



A INTEGRAÇÃO DO CÁLCULO E DO DESENHO GEOMÉTRICO NO CURSO DE EXPRESSÃO GRÁFICA

Bárbara de Cássia Xavier Cassins Aguiar
UFPR, Departamento de Expressão Gráfica
babi.eg@ufpr.br

Giancarlo de França Aguiar
IFPR, Departamento de Matemática
giancarl_up@hotmail.com

Paulo Henrique Siqueira
UFPR, Departamento de Expressão Gráfica
paulohs@ufpr.br

Resumo

Neste trabalho são apresentadas algumas aplicações sobre curvas planas em coordenadas polares, conteúdo comum nas ementas das disciplinas Desenho Geométrico II e Tópicos de Matemática Aplicados à Expressão Gráfica II, do curso Bacharelado em Expressão Gráfica da UFPR. Com a utilização de softwares de Cálculo e de Geometria Dinâmica o ensino destas disciplinas torna-se mais interessante e permite aplicações em diversas áreas da Expressão Gráfica.

Palavras-chave: Desenho Geométrico, Tópicos de Matemática, Softwares.

Abstract

This paper presents some applications on planar curves in polar coordinates, common content in the menus of disciplines and topics Geometric Design II Mathematics Applied to Graphic Expression II, the course Bachelor of Graphic Expression UFPR. With the use of software for calculating and Dynamic Geometry teaching these disciplines becomes more interesting and allows applications in various areas of Graphic Expression.

Keywords: Geometric Design, Topics in Mathematics, software.



1 Introdução

No curso Bacharelado em Expressão Gráfica da Universidade Federal do Paraná, os discentes têm uma formação básica inicial, responsável pela construção de fundamentos teóricos de técnicas de representação de projetos e suas normas. Nas disciplinas básicas os estudantes aprendem conceitos de Geometria Plana e Espacial, Normas do Desenho Técnico, Técnicas de Representação Gráfica, Cálculo e Geometria Analítica. Os conteúdos destas disciplinas servem como base para as disciplinas específicas que estão direcionadas à utilização de softwares de Desenho Assistido por Computador (CAD) e de Modelagem Geométrica, capazes de produzirem projetos desde sua concepção até sua execução.

Neste trabalho são apresentadas algumas aplicações dos conteúdos comuns das disciplinas Desenho Geométrico II e Tópicos de Matemática Aplicados à Expressão Gráfica II, que são disciplinas básicas ofertadas no segundo semestre do curso Bacharelado em Expressão Gráfica da UFPR.

Na disciplina de Tópicos de Matemática Aplicados à Expressão Gráfica II, os alunos trabalharam com cálculo de área de figuras geradas por equações polares e construção do gráfico das equações dadas em coordenadas polares de curvas planas como: Circunferências, Limaçons, Cardióides, Lemniscata de Bernoulli, Espiral de Arquimedes e Rosáceas. Os cálculos das áreas foram obtidos através da aplicação do conceito da integral definida, conteúdo presente na ementa da disciplina. Os gráficos foram construídos com o auxílio dos softwares Winplot e Geogebra.

Na disciplina de Desenho Geométrico II, os alunos trabalharam com as construções das mesmas curvas da disciplina de Tópicos de Matemática, porém com o enfoque das propriedades geométricas dos pontos das curvas. Algumas foram feitas com instrumentos de desenho (esquadros, régua e compasso) e outras com o software Geogebra.

O trabalho de Barbosa, Carvalhaes e Costa (2006) mostra como os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral podem ser apresentados de forma intuitiva no ensino dos conceitos de Física para os alunos do ensino Médio. A proposta dos autores é de utilizar uma planilha eletrônica para representar convergência de valores numéricos que representam fenômenos físicos, melhorando a aprendizagem destes conceitos.

Outros softwares bastante conhecidos para auxiliar o ensino de Cálculo Diferencial e Integral são o Winplot (Traldi Junior, 2009, Marin, 2012) e o Maple (Lobeiro et al., 2009, Wendt et al., 2010). Estes softwares são importantes tanto para a visualização de gráficos das curvas de 2 ou 3 dimensões, como também nos cálculos de derivadas e integrais.

Algumas aplicações de lugares geométricos em problemas reais são apresentadas no trabalho de Oliveira e Araújo (2012). Os alunos do ensino fundamental e médio resolveram problemas que utilizavam os conceitos de lugares geométricos aplicados em situações do cotidiano com auxílio do software Geogebra.

Bongiovanni (2006) ilustra o uso das cônicas para resolver problemas clássicos da geometria através das ferramentas do software Cabri-Geomètre. As construções apresentadas pelo autor mostram novas formas de ensino dos conceitos comuns à disciplina de Desenho Geométrico.

1 Conteúdos envolvidos nas disciplinas

A seguir são abordados alguns conteúdos presentes nas ementas das disciplinas de Desenho Geométrico II e Tópicos de Matemática Aplicados à Expressão Gráfica II.

1.1 O sistema polar

O sistema polar é geralmente utilizado quando a equação cartesiana de um lugar geométrico apresenta dificuldade operacional na sua utilização devido, por exemplo, ao grau elevado de suas variáveis. Na maioria das vezes a equação deste lugar geométrico em coordenadas polares é simples e de fácil manipulação (Swokowsky, 1994).

O sistema polar é constituído de um eixo e um ponto fixo sobre este. O eixo é chamado de eixo polar e o ponto fixo de polo.

A todo ponto P do plano associamos um par de elementos: o primeiro é a distância do ponto P ao polo e o segundo é o ângulo formado pelo eixo polar e o segmento OP . A Figura 1 ilustra o plano polar.

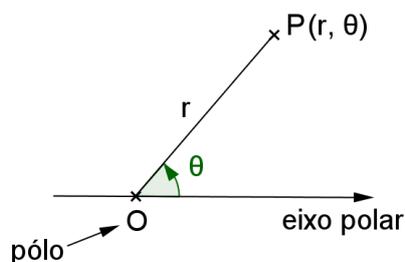


Figura 1: Plano polar

Para localizar um ponto P em coordenadas polares (r, θ) , localizamos o lado final do ângulo θ , onde θ é medido como na trigonometria (positivo no sentido anti-horário) e caso contrário, o ângulo é negativo. Neste segmento do lado final do ângulo marcamos um segmento de comprimento r . Se $r \geq 0$, então P está no lado final do ângulo e se $r < 0$ então o ponto está no raio oposto (Thomas, 2002).

O gráfico de uma equação em coordenadas polares é o conjunto dos pontos P tais que P tem algum par de coordenadas (r, θ) que satisfaz a equação dada. O gráfico de uma equação $r = f(\theta)$ pode ser construído calculando uma tabela com vários valores de (r, θ) e então marcando estes pontos no plano polar.

Pode-se achar a área de certas regiões delimitadas por gráficos de equações polares utilizando-se limites de somas de áreas de setores circulares de acordo com o Teorema 1.

Teorema 1: Se f é contínua e $f(\theta) \geq 0$ em $[\alpha, \beta]$, onde $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$, então a área A da região delimitada pelos gráficos de $r = f(\theta)$ é:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Para encontrar a área da região é necessário fazer um esboço do gráfico, de $r = f(\theta)$. Deve-se achar o menor valor $\theta = \alpha$ e o maior valor $\theta = \beta$ para pontos (r, θ) na região.

No exemplo dado a seguir a área da região do plano limitada pela cardióide de equação polar $r = 2(1 + \cos\theta)$ é calculada. A Tabela 1 mostra algumas soluções desta equação, juntamente com aproximações de r com duas casas decimais.

Tabela 1: Soluções de $r = 2(1 + \cos\theta)$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	4	3,73	3,41	3	2	1	0,58	0,26	0

Marcando os pontos da Tabela 1 no plano polar, com $0 \leq \theta \leq \pi$ obtemos a metade superior do gráfico mostrado na Figura 2. Marcando pontos para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, obtemos a metade inferior do gráfico.

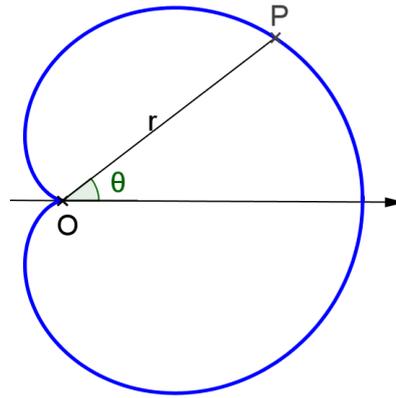


Figura 2: Cardióide $r = 2(1 + \cos\theta)$

A seguir o cálculo da área da cardióide $r = 2(1 + \cos\theta)$ foi obtida através da aplicação do conceito da integral definida apresentada no Teorema 1.

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (2 + 2 \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi} (4 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta) d\theta$$

Como $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, temos que :

$$A = \int_0^{\pi} [4 + 8 \cos \theta + 4 * \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)] d\theta = \int_0^{\pi} (4 + 8 \cos \theta + 2 + 2 \cos 2\theta) d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi} (6 + 8 \cos \theta + 2 \cos 2\theta) d\theta = 6\theta + 8 \operatorname{sen} \theta + 2 * \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \Big|_0^{\pi}$$

$$A = 6 * \pi + 8 * \operatorname{sen} \pi + \operatorname{sen} 2 * \pi - 6 * 0 - 8 * \operatorname{sen} 0 - \operatorname{sen} 2 * 0$$

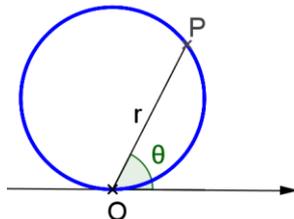
$$A = 6\pi \text{ unidades de área}$$

Na Figura 3 podem ser observadas as curvas planas exploradas na disciplina de Tópicos de Matemática Aplicados à Expressão Gráfica II.

Circunferências

$r = \pm a \cos \theta$ ou $r = \pm a \sin \theta$, onde $a \in \mathbb{R}$.

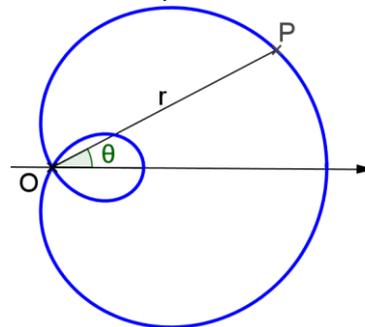
Exemplo: $r = 2 \sin \theta$.



Limaçons

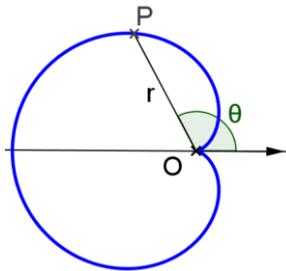
$r = a \pm b \cos \theta$ ou $r = a \pm b \sin \theta$, onde $a,$

$b \in \mathbb{R}$. Exemplo: $r = 1 + 2 \cos \theta$.



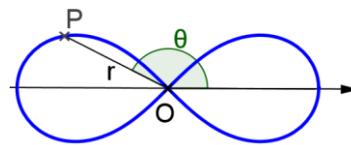
Cardióides

São limaçoens onde $a = b$.
 $r = a(1 \pm \cos\theta)$ ou $r = a(1 \pm \sin\theta)$, onde
 $a \in \mathbb{R}$. Exemplo: $r = 1 - \cos\theta$.



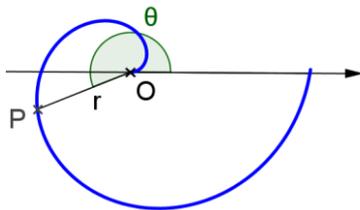
Lemniscata de Bernoulli

$r^2 = a^2 \cos(2\theta)$, onde $a \in \mathbb{R}$.
Exemplo: $r^2 = 4\cos(2\theta)$.



Espiral de Arquimedes

$r = a\theta$, onde $a > 0$ ou $r = \theta$, onde
 $0 \leq \theta \leq 4\pi$. Exemplo: $r = \theta$.



Rosáceas

$r = a \cos(b\theta)$ ou $r = a \sin(b\theta)$, onde a, b
 $\in \mathbb{R}$. Exemplo: $r = 2\sin(4\theta)$

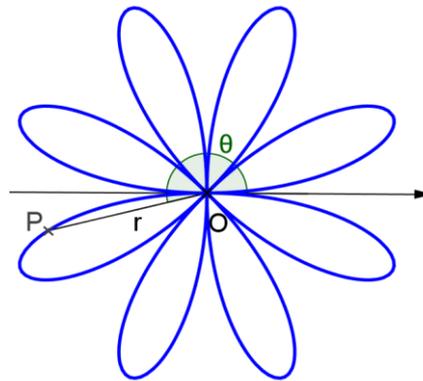


Figura 3: Curvas planas

1.2 Obtenção de cada curva como lugar geométrico

Na disciplina de Desenho Geométrico as mesmas curvas foram construídas com uma mesma metodologia. Quando feitas com instrumentos determinamos diversos pontos da curva, obtidos através da propriedade desta curva, para depois traçá-la unindo-se os pontos à mão livre. Quando feitas no Geogebra determinamos um ponto da curva, para depois usar a ferramenta “lugar geométrico” para determiná-la.

A construção de uma Limaçon, também chamada de Conchóide de circunferência, é feita da seguinte maneira: dados um segmento d e uma circunferência de centro O e raio OA , considere A como polo (Figura 4). Determine um ponto B da circunferência e a reta que passa por B e pelo polo A . O lugar geométrico dos pontos P e P' tais que $BP = BP' = d$ é a limaçon. Quando d é igual ao diâmetro da circunferência temos a cardioide (Braga, 1997).

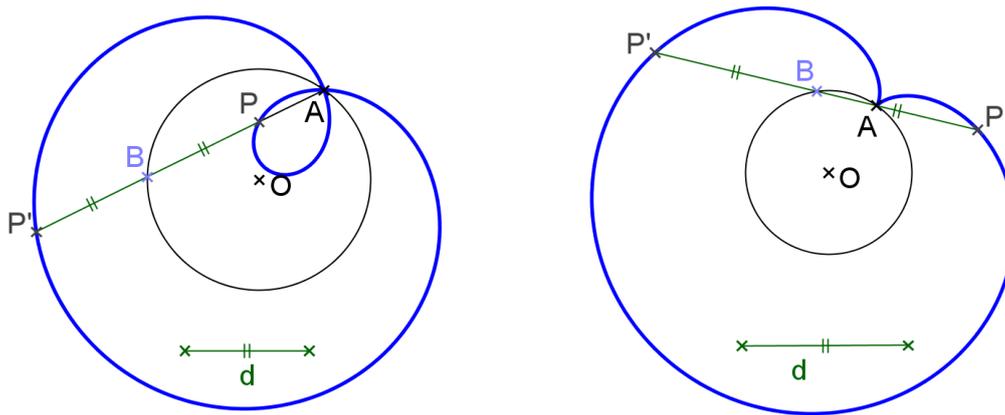


Figura 4: Limaçon e Cardióide

A Lemniscata de Bernoulli é um caso particular da curva de Cassini, quando a mesma passa pelo centro focal da curva. Para construir esta curva, considere o ponto médio O dos segmentos colineares AA' e FF'. Desta forma F e F' são os focos e A e A' os vértices da curva (Figura 5).

O lugar geométrico dos pontos P tais que $PF \cdot PF' = AB \cdot AC$, ou seja, que mantém a mesma potência do ponto A (ou A') em relação à circunferência de diâmetro FF', é a curva de Cassini. Para determinar um ponto P desta curva basta traçar por um ponto B da circunferência a reta AB, que intercepta a circunferência em C. Logo, AB.AC será a potência do ponto A em relação à circunferência de diâmetro FF'. O ponto P é a interseção das circunferências de centro F e raio AB e de centro F' e raio AC.

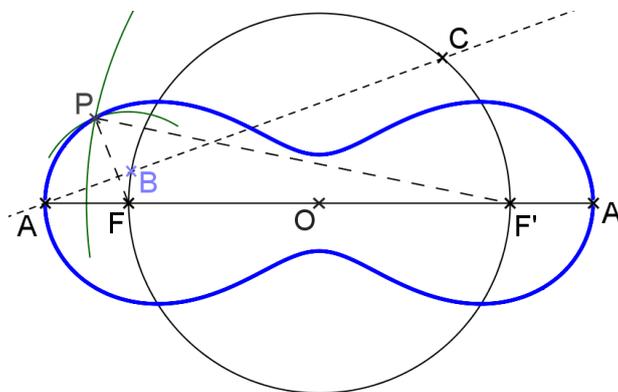


Figura 5: Curva de Cassini

Para transformar a curva de Cassini de focos F e F' na Lemniscata de Bernoulli basta traçar um segmento OT que forma 45° com FF'. Pelo ponto T traçamos uma tangente à circunferência, que determina o ponto A sobre a reta FF'. Usando a mesma construção da curva de Cassini, obtemos a curva procurada (Figura 6).

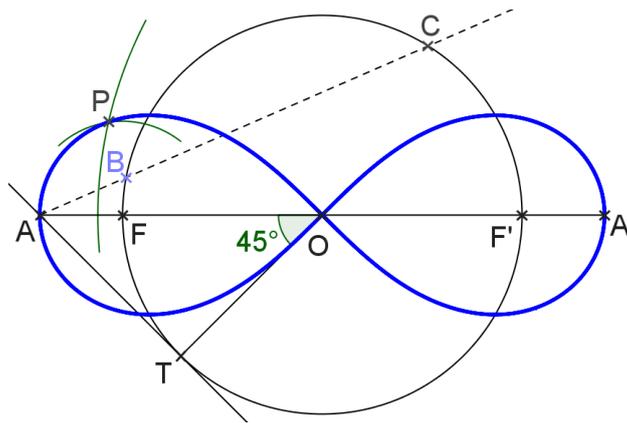


Figura 6: Lemniscata de Bernoulli

A construção da espiral de Arquimedes pode ser feita de duas formas. Para construí-la por pontos devemos construir a circunferência com raio r correspondente a uma volta da espiral, e dividi-la em um número n de partes iguais (Figura 7). Obtemos assim as semi-retas com origem no centro O com nomes a_1, a_2, \dots, a_n . Além disso dividimos também o raio da circunferência em n partes iguais, e construímos as circunferências de centro O e raios $r/n, 2r/n, \dots, (n-1)r/n$. Os pontos da espiral são encontrados nas interseções de a_1 com a circunferência de raio r/n , a_2 com a circunferência de raio $2r/n$, e assim sucessivamente.

Outra maneira de construir a espiral de Arquimedes é traçando uma circunferência de raio $OA = p$, correspondente a uma volta da curva. Marcamos um ponto móvel B na circunferência e o ângulo θ correspondente a $A\hat{O}B$. À medida que θ aumenta, o ponto P da espiral se afasta proporcionalmente de O , ou seja, construindo-se uma circunferência de centro O e raio $OA \cdot \theta$ obtemos o ponto P em OB . O lugar geométrico de P em relação a B é a espiral procurada.

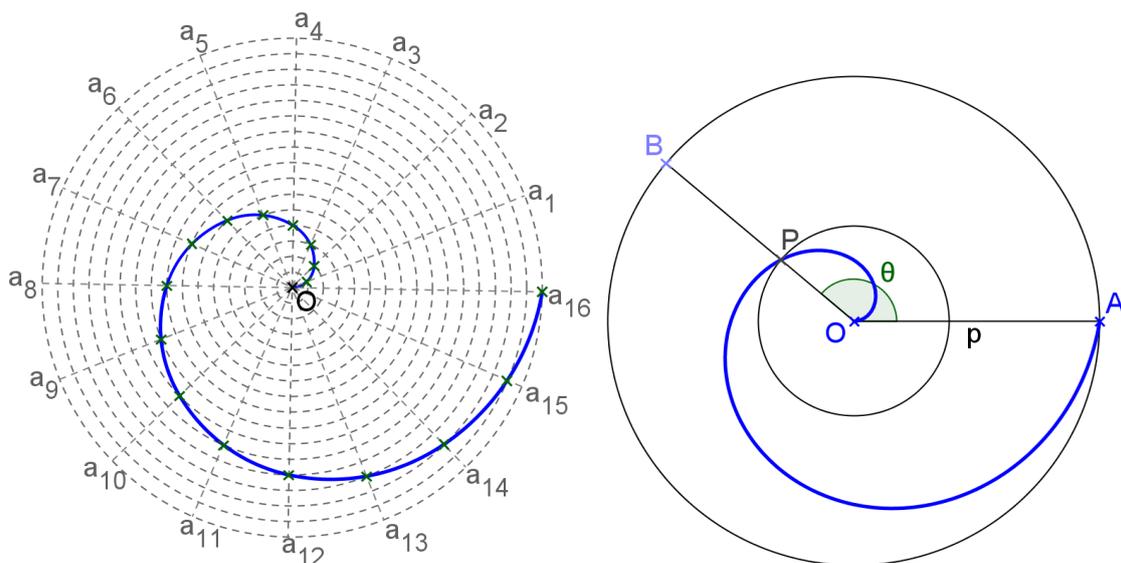


Figura 7: Espiral de Arquimedes

A rosácea pode ser construída de maneira similar à segunda construção apresentada da espiral de Arquimedes. Dada a circunferência de centro O e raio OA , marcamos um ponto móvel B na circunferência e o ângulo $\alpha = \widehat{A\hat{O}B}$ (Figura 8). Em seguida determinamos um ângulo de amplitude fixa $\beta = n \cdot \alpha = \widehat{A\hat{O}C}$. A interseção da circunferência de centro C e raio OC com a reta OB , que determina α , é o ponto P da curva. O lugar geométrico de P em relação ao ponto B é a rosácea.

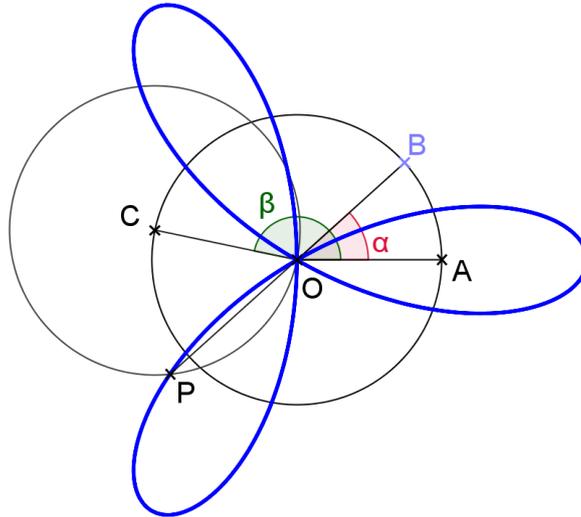


Figura 8: Rosácea com $\beta = 4 \cdot \alpha$

1.3 Uso das curvas para desenhar uma cena

A proposta para conclusão da disciplina de Desenho Geométrico II para o curso de Expressão Gráfica foi de que cada aluno utilizasse as curvas apresentadas neste trabalho como base para desenhar o perfil de uma cena com um personagem. Todos fizeram em um retângulo de 20x40cm no software Geogebra usando as curvas apresentadas neste trabalho, além das curvas: Kappa, Bifolium, Trissetriz de Ceva, Crosscurve, Serpentina, Torpedo, Quártica Piriforme, a Lemniscata de Geron e outras curvas paramétricas (Braga, 1997, Carvalho, 2008).

A Figura 9 mostra um exemplo da aplicação destas curvas no trabalho proposto construída no Geogebra.

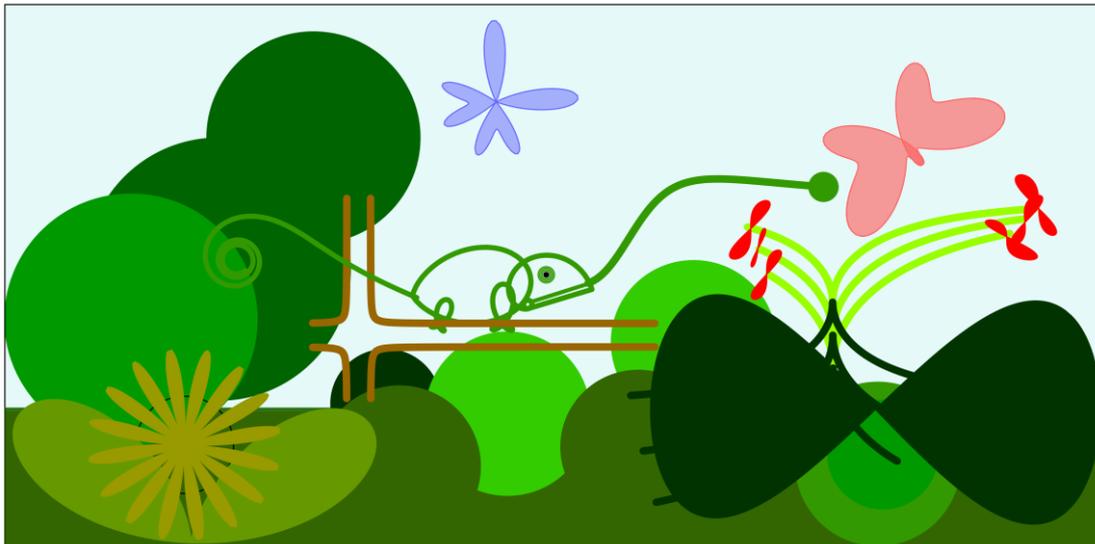


Figura 9: Cena do aluno Rodrigo Matimoto com um personagem com as curvas propostas.

2 Conclusão

Neste trabalho, foram apresentadas algumas aplicações sobre curvas planas em coordenadas polares, conteúdo comum nas ementas das disciplinas Desenho Geométrico II e Tópicos de Matemática Aplicados à Expressão Gráfica II, do curso Bacharelado em Expressão Gráfica da UFPR. Os resultados obtidos com a integração das duas disciplinas foi muito produtivo, uma vez que os alunos puderam aplicar os conhecimentos adquiridos em disciplinas básicas na elaboração de um projeto artístico com o auxílio de softwares de desenho.

Referências

BARBOSA, Augusto César de Castro; CARVALHAES, Cláudio Gonçalves; COSTA, Marcus Vinicius Tovar. **A computação numérica como ferramenta para o professor de Física do Ensino Médio**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 28, n. 2, p. 249 – 254, 2006.

BONGIOVANNI, Vincenzo. **As Cônicas como Ferramentas para Resolver Problemas Geométricos**. Revista do professor de Matemática, vol. 60, p. 47-50, 2006.

BRAGA, Theodoro. **Desenho Linear Geométrico**. 14^a edição. Editora Ícone, São Paulo, 1997.

CARVALHO, Benjamin de Araújo. **Desenho Geométrico**. 32^a edição. Rio de Janeiro: Imperial Novo Milênio, 2008.

LOBEIRO, Adilandri Mercio; MACOWSKI, Diogo Heron; CUMIN, Liliana Madalena Gramani; PAIÃO, Nayene Michele Pitta; CORRÊA, Wellington. **Utilizando o software Maple 13 para visualizar a derivada**. Proceedings of the 1st International Congress of Mathematics, Engineering and Society - ICMES 2009, Curitiba-PR, p. 1-6, 2009.

MARIN, Douglas. **Vantagens e desvantagens apontadas por professores de Matemática no uso de tecnologia de informação e comunicação de Matemática no Ensino Superior**. Revista Eletrônica da Divisão de Formação Docente, vol. 1, n. 1, p. 13-27, 2012.

OLIVEIRA, Gerson Pastre; ARAÚJO, Pérciles Bedretchuk. **Uma abordagem para o ensino de lugares geométricos com o GeoGebra**. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, vol. 7, n. 2, p. 209-222, 2012.

SWOKOWSKI, Earl William. **Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 2, 2ª edição. São Paulo: Editora Makron Books, 1994.

THOMAS, George Brinton. **Cálculo**. Volume 2, 10ª edição. São Paulo: Editora Pearson, 2002.

TRALDI JUNIOR, Armando. **Concepções dos formadores de professores de matemática**. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, vol. 19, p. 130-139, 2009.

WENDT, Angela Mallmann; HALBERSTADT, Fabrício Fernando; FIGUEIREDO, Fernanda Ronssani de; BONALDO, Lauren Maria Mezzomo; BIDEL, Antonio Carlos Lyrio. **Noções Básicas de Cálculo Diferencial e Integral com o Maple**. ERMAC 2010: I Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, São João Del Rey - MG, p. 90-107, 2010.