biology concept in Ilorin, Nigeria**. Indonesian Journal of Teaching in Science, v. 2, n. 2, p. 107-116, 2022.
- PIRKER, J. et al. **Virtual reality in computer science education: A systematic review**. In Proceedings of the 26th ACM symposium on virtual reality software and technology, Canada, p. 1-8, 2020.

POTTLE, J. **Virtual reality and the transformation of medical education**. Future healthcare journal, v. 6, n. 3, p. 181-185, 2019.

QUIGLEY, M. T. **Concrete Materials in Primary Classrooms: Teachers' Beliefs and Practices about How and Why They Are Used**. Mathematics Teacher Education and Development, v. 23, n. 2, p. 59-78, 2021.

ROZAL, E. et al. **The effect of project-based learning through YouTube presentations on English learning outcomes in physics**. AL-Ishlah: Jurnal Pendidikan, v. 13, n. 3, p. 1924-1933, 2021.

SIQUEIRA, P. H. **Visualization of Archimedian and Platonic polyhedra using a web environment in Augmented Reality and Virtual Reality**. International Journal for Innovation Education and Research, v. 9, n. 11, p. 1-13, 2021.

SOLIMAN, M. et al. **The application of virtual reality in engineering education**. Applied Sciences, v. 11, n. 6, p. 1-14, 2021.

TSYRKUNOVICH, I. **Imagem equiretangular produzida por Ivan Tsyркunovich**. Disponível em: <<https://pt.vecteezy.com/foto/22330068-cheio-desatado-esferico-hdri-360-panorama-visao-dentro-esvaziar-moderno-corredor-com-colunas-portas-e-panoramico-janelas-dentro-equirretangular-projecao-pronto-para-ar-vr-conteudo>>. Acesso em: 20 mar. 2024.

WEISSTEIN, E. W. **Quasiregular Polyhedron**. MathWorld—A Wolfram Web Resource. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/QuasiregularPolyhedron.html>>. Acesso em 20 mar. 2024.

WENNINGER, M. J. **Dual models**. Cambridge University Press, 2003.