



## TRANSFORMAÇÕES HOMOLÓGICAS DA CIRCUNFERÊNCIA

Paulo Henrique Siqueira

UFPR, Departamento de Expressão Gráfica  
paulohs@ufpr.br

Luzia Vidal de Souza

UFPR, Departamento de Expressão Gráfica  
luzia@ufpr.br

Deise Maria Bertholdi Costa

UFPR, Departamento de Expressão Gráfica  
deise@ufpr.br

### Resumo

O objetivo deste trabalho é mostrar as propriedades da Homologia Plana aplicadas ao estudo das Cônicas, utilizando-se construções geométricas para visualizar as transformações homológicas da circunferência, tanto em perspectiva quanto em verdadeira grandeza em uma mesma tela, com o software Geogebra. A aplicação destes conceitos é mostrada na resolução de dois problemas sobre cônicas que envolvem pontos e retas tangentes.

**Palavras-chave:** Construções Geométricas, Homologia, Cônicas.

### Abstract

The objective of this paper is to show the properties of Homology applied to study of Conics, using geometrical constructions to visualize the homological transformations of circumference, in perspective and real size on the same screen, with the GeoGebra software. The application of these concepts is showed in solution of two problems about conics involving points and tangents lines.

**Keywords:** Geometrical Constructions, Homology, Conics.

## 1 Introdução

O objetivo deste trabalho é mostrar as cônicas como transformações homológicas das circunferências, e resolver problemas das cônicas nas circunferências transformadas utilizando o software livre de Geometria Dinâmica Geogebra. Quando um problema

sobre cônicas não tem dados relativos aos elementos principais, tais como centro, focos, vértices, eixos ou diâmetros, a resolução torna-se um pouco mais complexa. Neste trabalho são mostrados dois exemplos de problemas que envolvem pontos e retas tangentes de uma cônica, resolvendo-os com auxílio da Homologia Plana.

Os softwares de CAD geralmente constroem elipses, e nos casos de problemas que necessitam do traçado de hipérbolas ou parábolas, deve-se criar um algoritmo para obter diversos pontos para determinar a curva através de aproximações com segmentos ou outras curvas. O trabalho de Bellemain e Botler (2009) mostra como aproximar as curvas cônicas através de curvas Bezier, facilitando a importação da curva em outros softwares, permitindo tratamento vetorial das cônicas construídas desta maneira. Os trabalhos de Di Paola e Pizzurro (2009 e 2010) mostram as aplicações dos conceitos de Geometria Descritiva, Homologia, Pólo e Polar para construir as cônicas com softwares de CAD utilizando macros. Estas ferramentas são capazes de criar o traçado de qualquer cônica, a partir de 5 pontos dados da curva. Os softwares de Geometria Dinâmica já possuem ferramentas para determinar uma cônica em duas condições: dados os focos e o diâmetro principal de elipses ou hipérbolas (o foco e a diretriz em casos de parábolas) ou então dados 5 pontos da cônica (HOHENWARTER e PREINER, 2007; BELLEMAIN, 1992).

Outras referências interessantes sobre aplicações da Homologia Plana podem ser encontradas em Cerin (2004), Patek e Leão (2007), Costa (2001 e 2003).

## 2 Homologia plana

Considerando-se um sistema homológico geral, com centros de perspectiva  $C$  e  $C'$  (Figura 1), pode-se definir a correspondência biunívoca entre os pontos do plano de perspectiva  $\alpha''$  com os pontos dos planos coincidentes  $\alpha \equiv \alpha'$  (COSTA, 1990; SIQUEIRA, COSTA e SOUZA, 2009). Os planos correspondentes de  $\alpha$  e  $\alpha'$  em verdadeira grandeza são chamados de  $\alpha_1$  e  $\alpha'_1$ .

Dado um ponto  $A''$  de  $\alpha''$ , existem as projeções centrais de  $A''$  com centro de projeção  $C$ , que corresponde ao ponto  $A$  do plano  $\alpha$ , e com centro de projeção  $C'$ , que corresponde ao ponto  $A'$  de  $\alpha'$ . A interseção da reta  $CC'$  com  $\alpha \equiv \alpha'$  é o centro de Homologia  $U$ , e a interseção entre  $\alpha \equiv \alpha'$  e  $\alpha''$  o eixo da Homologia. As construções são feitas com as projeções dos planos coincidentes, omitindo-se  $\alpha''$ .

Considere uma circunferência de centro  $A_1$  pertencente ao plano  $\alpha_1$  (Figura 2). Para determinar as coordenadas de um ponto  $P$  da circunferência no plano  $\alpha$  em perspectiva, são feitas transformações geométricas simples (FOLEY, 1990; GOMES e VELHO, 1998), que envolvem paralelismo e escala. Desta forma, uma figura

construída em verdadeira grandeza no plano  $\alpha_1$  pode ser projetada em perspectiva no plano  $\alpha$ . Para determinar a coordenada  $x_P$  basta fazer a translação do segmento  $O_1x'_P$  na direção  $OO_1$  (paralelogramo  $OO_1x'_Px_P$ ). A coordenada  $y_P$  sofre uma redução, de acordo com a inclinação escolhida para o eixo  $y$  e desenhado em perspectiva (trapézio  $OO_1y'_Py_P$ ), ou seja, esta coordenada é obtida através do Teorema de Tales:

$$\frac{Oy_P}{OY} = \frac{O_1y'_P}{O_1Y_1}$$

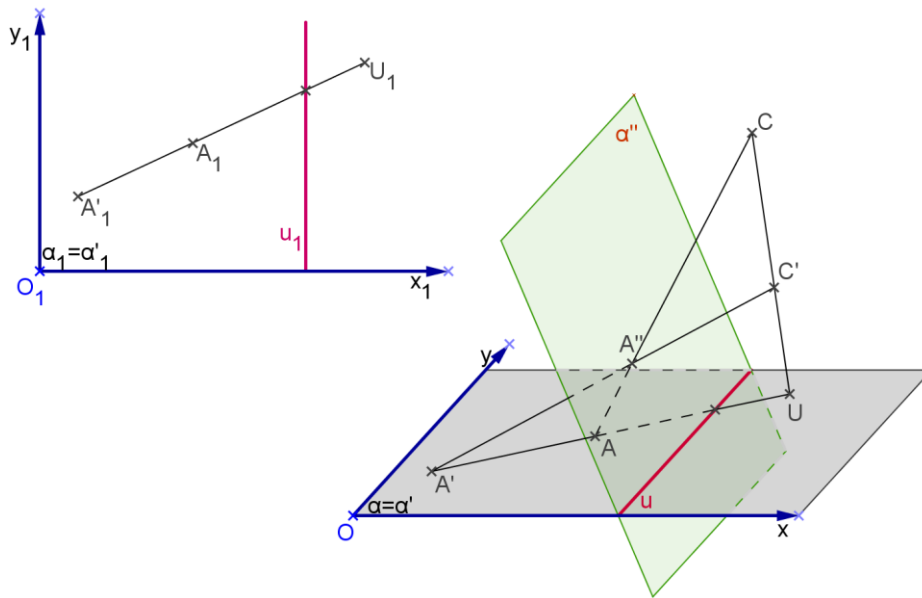


Figura 1: Homologia Plana com centros de perspectiva C e C', eixo u e centro U.

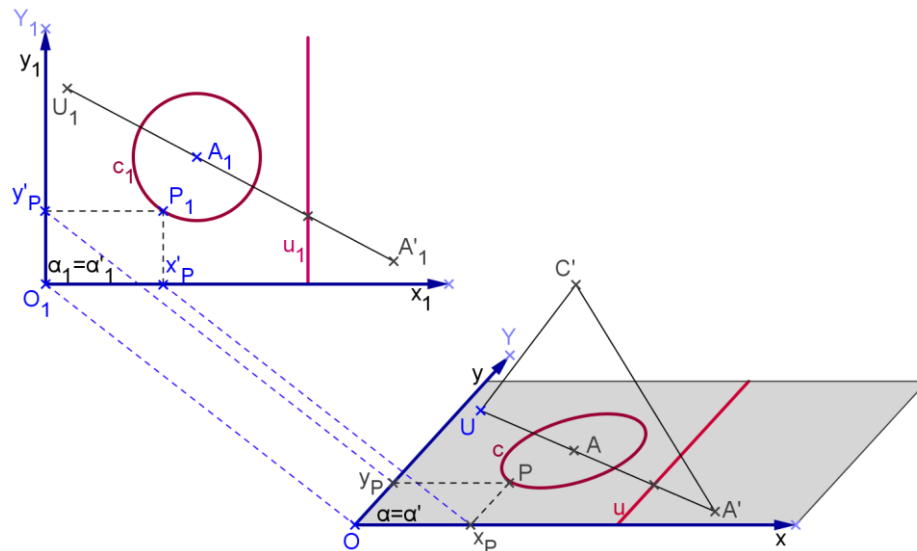


Figura 2: Correspondência de pontos de  $\alpha_1 \equiv \alpha'_1$  e  $\alpha \equiv \alpha'$ .

Criando-se uma ferramenta ou macro no programa de Geometria Dinâmica, podem ser determinados cinco pontos correspondentes da circunferência  $c_1$  em  $\alpha$ , e definir a elipse que passa por estes pontos, obtendo-se a circunferência  $c$ . Ao

movimentar o ponto  $P_1$ , o ponto correspondente  $P$  também se movimenta no desenho em perspectiva.

Qualquer ponto do eixo  $u$  pertence simultaneamente aos planos  $\alpha$ ,  $\alpha'$  e  $\alpha''$ . Logo, dado um ponto  $P$  (Figura 3), para encontrar o correspondente  $P'$  basta encontrar a interseção da reta  $AP$  com o eixo  $u$  ( $Q \equiv Q'$ ), e unir este ponto com  $A'$ . A interseção de  $UP$  com  $A'Q'$  é o ponto  $P'$  procurado (Figura 3). Esta construção pode ser feita tanto em  $\alpha_1$  quanto em  $\alpha$ , utilizando uma ferramenta ou macro para encontrar os pontos correspondentes dos planos.

Para encontrar o ponto  $A''$  do plano  $\alpha''$ , basta encontrar a interseção de  $C'A'$  com  $CA$ . No caso do centro de perspectiva  $C$  impróprio,  $A''$  é a interseção de  $C'A'$  com a reta  $AC_\infty$  paralela a  $UC'$  (Figura 3). Fazendo-se a mesma construção para o ponto  $P$ , e habilitando-se a ferramenta *Rastro* do Geogebra, a projeção da circunferência em  $\alpha''$  pode ser visualizada (Figura 4). Utilizando-se a ferramenta *Lugar Geométrico* do ponto  $P''$  com relação ao ponto  $P_1$  ou  $P$ , a projeção da circunferência  $c''$  é determinada (Figura 5).

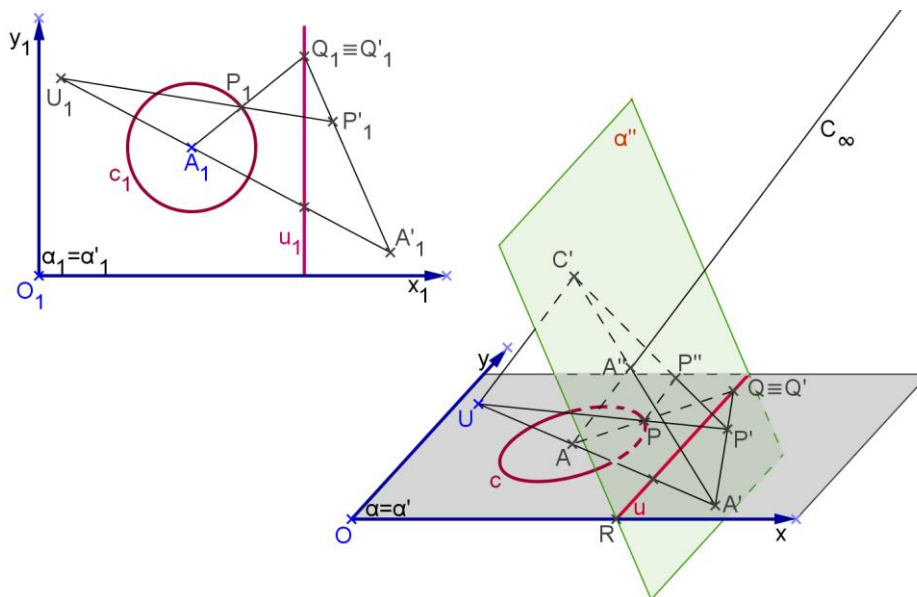


Figura 3: Correspondência de pontos de  $\alpha = \alpha'$  e  $\alpha''$ .

Considerando-se a direção  $AC_\infty$  perpendicular ao plano bissetor de  $\alpha$  e  $\alpha''$ , as curvas  $c$  e  $c''$  são congruentes, pois são as seções dos planos  $\alpha$  e  $\alpha''$  em um cilindro com geratrizes paralelas a  $AC_\infty$ . Para determinar a direção para a construção deste cilindro, basta construir  $UC'$  ortogonal a uma bissetriz do ângulo diedro de  $\alpha$  e  $\alpha''$ . Na Figura 5,  $UC'$  é ortogonal a  $RS$ .

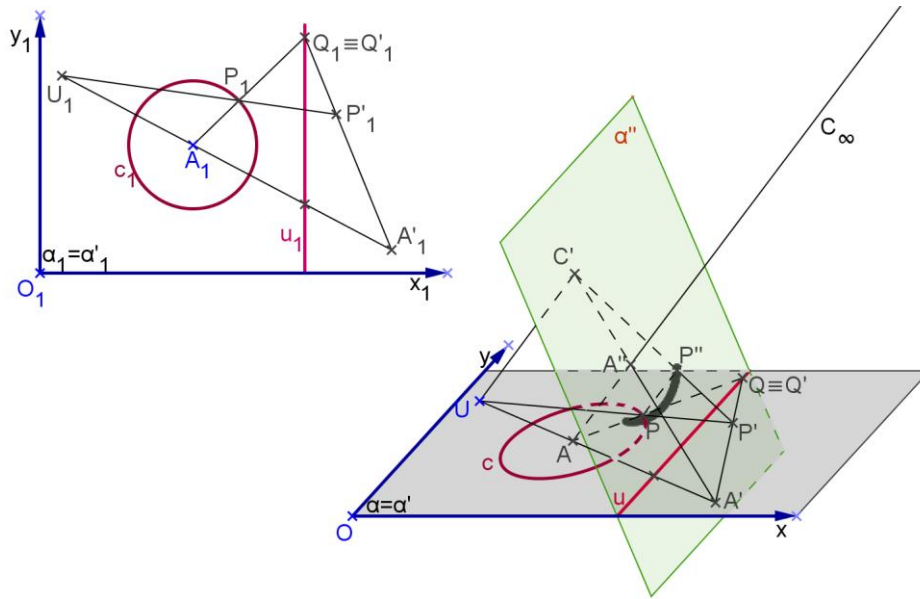


Figura 4: Pontos correspondentes da circunferência  $c$  em  $\alpha''$ ,  $\alpha \equiv \alpha'$  e  $\alpha_1 \equiv \alpha'_1$ .

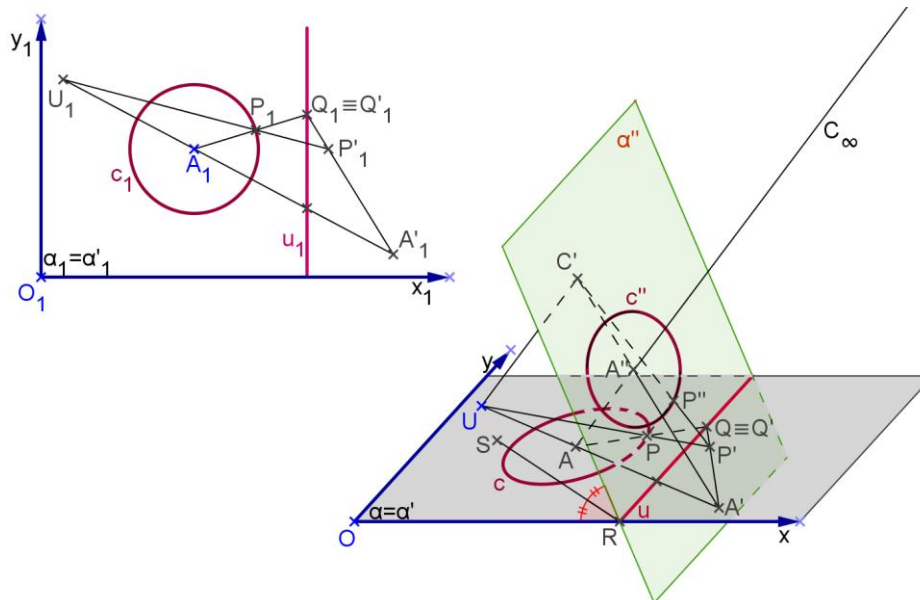


Figura 5: Utilização da ferramenta *Lugar Geométrico* para determinar  $c''$ .

A interseção entre  $\alpha''$  e um plano paralelo a  $\alpha \equiv \alpha'$  que passa pelo centro de projeção  $C'$  determina a reta limite  $j$  (Figura 6), que consiste nos pontos com projeções centrais impróprias com centro de projeção  $C'$ . Analogamente define-se a reta limite  $i$ , com projeções centrais impróprias com centro de projeção  $C$ . No caso em que um dos centros de projeção é impróprio, a reta limite também é imprópria.

Quando se considera um cilindro interceptando  $\alpha$  e  $\alpha''$  segundo circunferências (Figura 6), e o ponto  $C$  impróprio, o sistema homológico transforma circunferências em cônicas (COSTA, 1990; MARTÍ, 1996). Quando a circunferência é tangente à reta limite  $j$ , tem-se a parábola; quando são secantes, tem-se uma hipérbole; e quando são exteriores tem-se a elipse.

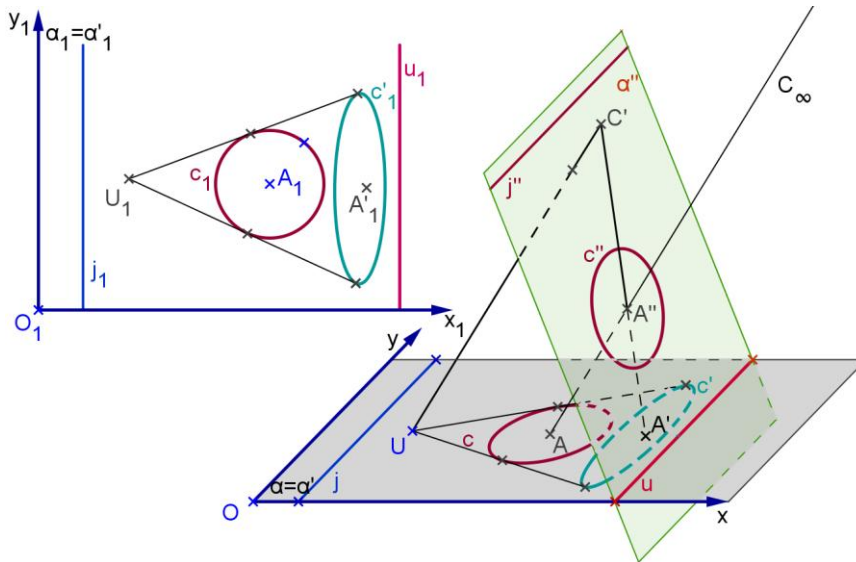


Figura 6: Elipse  $c'$  homóloga da circunferência  $c$ .

Modificando-se a posição do centro de homologia  $U_1$  e do centro da circunferência  $A_1$ , a reta  $UC'$  muda de posição também, e quando a circunferência tangenciar o eixo  $u_1$ , a cônica e a circunferência  $c''$  também tangenciam o eixo no mesmo ponto  $T_1$  (Figura 7).

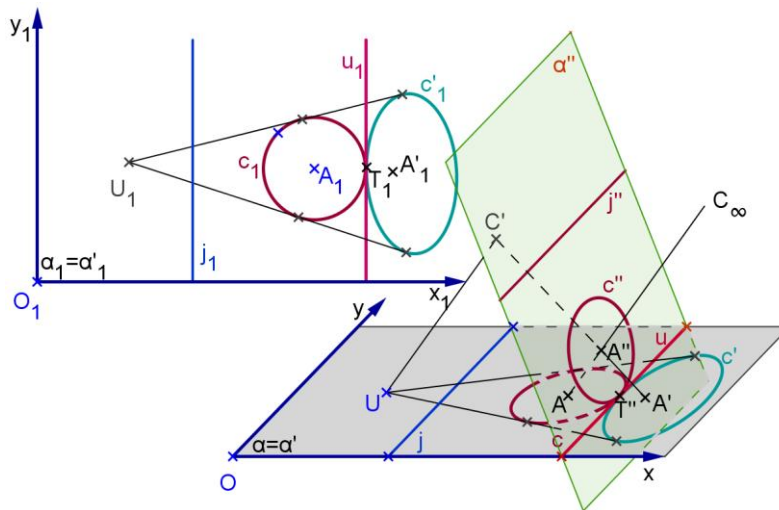


Figura 7: Circunferência  $c''$  tangenciando o eixo  $u$ .

Quando a circunferência  $c_1$  é secante ao eixo, os homólogos dos pontos de interseção do eixo com a circunferência são comuns à cônica (Figura 8).

Quando a circunferência  $c_1$  é tangente à reta limite  $j_1$ , o ponto de tangência possui homólogo impróprio com centro de projeção  $C'$ , pois  $C'T''$  é paralela ao plano  $\alpha \equiv \alpha'$ . Logo, a cônica será aberta, com um ramo só: a parábola (Figura 9).

Quando a circunferência  $c_1$  é secante à reta limite  $j_1$ , os pontos comuns da reta limite com  $c_1$  têm homólogos impróprios, determinando uma curva aberta com dois ramos: a hipérbole (Figura 10).

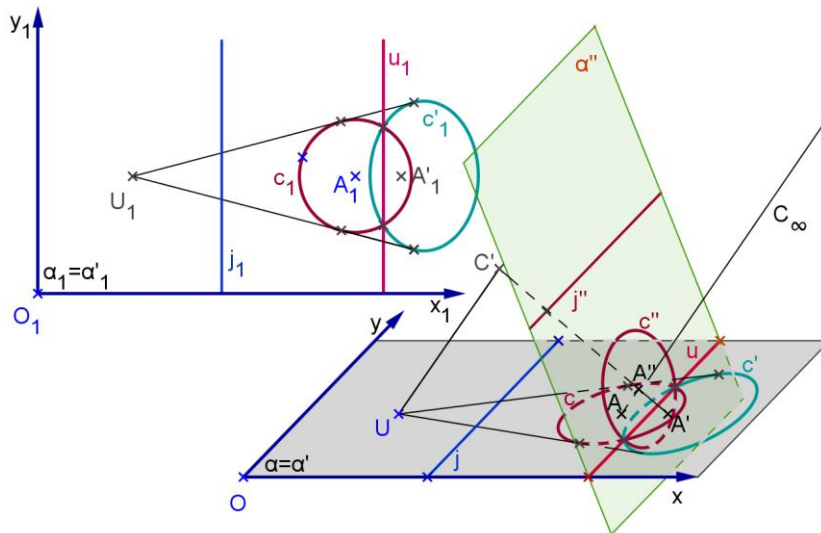


Figura 8: Circunferência  $c''$  e o eixo  $u$  secantes.

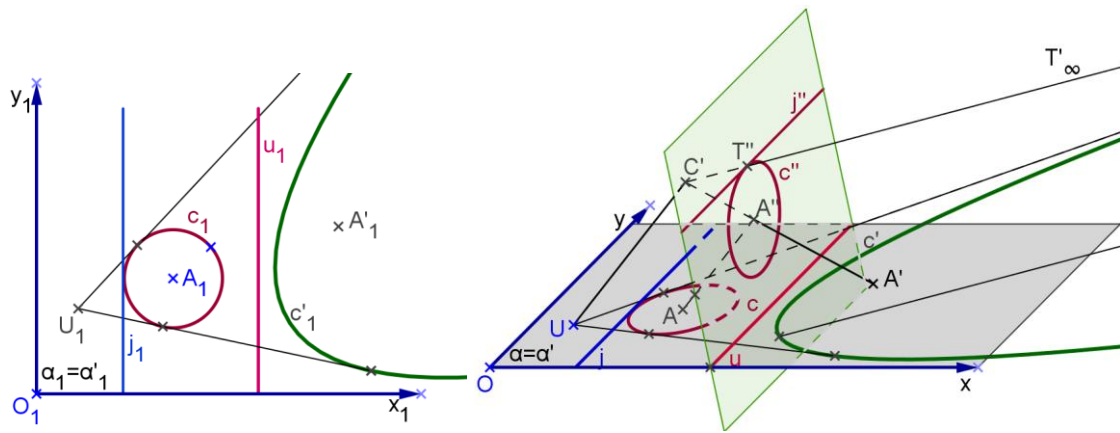


Figura 9: Parábola  $c'$  homóloga à circunferência  $c$ .

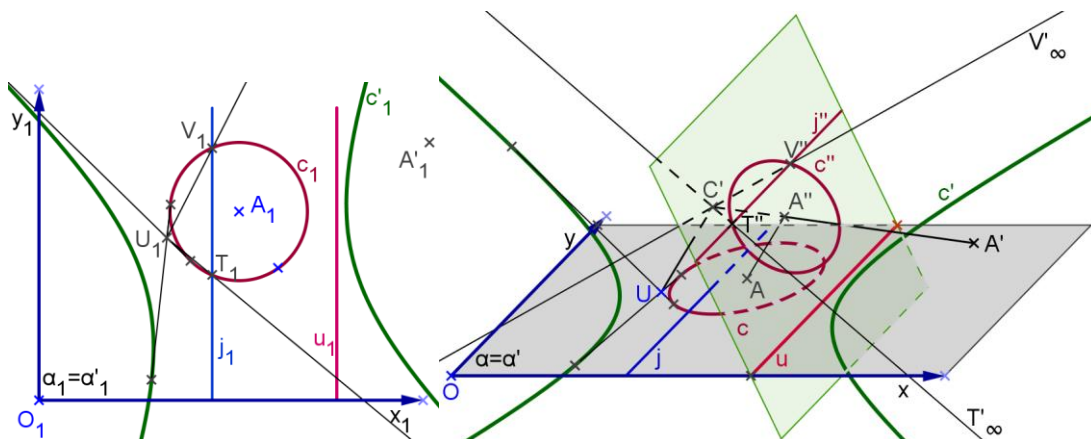


Figura 10: Hipérbole  $c'$  homóloga à circunferência  $c$ .

Os problemas a seguir envolvem retas tangentes e pontos das cônicas, e suas resoluções podem ser feitas utilizando as transformações homológicas das cônicas em circunferências.

**Problema 1:** Encontrar a interseção da reta  $r'$  com a cônica  $c'$  dada por 3 pontos  $P'$ ,  $Q'$  e  $R'$ , uma reta tangente  $t$  e o ponto de tangência  $T'$  (Figura 11).

Utilizando-se o caso particular em que a circunferência  $c$ , homóloga à cônica  $c'$ , tem o centro de Homologia em  $T'$ , a reta  $t$  será tangente comum a  $c$  e  $c'$ . Logo, o centro da circunferência homóloga a  $c'$  pertence a uma perpendicular à reta  $t$  no ponto  $T'$  (PUIG ADAM, 1986).

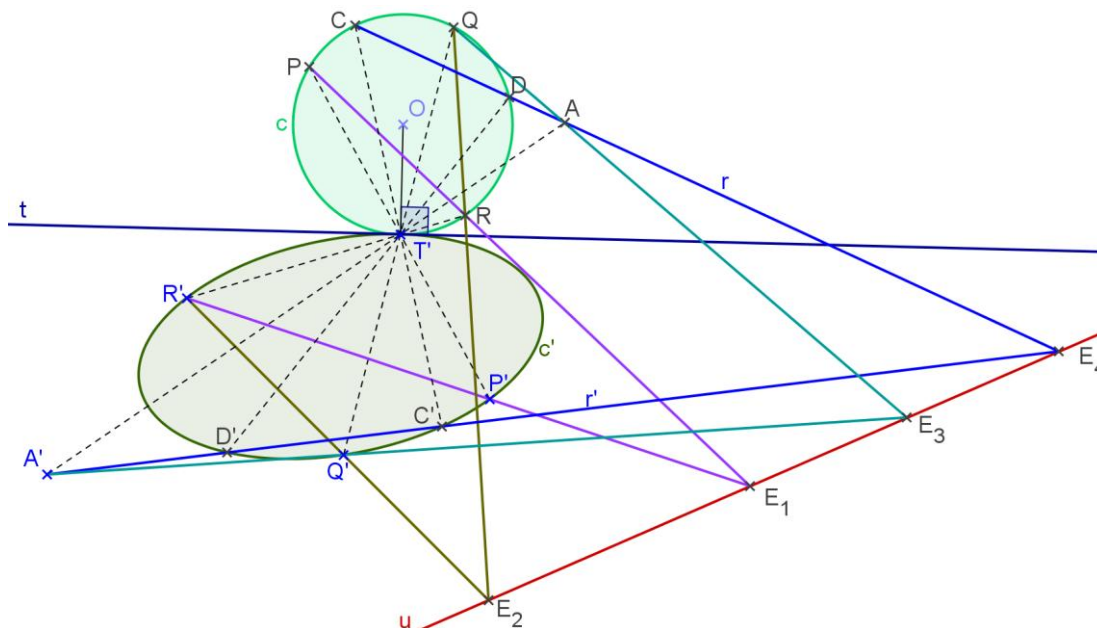


Figura 11: Cônica  $c'$  dada pelos pontos  $P'$ ,  $Q'$  e  $R'$ , tangente  $t$  e o ponto de tangência  $T'$ .

Ao unir  $P'$ ,  $Q'$  e  $R'$  com  $T'$  obtém-se os homólogos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  em  $c$ . Para determinar o eixo da Homologia, basta unir os pares de homólogos correspondentes, ou seja:  $PR$  intercepta  $P'R'$  em  $E_1$  e  $QR$  intercepta  $Q'R'$  em  $E_2$ , determinando o eixo  $u$  que passa por  $E_1$  e  $E_2$ .

Para determinar o homólogo de  $A'$ , basta encontrar o ponto  $E_3$  no eixo, que é a interseção de  $A'Q'$  com o eixo, e unir este ponto com o homólogo  $Q$ . A interseção de  $E_3Q$  com  $A'T'$  é o ponto homólogo  $A$ . Logo, a reta  $r$  passa pelos pontos  $A$  e  $E_4$ , pois  $E_4$  é coincidente com seu homólogo no eixo  $u$ .

A interseção da reta  $r$  com a circunferência  $c$  determina os pontos  $C$  e  $D$ . Os homólogos destes pontos pertencem à cônica. Para encontrá-los, basta uni-los ao centro de homologia, e encontrar a interseção destas retas com a reta  $r'$ .

Através dos pontos dados  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  e  $T'$  e um dos pontos obtidos  $C'$  ou  $D'$ . O traçado da cônica  $c'$  pode ser feito com a ferramenta do Geogebra para definir uma cônica dada por 5 pontos.

**Problema 2:** Encontrar pontos da cônica dada por um ponto  $S'$ , duas tangentes  $t'_1$  e  $t'_2$  e os pontos de tangência  $U'$  e  $T'$  (Figura 12).



Considerando-se  $U'$  como centro de Homologia, a circunferência  $c$ , homóloga da cônica  $c'$ , será tangente a  $t'_2$  em  $U'$ . Logo, os homólogos de  $S$  e  $T$  estão na circunferência  $c$ , onde  $S$  pertence a  $U'S'$  e  $T$  pertence a  $U'T'$ . Unindo-se os pares de homólogos  $ST$  e  $S'T'$ , determina-se  $E_1$  pertencente ao eixo  $u$ .

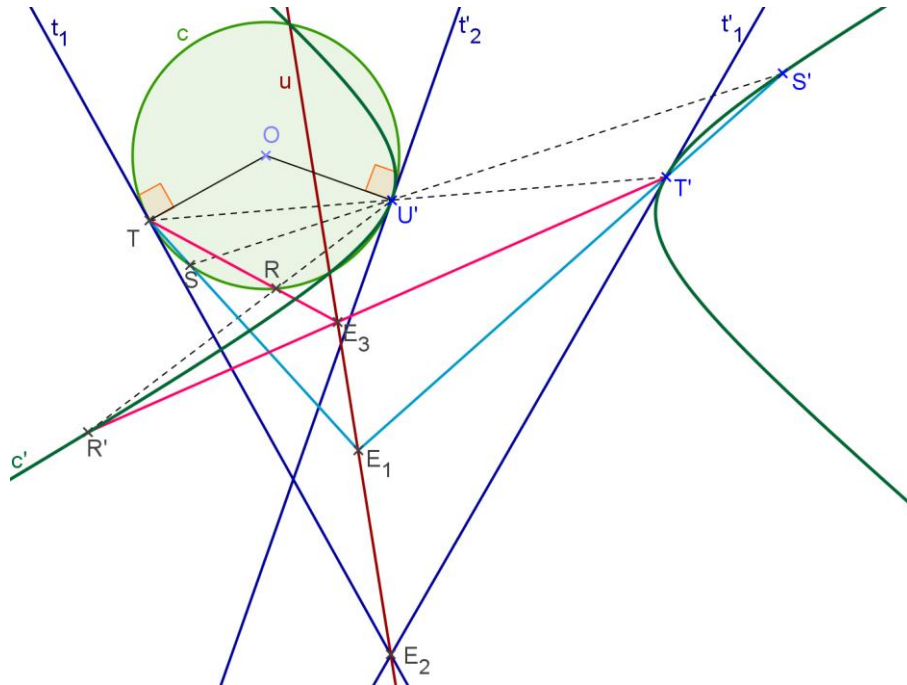


Figura 12: Cônica  $c'$  dada pelo ponto  $S'$ , as tangentes  $t'_1$  e  $t'_2$  e os pontos de tangência  $T'$  e  $U'$ .

A transformada de  $t'_1$  é tangente à circunferência  $c$ , pois se  $t'_1$  passa por somente um ponto de  $c'$ ,  $t_1$  também passará por um ponto de  $c$ . Logo, a interseção de  $t'_1$  com  $t_1$  define o ponto  $E_2$  do eixo  $u$ .

Para encontrar outros pontos da cônica, basta encontrar os homólogos dos pontos da circunferência, ou seja, dado um ponto  $R$  de  $c$ , unindo-se  $R$  ao ponto  $T$  (que já possui homólogo conhecido  $T'$ ), determina-se  $E_3$  no eixo  $u$ . A interseção de  $U'R$  com  $T'E_3$  é o ponto  $R'$ , homólogo de  $R$ . Escolhendo-se a ferramenta do Geogebra *Lugar Geométrico* do ponto  $R'$  relativo ao ponto  $R$ , a cônica  $c'$  é determinada.

Outros problemas que envolvem retas tangentes às cônicas podem ser resolvidos de forma similar. Por exemplo, o problema de encontrar uma reta tangente a uma cônica pode ser resolvido na circunferência homóloga, e a solução é facilmente transformada para a cônica. Além disso, teoremas que envolvem elementos de circunferências podem ser demonstrados nas cônicas de uma forma mais simples (EVES, 1972), como é o caso da Reta de Pascal, o Ponto de Brianchon e conceitos de pólo e polar.

### 3 Conclusão

Neste trabalho foram apresentadas as construções feitas no Geogebra para a visualização das cônicas através dos conceitos da Homologia Plana. As transformações dos elementos das cônicas permitem a resolução de problemas que envolvem pontos ou retas tangentes, além de facilitar demonstrações de propriedades das circunferências que são válidas para as cônicas.

A visualização das projeções em perspectiva, com a representação das figuras em verdadeira grandeza em uma mesma tela, facilita a compreensão dos alunos das propriedades da Homologia Plana. As diferentes posições de uma circunferência com relação a uma reta limite mostram as cônicas com a utilização de uma só construção. As construções apresentadas neste trabalho podem ser usadas no estudo de cônicas em disciplinas de Desenho Geométrico, Geometria Euclidiana, Perspectiva ou Geometria Descritiva.

### Referências

BELLEMAIN, Franck. **Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie : Cabri-géomètre**. Tese de Doutorado: l'Université Joseph Fourier. Grenoble, 1992.

BELLEMAIN, Franck; BOTLER, Fábio Happ. **Aproximação de curvas cônicas com curvas de Bezier**. Anais do 19º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico: Graphica'2009. Bauru: Unesp, 2009.

CERIN, Zvonko. **Homology and orthology with chordal triangles**. Radovi Matematički, vol. 12, 2004.

COSTA, Alcy Paes de Andrade Vieira. **Harmonia nas fachadas das igrejas**. In: Anais do 15º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico: Graphica'2001. São Paulo: USP, 2001.

\_\_\_\_\_. **Harmonia na fachada dos templos do grande Recife**. In: Anais do 16º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico: Graphica'2003. Santa Cruz do Sul, 2003.

COSTA, Antonio Mochon. **Métodos Geométricos – Homologia**. Curitiba: UFPR, 1990.

DI PAOLA, Francesco; PIZZURRO, Maria Rita. **From the Descriptive Geometry to the Informatics Language**. In: ICGG - The 14th International Conference on Geometry and Graphics. Kyoto, 2010.

\_\_\_\_\_. **Informatics in Descriptive Geometry (Didactical Experience)**. Slovak Journal for Geometry and Graphics, vol. 6, no. 12, 2009.

EVES, Howard Whitley. **A survey of geometry**. Boston: Allyn and Bacon, 1972.

FOLEY, James D. **Computer graphics: principles and practice**. 2. ed. Boston: Addison Wesley, 1995.

GOMES, Jonas; VELHO, Luiz. **Computação gráfica, volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.

HOHENWARTER, Markus; PREINER, Judith. **Dynamic Mathematics with GeoGebra**. Journal of Online Mathematics and its Applications, vol.7, 2007.

MARTÍ, José María Gomis. **Curvas y superficies en diseño de ingeniería**. Universidad Politecnica de Valencia, 1996.

PATEK, Maria Madalena dos Santos; LEÃO, Rafael Manjares. **Estudo da Geometria Gráfica por Computador**. In: Anais do 18º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico: Graphica'2007. Curitiba: UFPR, 2007.

PUIG ADAM, Pedro. **Curso de Geometria Metrica**. Madrid: Euler, 1986.

SIQUEIRA, Paulo Henrique; COSTA, Deise Maria Bertholdi; SOUZA, Luzia Vidal. **Visualização dos conceitos de Homologia Plana com a utilização de Geometria Dinâmica**. In: Anais do 19º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico: Graphica'2009. Bauru: Unesp, 2009.