

## VISUALIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE HOMOLOGIA PLANA COM A UTILIZAÇÃO DE GEOMETRIA DINÂMICA

Paulo Henrique Siqueira

UFPR – Universidade Federal do Paraná, Departamento de Expressão Gráfica  
paulohs@ufpr.br

Deise Maria Bertholdi Costa

UFPR – Universidade Federal do Paraná  
deise@ufpr.br

Luzia Vidal de Souza

UFPR – Universidade Federal do Paraná  
luzia@ufpr.br

### Resumo

Este trabalho apresenta a construção de conceitos básicos da Homologia Plana com a utilização do software de Geometria Dinâmica GeoGebra. O sistema Homológico é representado no software tanto em duas, quanto em três dimensões para visualizar as propriedades da Homologia Plana. A resolução de um problema clássico da Homologia é apresentada com o objetivo de visualizar as diferenças ao efetuar a construção em duas ou em três dimensões.

**Palavras-chave:** Geometria Dinâmica, Homologia Plana, Geometria Descritiva.

### Abstract/resumen/resumo

This work shows the construction of basic concepts of Homology by using the Dynamic Geometry software GeoGebra. The system of Homology is represented using the software both in two as in three dimensions to visualize the properties of Homology. The resolution of a classical problem of Homology is shown with the objective to visualize the differences between making the construction in two or three dimensions.

**Key words:** Dynamic Geometry, Homology, Descriptive Geometry.

## 1 Introdução

Os softwares de Geometria Dinâmica permitem a construção de figuras da Geometria Elementar que podem movimentar-se preservando suas propriedades e possibilitando ao aluno sua visualização. Assim, a interatividade entre o usuário e o programa de

Geometria Dinâmica proporciona uma maior motivação para que os professores utilizem cada vez mais esta ferramenta como apoio para as aulas de Desenho Geométrico, Geometria Descritiva e Geometria Euclidiana.

As construções descritas neste trabalho foram feitas utilizando o software livre denominado GeoGebra (HOHENWARTER e PREINER, 2007). As construções bidimensionais e tridimensionais feitas no GeoGebra possibilitam que o aluno movimente pontos, retas e segmentos representados em duas dimensões e, simultaneamente, estes objetos movimentam-se em três dimensões na mesma tela. Um exemplo interessante consiste na visualização de um objeto em *épura* com sua representação em perspectiva na mesma tela (VIANNA *et al.*, 2007; PATEK e LEÃO, 2007), possibilitando que o aluno movimente os pontos representados em perspectiva, enquanto que os respectivos pontos da *épura* sofrem os mesmos deslocamentos. Este tipo de visualização é interessante para o estudo da Homologia Plana, pois os conceitos tridimensionais deste conteúdo não podem ser representados totalmente, o que não permite ao aluno a visualização de todos os conceitos.

O estudo da Homologia Plana envolve conceitos de Projeções Cônicas e Perspectivas, mas as construções geométricas são feitas sempre no plano, já que um dos planos do sistema homológico é omitido. As principais aplicações da Homologia Plana estão na Geometria Descritiva e na Perspectiva, e os casos especiais de Homologia são os métodos de Transformações Geométricas: Homotetia, Afinidade, Simetria Axial, Simetria Pontual e Translação (FERNÁNDEZ, 1983; COSTA, 1990).

O objetivo deste trabalho é mostrar a visualização de alguns conceitos básicos da Homologia utilizando o software de Geometria Dinâmica Geogebra possibilitando a visualização na mesma tela, tanto dos objetos em duas quanto em três dimensões.

## **2 Sistema Homológico**

Um sistema Homológico é geral quando não existem particularidades, tais como eixo ou centros de projeções impróprios. Outros casos particulares são apresentados nos trabalhos de Costa (2001 e 2003), nos quais a autora apresenta um estudo da harmonia em fachadas de igrejas e templos, onde aparecem as Simetrias e a Homologia Harmônica, que consiste em razões harmônicas entre pontos homólogos, um ponto no eixo e o centro de Homologia.

### **2.1 Elementos da Homologia Plana**

O primeiro passo para a construção de um sistema Homológico consiste na determinação de um plano de projeções  $\alpha$ , como mostra a Figura 1. Cada ponto tem coordenadas relativas aos eixos em perspectiva, as quais são usadas para a

visualização dos elementos do plano  $\alpha$  em verdadeira grandeza no plano  $\alpha_1$ , de acordo com a Figura 2.

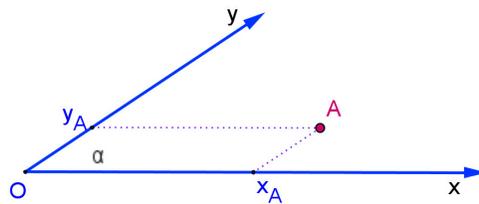


Figura 1: determinação de um dos planos de projeções

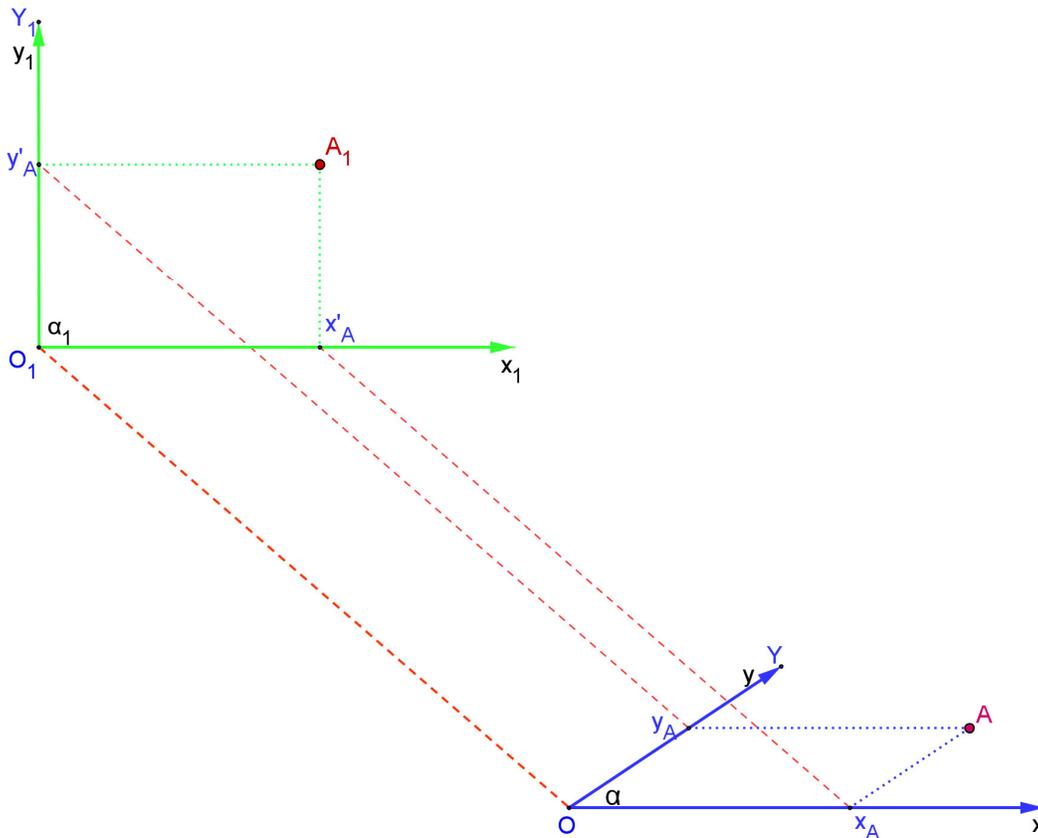


Figura 2: representação dos elementos de um plano de projeção  $\alpha$  em verdadeira grandeza no plano  $\alpha_1$

A obtenção das coordenadas do ponto  $A(x_A, y_A)$  pertencente ao plano  $\alpha$ , no plano  $\alpha_1$  correspondente, é feita com transformações geométricas simples (FOLEY, 1990; GOMES e VELHO, 1998), que envolvem paralelismo e escala. Todas as coordenadas dos pontos correspondentes de  $\alpha$  e  $\alpha_1$  são obtidas traçando-se paralelas à direção determinada pelo segmento  $OO_1$ . A figura  $OO_1x'_Ax_A$  é um paralelogramo, pois os eixos  $x$  e  $x_1$  são paralelos, bem como  $OO_1$  é paralelo a  $x'_Ax_A$ , portanto, no eixo  $x_1$  encontram-se as coordenadas que são consideradas em verdadeira grandeza. A coordenada  $x'_A$  é obtida através de uma translação do segmento  $Ox_A$  na direção  $OO_1$ . No eixo  $y$ , as

coordenadas de  $\alpha$  sofrem redução, de acordo com a inclinação utilizada no plano desenhado em perspectiva (trapézio  $OO_1y'_Ay_A$ ), e a coordenada  $y'_A$  é obtida através do teorema de Tales:

$$\frac{Oy_A}{OY} = \frac{O_1y'_A}{O_1Y_1}.$$

Outro plano que compõe o sistema homológico é denominado plano de Perspectiva (Figura 3). Em um sistema homológico geral o plano  $\alpha''$  intercepta os planos coincidentes  $\alpha \equiv \alpha'$  no eixo de homologia  $u$ , e os casos particulares de homologia com a condição de que  $\alpha'' \parallel \alpha \equiv \alpha'$  são as Transformações Geométricas: Homotetia, Simetria Axial e Translação (COSTA, 1990).

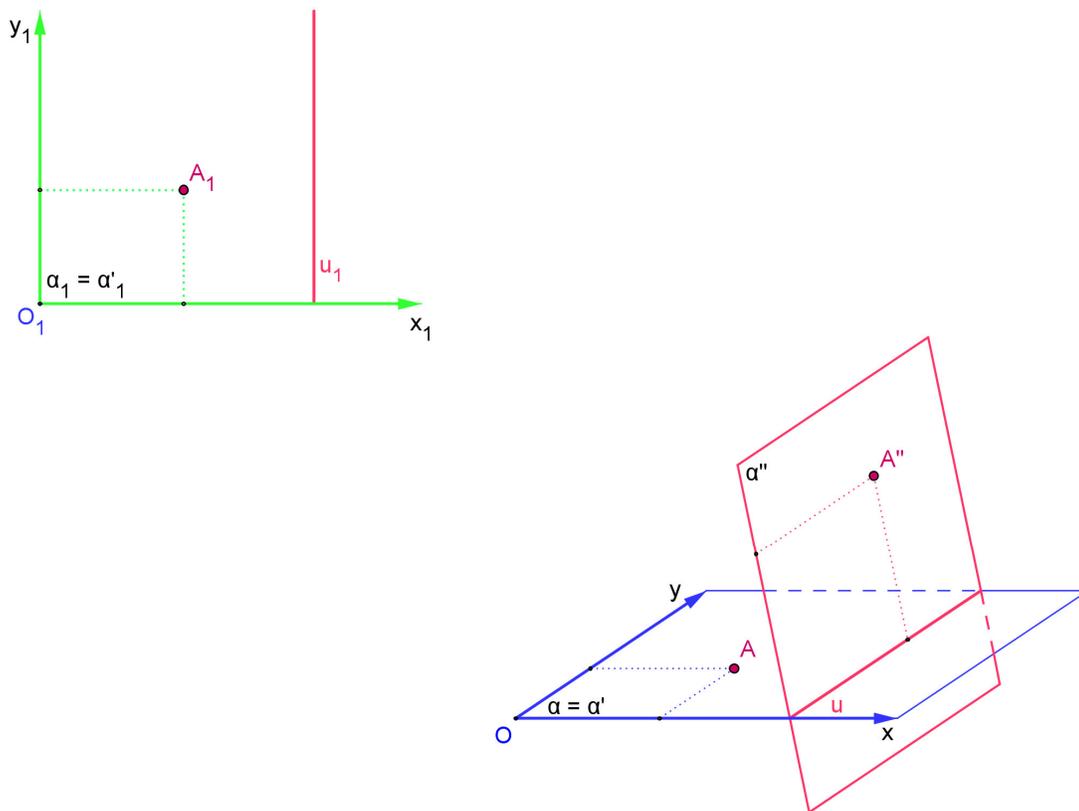


Figura 3: plano de Perspectiva  $\alpha''$  e eixo de homologia  $u$

Os centros de perspectiva  $C$  e  $C'$  (Figura 4) determinam a correspondência biunívoca entre os pontos do plano de perspectiva  $\alpha''$  e os pontos dos planos coincidentes  $\alpha \equiv \alpha'$  (COSTA, 1990). Dado um ponto  $A''$  do plano  $\alpha''$ , existem: um ponto  $A$  correspondente de  $\alpha$ , que consiste na projeção central de  $A''$  com centro de projeção  $C$ ; e um ponto  $A'$  correspondente de  $\alpha'$ , que consiste na projeção central de  $A''$  com centro de projeção  $C'$ .

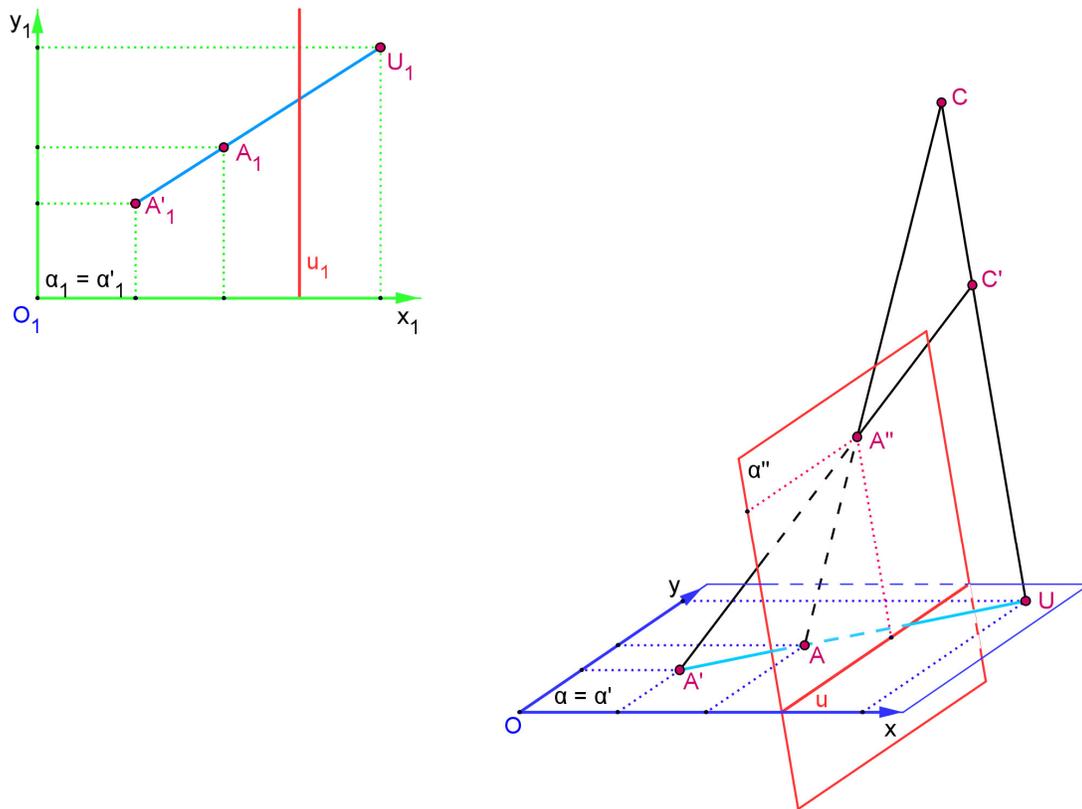


Figura 4: representação dos centros de Perspectiva

O ponto de interseção da reta que contém os centros de Perspectiva  $C$  e  $C'$  com os planos coincidentes  $\alpha \equiv \alpha'$  é denominado centro de Homologia ( $U$ ).

Um problema importante de Homologia consiste na determinação das retas limite (ou retas de fuga) de um sistema homológico. Seja a Homologia determinada por seu eixo  $u$ , um par de pontos homólogos  $A$  e  $A'$ , centros de perspectiva  $C$  e  $C'$ , e o centro de Homologia  $U$  (Figura 5). As retas limite retas de  $\alpha''$  que são determinadas por planos paralelos aos planos coincidentes  $\alpha \equiv \alpha'$ , e que passam pelos centros de projeções  $C$  e  $C'$ . Logo, os pontos pertencentes à reta limite  $i''$  não possuem homólogos do plano  $\alpha$ , enquanto que os pontos pertencentes à reta limite  $j''$  não possuem homólogos do plano  $\alpha'$ .

A resolução bidimensional deste problema é simples, mas não permite a visualização tridimensional da construção. O mesmo acontece resolvendo-se o problema apenas tridimensionalmente.

Resolvendo-se este problema em perspectiva, basta determinar a reta que passa pelos pontos  $N$  e  $A''$  (onde  $N \equiv A'A \cap u$ ) e obter a interseção desta reta com as retas paralelas à direção  $AA'$  que passam por  $C$  ( $\triangle NAA'' \sim \triangle Q''C'A''$ ) e  $C'$  ( $\triangle NAA'' \sim \triangle P''CA''$ ), resultando nos pontos  $Q''$  e  $P''$ , que pertencem às retas limite  $j''$  e  $i''$ , respectivamente.

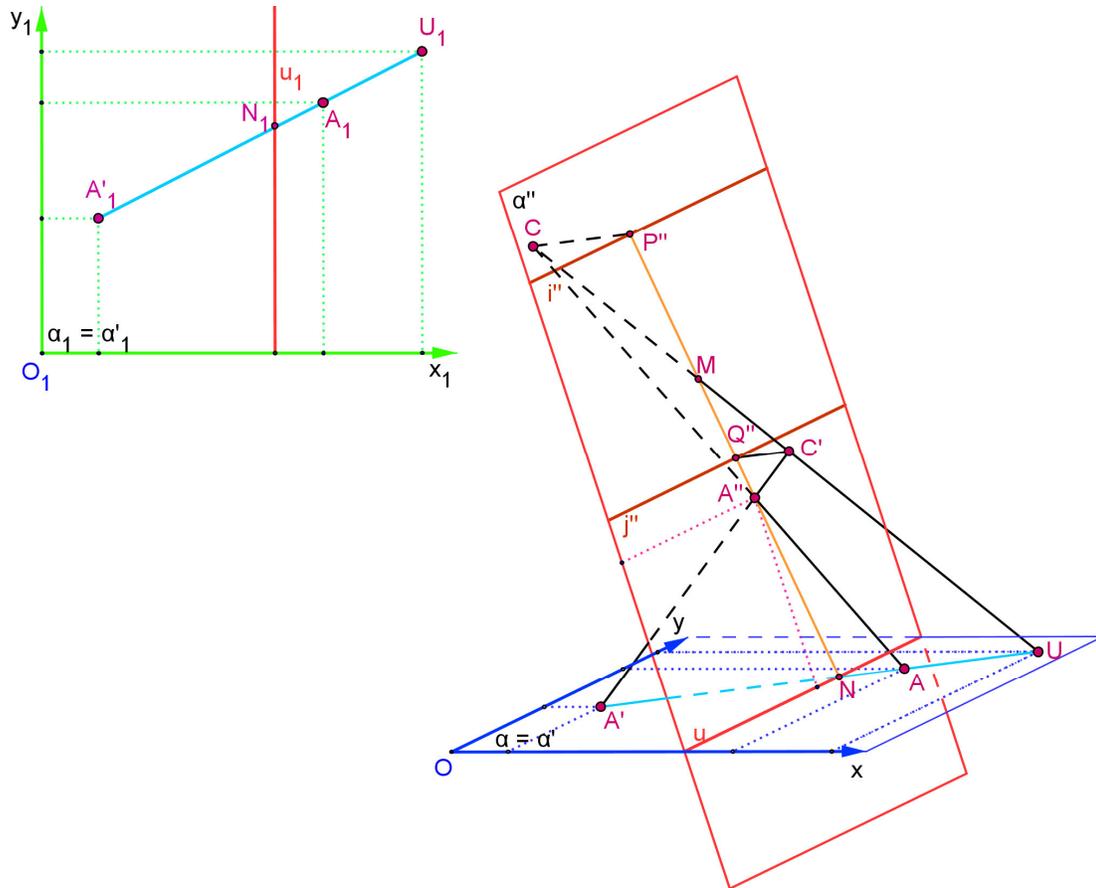


Figura 5: Visualização das retas limite

Nas construções bidimensionais de Homologia Plana, o plano de Perspectiva  $\alpha''$  não é representado, o que impossibilita a construção descrita anteriormente. Na Figura 6 encontra-se a resolução bidimensional deste problema, com a visualização da solução tridimensional da obtenção da projeção da reta limite  $i''$ . A construção da reta limite  $j''$  é feita de maneira análoga.

O objetivo deste problema é encontrar um ponto qualquer da reta  $i''$  projetada sobre  $\alpha'$ , já que a direção de  $i''$  é conhecida, por tratar-se de uma reta paralela ao eixo  $u$ . Seja  $R_1$  um ponto qualquer do eixo  $u_1$ , para encontrar o ponto  $S'_1$  com homólogo  $S$  impróprio, o segmento  $U_1S'_1$  deve ser paralelo ao segmento  $A_1R_1$ , pois a interseção das retas definidas por tais pares de pontos determina o homólogo  $S_1$ . Unindo-se os pontos  $R_1$  e  $A'_1$  obtém-se a projeção do ponto procurado  $S'_1$ , determinando-se a projeção da reta limite  $i''$ .

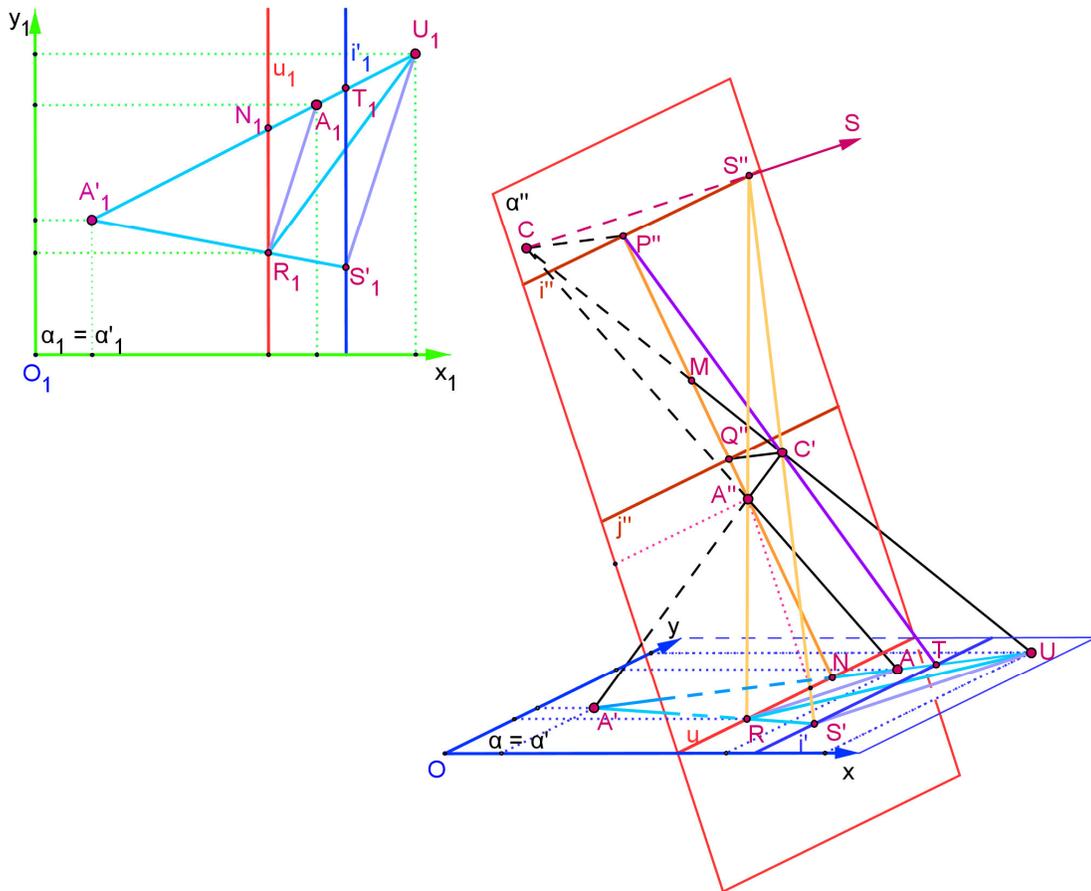


Figura 6: Construção da projeção da reta limite  $i'$

Observa-se na figura em perspectiva que a construção descrita determina a posição do ponto  $S'$  da reta  $i'$ , que corresponde à interseção das retas  $A''R$  e  $S'C'$ , comprovando-se tratar-se do ponto  $S''$  que não possui homólogo  $S$  próprio, e que pertence à reta limite  $i''$ .

### 3 Conclusões

Neste trabalho foram apresentadas algumas possibilidades de uso do software de Geometria Dinâmica GeoGebra para construções bidimensionais e tridimensionais de conceitos básicos de Homologia Plana. Além de facilitar a compreensão dos alunos nas construções mais simples, esta representação pode ser aplicada em construções mais elaboradas da Homologia, como a obtenção das cônicas utilizando conceitos da Homologia Plana.

Os estudos apresentados neste trabalho encontram-se em fase experimental, e pretende-se aplicar esta metodologia em sala de aula, com os alunos de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva.

## Referências

COSTA, Alcy Paes de Andrade Vieira. **Harmonia nas fachadas das igrejas**. In: Anais do 15º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico: Graphica'2001. São Paulo: USP, 2001.

\_\_\_\_\_. **Harmonia na fachada dos templos do grande Recife**. In: Anais do 16º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico: Graphica'2003. Santa Cruz do Sul, 2003.

COSTA, Antonio Mochon. **Métodos Geométricos – Homologia**. Curitiba: UFPR, 1990.

FERNÁNDEZ, Ángel Taibo, **Geometría descriptiva y sus aplicaciones**. Madrid: Editorial Tebar, 1983.

FOLEY, James D. **Computer graphics: principles and practice**. 2. ed. Boston: Addison Wesley, 1995.

GOMES, Jonas; VELHO, Luiz. **Computação gráfica, volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.

HOHENWARTER, Markus; PREINER, Judith. **Dynamic Mathematics with GeoGebra**. Journal of Online Mathematics and its Applications, vol.7, 2007.

PATEK, Maria Madalena dos Santos; LEÃO, Rafael Manjares. **Estudo Da Geometria Gráfica Por Computador**. In: Anais do 18º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico: Graphica'2007. Curitiba: UFPR, 2007.

VIANNA, Sonia Sá; TOSTE, Berta López; COUTINHO, Rodrigo Ribeiro. **O Desenho e as novas tecnologias no Colégio Pedro II: um enfoque atual**. In: Anais do 18º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico: Graphica'2007. Curitiba: UFPR, 2007.