



UTILIZAÇÃO DO PONTO DE BRIANCHON PARA A CONSTRUÇÃO DA RETA DE NEWTON

Paulo Henrique Siqueira

UFPR, Departamento de Expressão Gráfica
paulohs@ufpr.br

Bárbara de Cássia Xavier Cassins Aguiar

UFPR, Departamento de Expressão Gráfica
babi.eg@ufpr.br

Resumo

Neste trabalho são apresentados conceitos para a resolução do problema de encontrar pontos de uma cônica tangente a quatro retas, dado o ponto de tangência de uma das retas. A resolução deste problema, associada aos conceitos do Teorema de Brianchon, podem ser usados para visualizar as cônicas circunscritas em um quadrilátero, facilitando a compreensão da reta de Newton, e possibilitando sua utilização nas disciplinas de Desenho Geométrico e Geometria Euclideana. As construções foram feitas com o software Geogebra, que permite movimentar pontos de tangência, obtendo-se assim diversas cônicas circunscritas em um quadrilátero.

Palavras-chave: Construções geométricas, Cônicas, Geometria dinâmica.

Abstract

In this work are presented concepts to resolution of problem to find points of a conic tangent to four lines, given the point of contact from a line. The resolution of this problem associated with concepts of Brianchon's Theorem can be used to show the conics circumscribed in a quadrilateral, facilitating the understanding of the Newton's line, and allowing its use in disciplines of Geometrical Constructions and Euclidean Geometry. The constructions were made with software Geogebra, allowing students to move points of contact, obtaining many conics circumscribed in a same quadrilateral.

Keywords: Geometrical constructions, Conics, Dynamic geometry

1 Introdução

Neste trabalho são apresentados os teoremas e as construções que permitem uma visualização da Reta de Newton nas cônicas. A sequência de teoremas e construções

apresentada neste trabalho serve como base para a construção de um problema um pouco mais complexo sobre as cônicas: encontrar pontos de uma cônica tangente a quatro retas, dado o ponto de tangência de uma das retas. A resolução deste problema permite a visualização do Teorema de Newton, que garante que a reta que passa pelos pontos médios das diagonais de um quadrilátero circunscrito a uma cônica passa pelo centro da mesma (DÖRIE, 1965; EHRMANN, 2004).

Os conceitos utilizados envolvem Homologia Plana, o Teorema de Brianchon e potência de ponto em relação a uma circunferência. As construções deste trabalho foram feitas com o software livre de Geometria Dinâmica *Geogebra*, permitindo que os elementos das construções sejam movimentados, mantendo-se as propriedades das figuras (HOHENWARTER e PREINER, 2007). Estes conceitos podem ser utilizados no estudo de Cônicas em disciplinas de Desenho Geométrico ou Geometria Euclidiana.

2 Ponto de Brianchon

O ponto de Brianchon é o encontro das diagonais de um hexágono circunscrito a uma cônica. De acordo com Akopyan e Zaslavsky (2007), este ponto pode ser usado nas demonstrações de algumas propriedades das cônicas.

No trabalho de Stankova (2004) a autora demonstra o Teorema de Brianchon através de um hexágono não plano, cuja construção parte do princípio que as projeções de seus vértices em um plano resultam em um hexágono circunscrito em uma circunferência. Outros trabalhos que mostram propriedades do Teorema de Brianchon são Volenec (2003) e Van Kempen (2006).

A demonstração do Teorema de Brianchon para circunferências pode ser encontrada em Smogorzhevskii (1961), Dörie (1965) e Coxeter (1967).

Considere o hexágono ABCDEF circunscrito em uma circunferência, onde os pontos de tangência dos lados AB, BC, CD, DE, EF e AF são, respectivamente, P, Q, R, S, T e U (Figura 1). Nos prolongamentos dos lados considere os pontos P', Q', R', S', T' e U' tais que $PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU'$.

Sejam as circunferências de centro O_1 (tangente a TT' e QQ' em T' e Q'), O_2 (tangente a PP' e SS' em P' e S') e O_3 (tangente a RR' e UU' em R' e U'). Como as distâncias de um ponto aos pontos de tangência de uma circunferência são iguais, tem-se $AP = AU$ e $DR = DS$. Como $PP' = UU' = RR' = SS'$, tem-se:

$$AU' = AU + UU' = AP + PP' = AP', \text{ e } DS' = SS' - DS = RR' - DR = DR'.$$

Desta forma, os pontos A e D têm mesma potência de ponto em relação às circunferências de centros O_2 e O_3 , o que significa que AD é o eixo radical entre estas circunferências. Analogamente prova-se que CF é o eixo radical entre as

circunferências de centros O_1 e O_3 , e que EB é o eixo radical entre as circunferências de centros O_1 e O_2 .

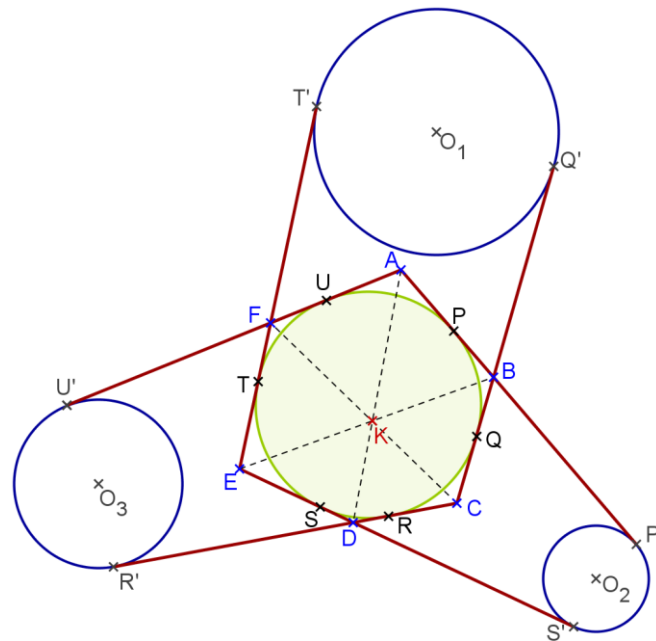


Figura 1: Ponto de Brianchon em um hexágono circunscrito em uma circunferência.

Como a interseção dos três eixos radicais de três circunferências com centros não colineares é o centro radical das circunferências (ponto que possui mesma potência de ponto em relação a três ou mais circunferências), o encontro das diagonais do hexágono circunscrito é o ponto K de Brianchon (COXETER, 1967).

Segundo Eves (1972), as relações que existem em quadriláteros circunscritos em circunferências podem ser utilizadas nas cônicas, desde que exista um sistema de Homologia que transforme as cônicas em circunferências.

3 Homologia plana

Considerando-se os centros de perspectiva C e C' (Figura 2), pode-se definir a correspondência biunívoca entre os pontos do plano de perspectiva α'' com os pontos dos planos coincidentes $\alpha \equiv \alpha'$ (COSTA, 1990; SIQUEIRA, COSTA e SOUZA, 2009).

Dado um ponto A'' de α'' , existem as projeções centrais de A'' com centro de projeção C , que corresponde ao ponto A do plano α , e com centro de projeção C' , que corresponde ao ponto A' de α' . A interseção da reta definida pelo segmento CC' com $\alpha \equiv \alpha'$ é o centro de Homologia U , e a interseção entre $\alpha \equiv \alpha'$ e α'' o eixo da Homologia. As construções são feitas com as projeções dos planos coincidentes, omitindo-se α'' .

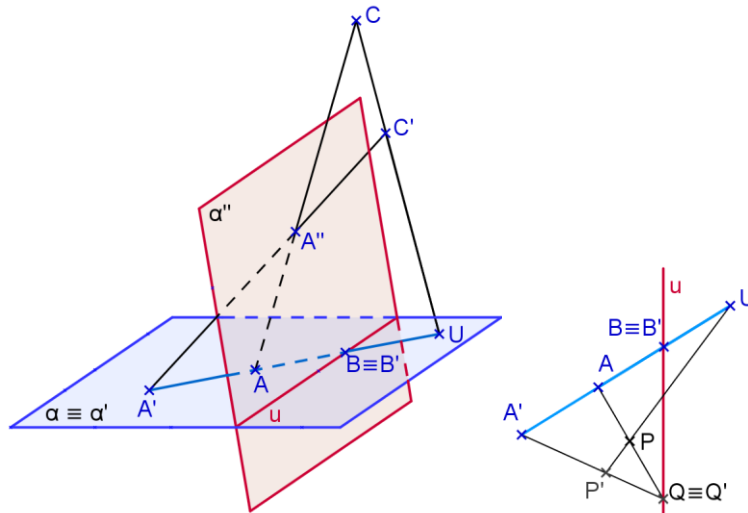


Figura 2: Homologia Plana ou Sistema Homológico.

Todo ponto do eixo u pertence simultaneamente aos planos α , α' e α'' . Logo, dado um ponto P , para encontrar o correspondente P' basta encontrar a interseção da reta definida pelo segmento AP com o eixo u ($Q \equiv Q'$), e unir este ponto com A' . A interseção de UP com $A'Q'$ é o ponto P' procurado (Figura 2). A interseção entre α'' e um plano paralelo a $\alpha \equiv \alpha'$ que passa por C determina a reta limite i , que consiste nos pontos com projeções centrais impróprias com centro de projeção C . Analogamente define-se a reta limite j , com projeções centrais impróprias com centro C' . Na Figura 3, a reta limite j está determinada, pois o ponto C' é próprio, mas a reta i não é determinada, pois neste caso C é um ponto impróprio.

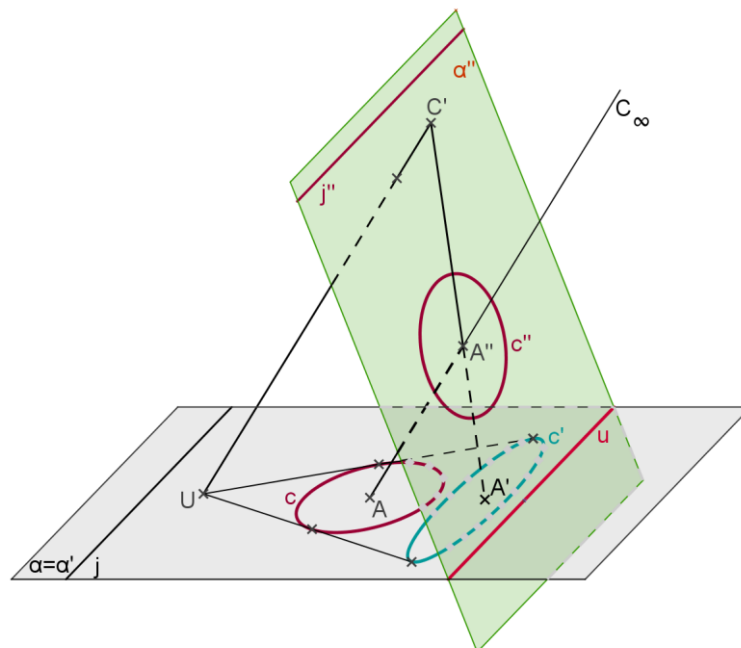


Figura 3: Transformada homológica da circunferência c : elipse c' .

Quando se considera um cilindro interceptando α e α'' segundo circunferências (Figura 3), e o ponto C impróprio, o sistema homológico transforma circunferências em cônicas (COSTA, 1990). Quando a circunferência é tangente à reta limite j , tem-se a parábola; quando são secantes, tem-se uma hipérbole; e quando são exteriores tem-se a elipse.

A construção mais simples para transformar uma cônica em circunferência homóloga utiliza um dos pontos da cônica como centro de Homologia (PUIG ADAM, 1986). Sejam U , A' , B' e C' pontos distintos da cônica (Figura 4), e as retas t_U e t'_B tangentes à cônica em U e B' .

Considere a circunferência de centro O tangente à cônica em U . Unindo-se A' , B' e C' com o centro U , são determinados os homólogos A , B e C sobre a circunferência. Para encontrar o eixo u , basta unir os pares de homólogos e encontrar as seguintes interseções: as retas definidas pelos segmentos AB e $A'B'$ determinam P ; as tangentes t'_B e t_B determinam Q ; e as retas definidas pelos segmentos AC e $A'C'$ determinam R . Logo, basta encontrar as interseções de dois pares de homólogos, ou dois pares de tangentes à cônica e à circunferência.

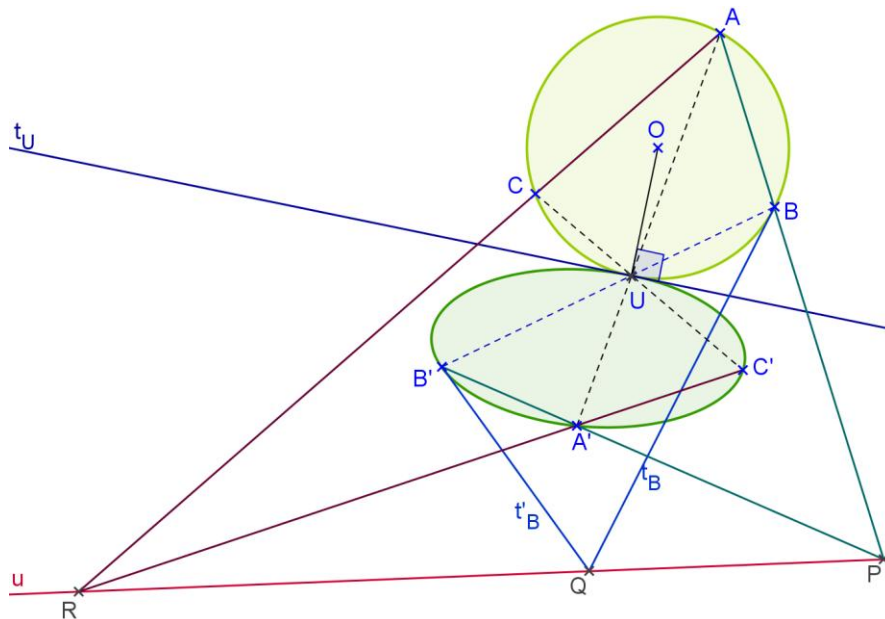


Figura 4: Construção de uma circunferência homóloga a uma cônica.

Como é possível transformar uma cônica em circunferência através da Homologia, o teorema de Brianchon pode ser aplicado nas cônicas de uma forma mais direta (EVES, 1972, 1995). Nas Figuras 5, 6 e 7 o sistema homológico transforma as cônicas em circunferências, transformando também os hexágonos circunscritos nas cônicas em hexágonos circunscritos nas circunferências.

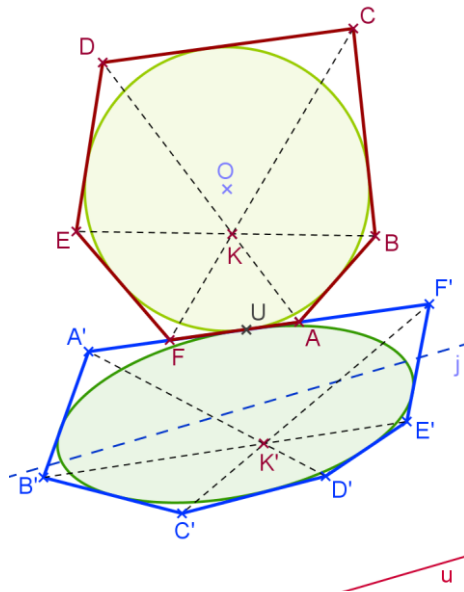


Figura 5: Ponto de Brianchon em um hexágono circunscrito em uma elipse.

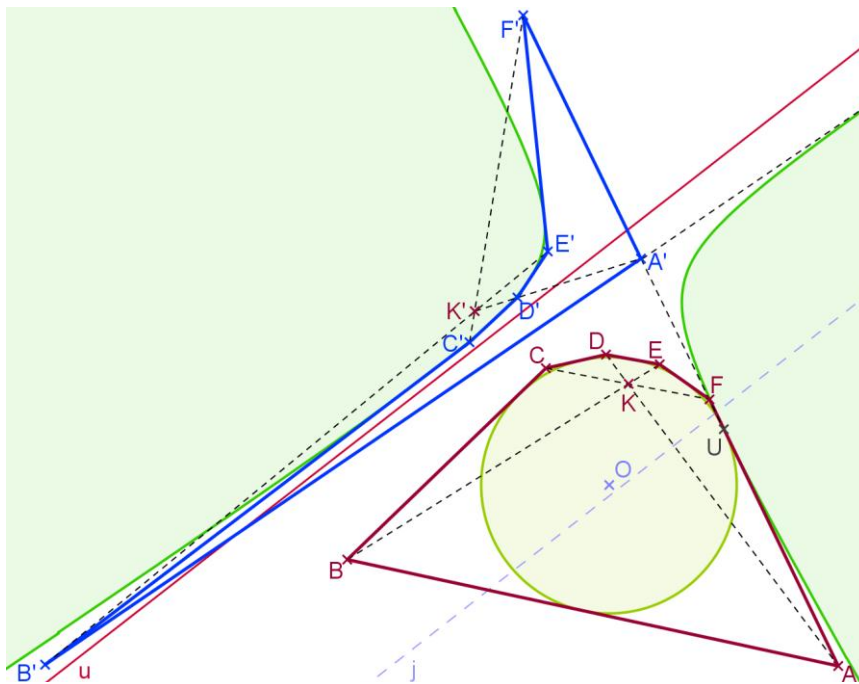


Figura 6: Ponto de Brianchon em um hexágono circunscrito em uma hipérbole.

Considerando-se na Figura 8 a modificação da posição do ponto de tangência P' , sobre a elipse, até que ocorra a coincidência de P' com o vértice A' e o centro de Homologia U , o hexágono transforma-se em um pentágono, pois os vértices F' , A' e B' tornam-se colineares, conforme mostra a Figura 9. Desta forma, a propriedade a seguir pode ser enunciada.

Propriedade 1: Em um pentágono $BCDEF$ circunscrito em uma circunferência (ou cônica), as diagonais CF e BE interceptam o segmento AD no ponto K , onde A é o ponto de tangência da circunferência (ou cônica) no lado BF .

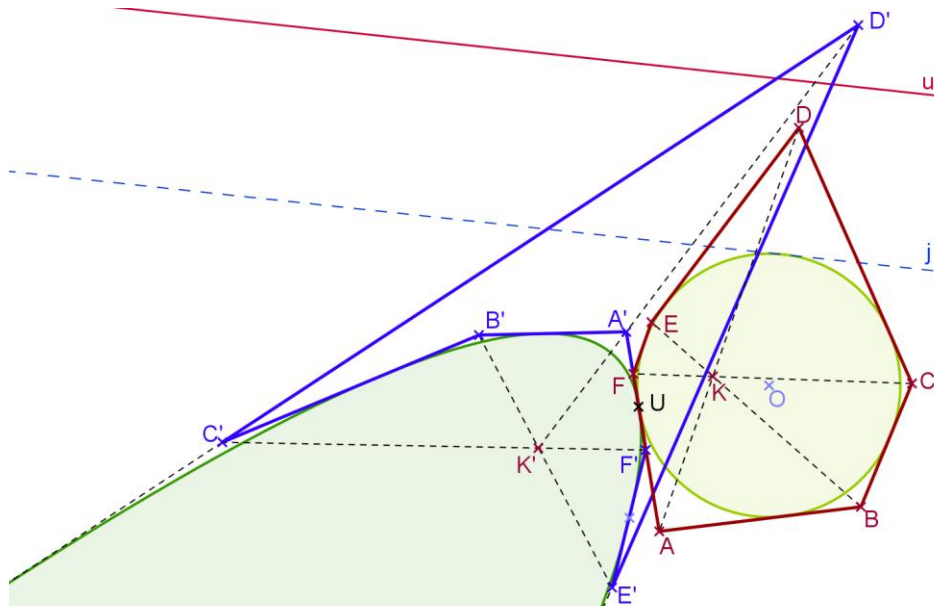


Figura 7: Ponto de Brianchon em um hexágono circunscrito em uma parábola.

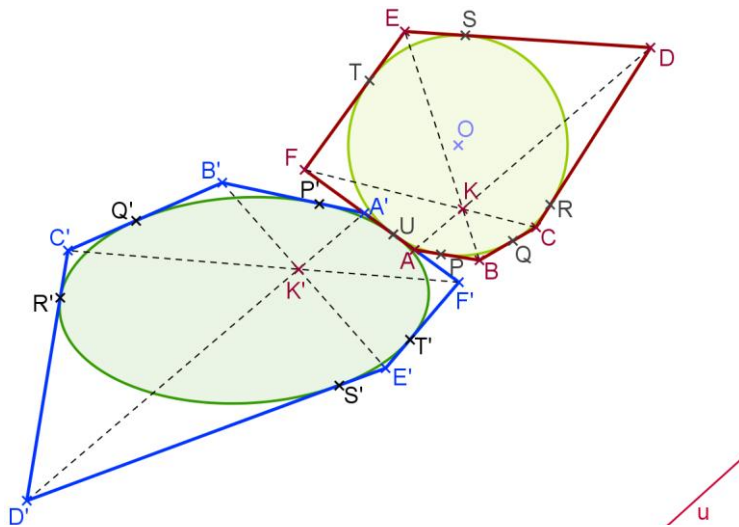


Figura 8: Ponto de Brianchon para hexágono circunscrito em uma elipse.

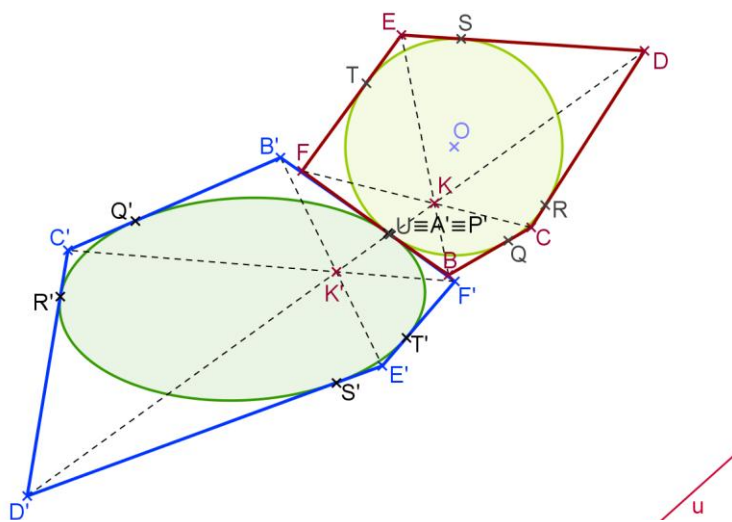


Figura 9: Ponto de Brianchon de um pentágono circunscrito em uma elipse.

Deslocando-se o ponto de tangência T' sobre a cônica até coincidir com o vértice E' e o ponto de tangência S' , o pentágono transforma-se em um quadrilátero (Figura 10), e a propriedade a seguir pode ser enunciada.

Propriedade 2: Em um quadrilátero $BCDF$ circunscrito em uma circunferência (ou cônica) a diagonal CF intercepta os segmentos AD e BE no ponto K , onde A é o ponto de tangência da circunferência (ou cônica) no lado BF e E é o ponto de tangência da circunferência (ou cônica) no lado DF .

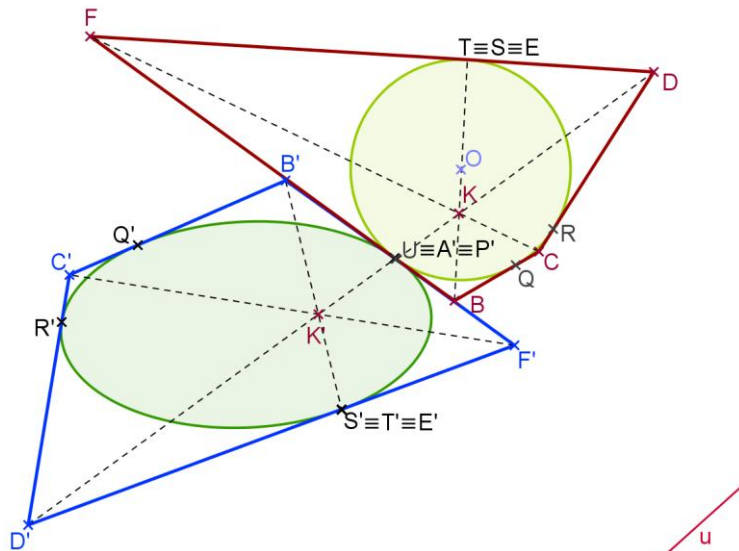


Figura 10: Ponto de Brianchon de um quadrilátero circunscrito em uma elipse.

Deslocando-se o ponto de tangência Q' sobre a cônica até coincidir com o vértice C' e o ponto de tangência R' tem-se a propriedade a seguir, onde o ponto K é mais conhecido como ponto de Gergonne do triângulo BDF (Figura 11).

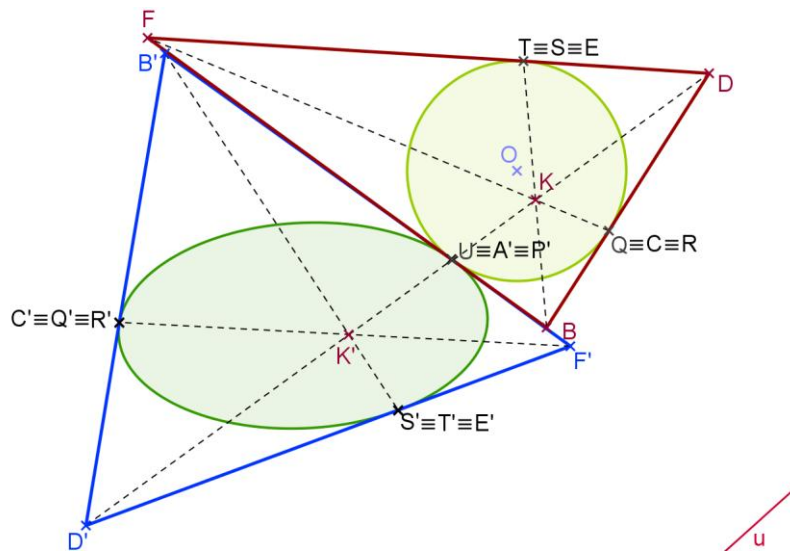


Figura 11: Ponto de Gergonne de um triângulo circunscrito em uma elipse.

Teorema de Gergonne: Em um triângulo BDF circunscrito em uma circunferência (ou cônica) os segmentos que unem os vértices aos pontos de tangência dos lados opostos interceptam-se no ponto K.

4 Reta de Newton

Utilizando-se os teoremas e as propriedades apresentadas, o problema a seguir pode ser resolvido, e a principal propriedade da reta de Newton pode ser visualizada.

Problema: Encontrar pontos de uma cônica tangente a quatro retas, dado o ponto de tangência de uma das retas.

Considerando-se as tangentes AB, BC, CD e AD e o ponto de tangência E em AB, seja X um ponto qualquer de BC. O objetivo desta construção é encontrar XY tangente à cônica em P (Figura 12), construindo desta forma um pentágono AYXCD circunscrito à cônica.

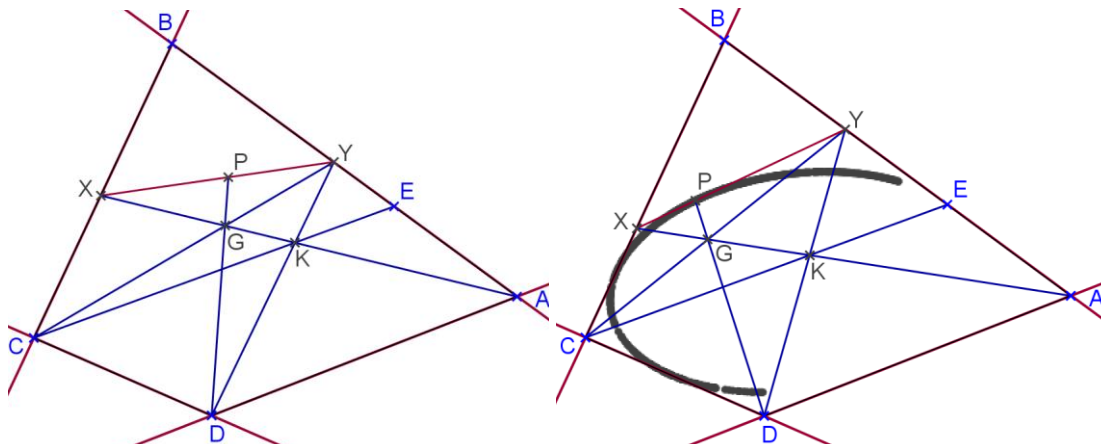


Figura 12: Obtenção de uma cônica dada por 4 tangentes e um ponto de tangência.

Segundo a Propriedade 1, a interseção de CE com AX será o ponto de Brianchon K. A interseção de DK com AB será o vértice Y do pentágono procurado. Considerando a interseção das diagonais CY e AX, tem-se o ponto de Brianchon G, e segundo a Propriedade 1, a interseção de DG com XY determina o ponto de tangência da cônica em XY.

Utilizando-se esta construção com diferentes posições do ponto X sobre BC, ou sobre os lados AD e CD permite-se a obtenção de diversos pontos da cônica, como mostra a Figura 12, onde a ferramenta do software Geogebra denominada *Rastro* foi aplicada ao ponto P. Nos possíveis deslocamentos do ponto X podem ser notados os casos especiais da Propriedade 2 quando o ponto X coincidir com os pontos E e Y, ou então quando o ponto Y coincidir com X e com o ponto de tangência do lado BC.

Para construir a cônica no software Geogebra é necessária a obtenção de mais 4 pontos da mesma. Neste caso uma nova ferramenta do software (ou macro) pode ser criada utilizando-se os objetos iniciais A, B, C, D, E e X, cujo objeto final é P.

Teorema: O lugar geométrico dos vértices comuns de dois triângulos com bases fixas e com determinada soma das áreas fixa é uma reta (DÖRIE, 1965).

Considere b_1 e b_2 as bases fixas dos triângulos com soma das áreas igual a k , e P o vértice comum destes triângulos. Considerando-se as alturas destes triângulos como h_1 e h_2 , tem-se que as áreas destes triângulos medem $\frac{1}{2}b_1h_1$ e $\frac{1}{2}b_2h_2$. Como a soma destas áreas é fixa, tem-se que $\frac{1}{2}b_1h_1 + \frac{1}{2}b_2h_2 = k$, ou seja, $b_1h_1 + b_2h_2 = 2k$, que é a equação da reta que passa pelo vértice P .

Teorema de Newton: A reta que passa pelos pontos médios das diagonais de um quadrilátero circunscrito em uma circunferência contém o centro da mesma

Em um quadrilátero circunscritível $ABCD$ (Figura 13) tem-se que as somas dos lados opostos são iguais, ou seja $AB + CD = BC + AD$.

Considerando a área do quadrilátero $ABCD$ igual a $2k$, tem-se que a área do triângulo M_1AD é dada por $A_{M_1AD} = \frac{1}{2}A_{CAD}$, pois M_1 é ponto médio de AC . Pelo mesmo argumento, tem-se que $A_{M_1BC} = \frac{1}{2}A_{ABC}$. Como $A_{CAD} + A_{ABC} = A_{ABCD}$, tem-se que $A_{M_1AD} + A_{M_1BC} = k$. Pelo teorema anterior, o ponto M_1 pertence à reta que passa pelos vértices P dos triângulos PAD e PBC que têm área igual a k . Analogamente mostra-se que M_2 pertence à mesma reta. Como $A_{OAD} + A_{OBC} = k$, o centro da circunferência também pertence à reta M_1M_2 (DÖRIE, 1965).

Na Figura 13 encontram-se os casos da circunferência e da elipse inscritas em quadriláteros. A demonstração do Teorema de Newton para elipses pode ser encontrada em Dörrie (1965) e utiliza a propriedade de que a elipse é a projeção ortogonal de uma circunferência contida em um plano oblíquo em relação ao plano de projeção. A projeção do centro da circunferência coincide com o centro da elipse, e a projeção da reta de Newton passa pelos pontos médios das diagonais do quadrilátero projetado circunscrito à elipse. Logo, a reta projetada passa pelo centro da elipse.

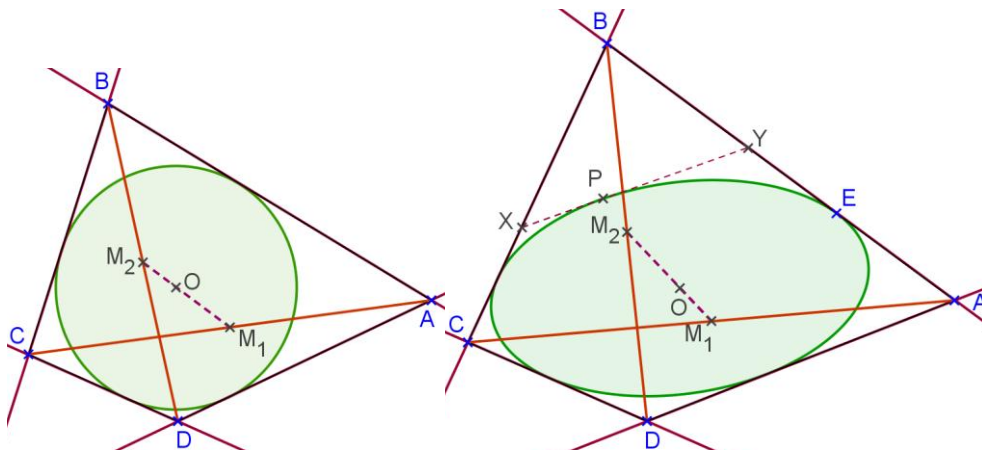


Figura 13: Reta de Newton M_1M_2 para um quadrilátero circunscrito em circunferências e elipses.

A Figura 14 mostra o caso em que o ponto E é deslocado no prolongamento do lado AB, transformando a elipse em uma hipérbole. A reta XY também muda de posição, e o centro da cônica encontra-se no prolongamento de M_1M_2 . Nos casos em que o ponto E coincide com A ou B tem-se a cônica degenerada, pois torna-se impossível a construção de uma cônica tangente simultaneamente às duas retas AB e AD, cujo ponto de tangência é a própria interseção destas retas $E \equiv A$.

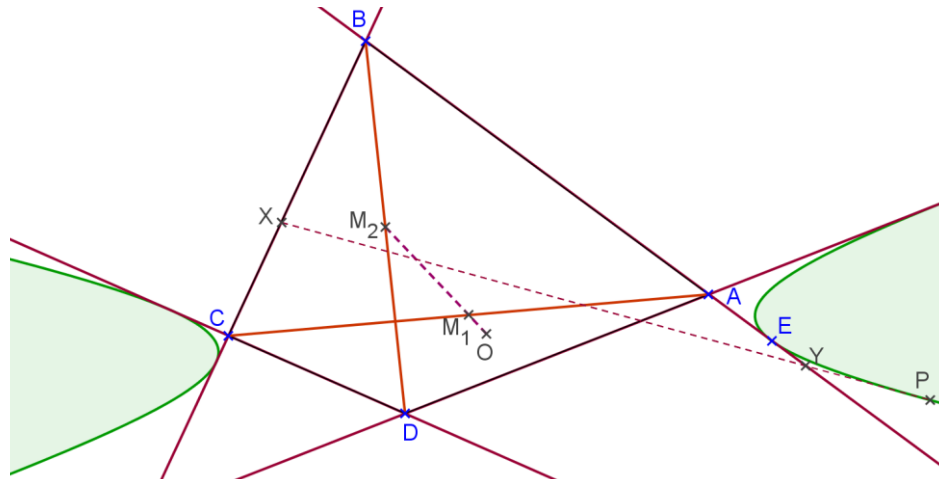


Figura 14: Reta de Newton M_1M_2 para um quadrilátero circunscrito em uma hipérbole.

Na Figura 15 o ponto E é deslocado até que o centro da cônica torna-se impróprio, obtendo-se assim a parábola. Neste caso a reta M_1M_2 torna-se paralela ao eixo principal da cônica.

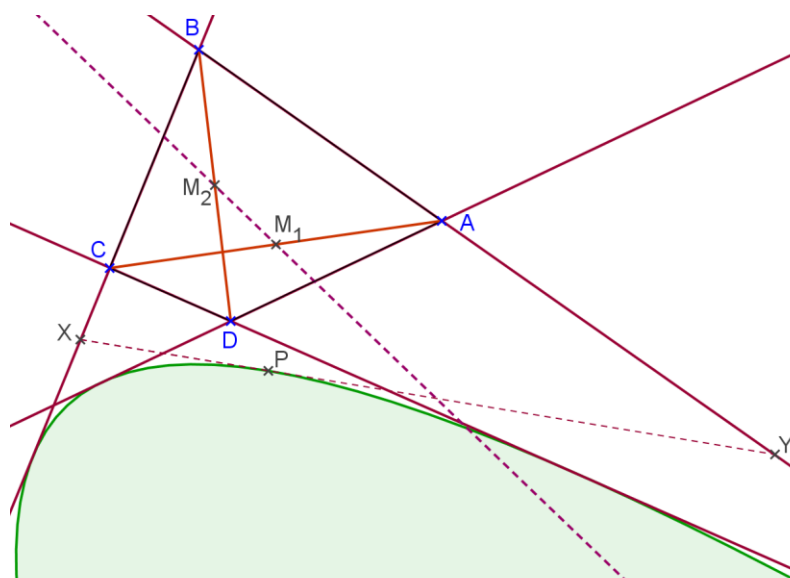


Figura 15: Reta de Newton para um quadrilátero circunscrito em uma parábola.

5 Conclusão

Neste trabalho foram apresentados conceitos e construções para visualizar a reta de Newton, com o objetivo de aplicar estes conteúdos em disciplinas de Desenho Geométrico ou Geometria Euclidiana com software de Geometria Dinâmica. Com a

transformação de uma cônica em circunferência através da Homologia Plana, as propriedades do Teorema de Brianchon válidas em circunferências podem ser utilizadas nas cônicas, e permitem a construção de uma cônica a partir do quadrilátero circunscrito. Além disso, ao movimentar um dos pontos de tangência sobre a respectiva tangente, o aluno pode visualizar as várias cônicas que podem ser construídas circunscritas ao mesmo quadrilátero, revelando a grande utilidade de softwares de Geometria Dinâmica nestes estudos.

Referências

AKOPYAN, Arseny; ZASLAVSKY, Alexey. **Geometry of Conics**. Mathematical World, Vol. 26. Providence: American Mathematical Society, 2007.

COSTA, Antonio Mochon. **Métodos Geométricos – Homologia**. Curitiba: UFPR, 1990.

COXETER, Harold Scott Macdonald; GREITZER, Samuel. **Geometry revisited**. New York: Mathematical Association of America, 1967.

DÖRIE, Heinrich. **100 Great Problems of Elementary Mathematics: their history and solution**. New York: Dover publications, 1965.

EHRMANN, Jean-Pierre. **Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral**. Forum Geometricorum, vol. 4, p. 35-52, 2004.

EVES, Howard Whitley. **A survey of geometry**. Boston: Allyn and Bacon, 1972.

_____. **College geometry**. Boston: Jones and Barlett Publishers, 1995.

HOHENWARTER, Markus; PREINER, Judith. **Dynamic Mathematics with GeoGebra**. Journal of Online Mathematics and its Applications, vol.7, 2007.

PUIG ADAM, Pedro. Curso de Geometria Metrica. Madrid: Euler, 1986.

SIQUEIRA, Paulo Henrique; COSTA, Deise Maria Bertholdi; SOUZA, Luzia Vidal. **Visualização dos conceitos de Homologia Plana com a utilização de Geometria Dinâmica**. In: GRAPHICA 2009, XIX Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico. Bauru: Unesp, 2009.

SMOGORZHEVSKII. Aleksandr Stepanovich. **The ruler in geometrical constructions**. New York: Blaisdell, 1961.

STANKOVA, Zvezdelina. **Geometric Puzzles and Constructions – Six classical geometry theorems**. In: **Mathematical Adventures for Students and Amateurs**, HAYES, David; SHUBIN, Tatiana (Eds). Mathematical Association of America, 2004.

VAN KEMPEN, Huub. **On Some Theorems of Poncelet and Carnot**. Forum Geometricorum, Vol. 6, p. 229-234, 2006.

VOLENEC, Vladimir. **Pascal-Brianchon Sets in Pappian Projective Planes**. KoG, vol. 7, 2003.