Graphica Rio 2011

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE APOLÔNIO UTILIZANDO GEOMETRIA INVERSIVA

Ana Cristina Corrêa Munaretto
UTFPR, Departamento Acadêmico de Matemática
anamunaretto@utfpr.edu.br

Paulo Henrique Siqueira
UFPR, Departamento de Expressão Gráfica
paulohs@ufpr.br

Resumo

Este trabalho apresenta algumas propriedades da Geometria Inversiva para, através dela, resolver o famoso Problema de Apolônio - que consiste em encontrar circunferências tangentes a três circunferências dadas. Para isto, demonstramos a existência de pontos mágicos entre duas circunferências e, através deles, mostramos que existe uma inversão que transforma duas circunferências disjuntas e não concêntricas em duas circunferências concêntricas. Com esta transformação, o Problema de Apolônio se reduz em encontrar circunferências tangentes a outras três, sendo que, duas delas são concêntricas e a terceira pertence ao anel compreendido entre elas, facilitando consideravelmente sua solução.

Palavras-chave: Problema de Apolônio, Inversão, Pontos Mágicos.

Abstract

This paper presents some properties of Inversive Geometry, through it, solve the famous problem of Apollonius - which is to find circles tangent to three given circles. For this, we demonstrate the existence of magic points between two circles, and through them, we show that there is a inversion that transforms two disjoint and not concentric circles in two concentric circles. Through this transformation, the problem of Apollonius reduces to finding circles tangent to three others, while two of them are concentric and the third belong to ring between them, facilitating the solution considerably.

Keywords: Problem of Apollonius, Inversion, Magic Points.

1 Introdução

Um grande desenvolvimento da geometria aconteceu na chamada Idade Áurea da matemática grega, ou período helenístico, ou ainda período Alexandrino e se estendeu de aproximadamente 324 a.C a 600 d.C. Foi neste período que Apolônio propôs um problema, que veio a receber seu nome, consistindo em: Encontrar uma circunferência tangente a três outras circunferências, podendo estas ser degeneradas em retas (circunferência de raio infinito) ou pontos (circunferência de raio zero). Este problema despertou o interesse de vários matemáticos ao longo dos séculos, cada qual buscando soluções segundo as mais diversas abordagens que refletiam o instrumental matemático disponível em cada época. Mas, embora muitas soluções tenham sido produzidas na era 'moderna', ainda não atendiam ao almejado novo paradigma: Encontrar um método direto, aplicável a todos os casos, e se possível, que permitisse determinar o número de soluções admissíveis para o problema.

Foi em 1824 que Jacob Steiner (1796 – 1863), o maior geômetra desde os tempos de Euclides (300 a 260 a.C.), descobriu a útil transformação chamada Geometria Inversiva. Steiner não publicou suas idéias sobre inversão, e a transformação foi redescoberta várias vezes por outros matemáticos do século, inclusive Lord Kelvin (ou William Thompson, 1824-1907) que em 1845 chegou a ela pela física e que a aplicou a problemas de eletrostática. Resultados da geometria das inversões permitem sistematizar a análise das possíveis configurações dos três objetos dados no problema de Apolônio, classificando-as e determinando o número efetivo de soluções nos diferentes casos. O trabalho de Searby (2009) mostra as conexões dos teoremas de Monge, D'Alembert, Pascal, Brianchon, Desargues e Gergonne para a resolução do problema de Apolônio.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma solução, por meio da inversão, para o décimo caso do problema de Apolônio, onde as circunferências têm raio finito e diferente de zero. A Geometria Inversiva exerce papel fundamental na simplificação de problemas, e, resolvendo-se o problema com os dados transformados em elementos mais simples, basta 'desinverter' a solução encontrada com estes dados simplificados. Além disso, a Geometria Inversiva é usada na construção de modelos da Geometria Hiperbólica, conforme mostra o trabalho de Cabariti (2004).

A fim de explorar as propriedades da inversão e auxiliar nas construções, sugerimos o uso de softwares de Geometria Dinâmica. Estes ambientes possuem um caráter interativo e exploratório que permitem revelar aspectos novos e até mesmo inesperados através da manipulação das figuras geométricas construídas.

2 Definição de Inversão

Seja P um ponto e C uma circunferência. Definimos o inverso do ponto P em relação à C como o outro ponto da interseção de quaisquer duas circunferências distintas ortogonais à C que passam por P. Denotaremos o inverso de P por P' (Figura 1).

Observe que se *P* é externo à *C*, então, *P′* é interno à *C* e vice-versa. No entanto, quando *P* pertence à *C*, então, duas circunferências ortogonais à *C* possuem somente o ponto *P* como interseção, ou seja, *P′*=*P* (Figura 2). Outro ponto importante a ser considerado é o centro da circunferência *C*. Neste caso, as circunferências ortogonais à *C* na verdade são retas (circunferências de raio infinito) e, duas retas distintas passando *P* encontrar-se-ão no infinito. Assim, consideraremos que o infinito é o inverso do centro da circunferência *C* e o inverso do centro da circunferência *C* será o infinito que denotaremos por Ω.

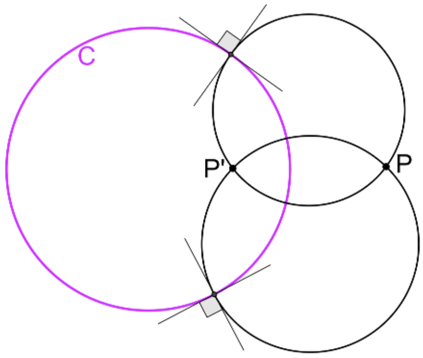


Figura 1: Inversão por Circunferências Ortogonais.

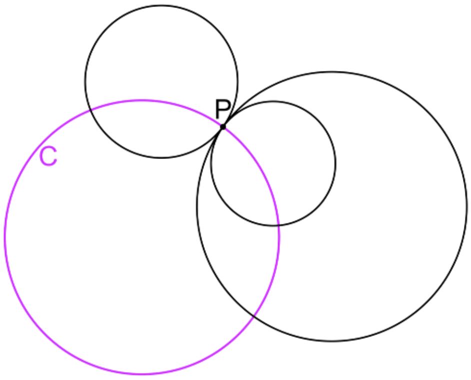


Figura 2: *P* e *P′* coincidentes.

A Inversão acima definida é uma transformação bijetiva e prova-se que no Espaço Euclidiano com sua métrica usual, se *C* é a circunferência de inversão com centro *O*, então, os pontos *P* e *P′* são conjugados harmônicos em relação ao diâmetro *AB* da circunferência *C* (MUNARETTO, 2010), onde *AB* é determinado pela interseção da reta *OP* com *C* (Figura 3).

Assim, se *r* é o raio da circunferência, então, $OP{\cdot}OP'= r^2$. Em algumas referências esta afirmação é usada para definir o inverso do ponto *P*, tais como Coxeter e Greitzer (1967), Mafalda (2007), Oliveira (2007) e Puig Adam (1986).

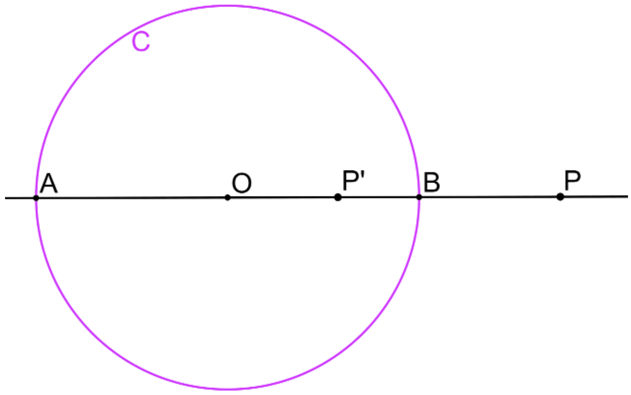


Figura 3: Inversos e Conjugados Harmônicos.

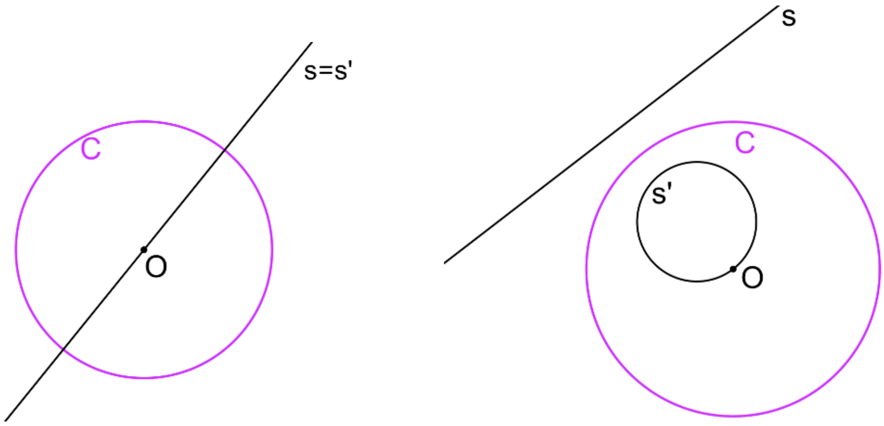
3 Invertendo Retas e Circunferências

Ao invertermos retas ou circunferências podemos obter retas ou circunferências. No entanto, uma reta pode transformar-se em uma circunferência e uma circunferência pode tornar-se uma reta. Isto depende da posição destes objetos em relação ao centro da circunferência de inversão. Listaremos abaixo as possibilidades e demonstraremos uma delas. As demais demonstrações podem ser encontradas em Munaretto (2010).

- Inversão de retas

Seja *C* uma circunferência de centro *O*. A inversão em relação à *C* de uma reta *s* que passa por *O* é a própria reta *s* (Figura 4a).

A inversão em relação à *C* de uma reta *s* que não passa por *O* é uma circunferência que passa por *O* (Figura 4b).



(a) (b)

Figura 4: Inversão de reta: (a) que passa pelo centro; (b) que não passa pelo centro.

- Inversão de circunferências

A inversão em relação à *C* de uma circunferência *D* que não passa por *O* é uma circunferência que não passa por *O* (Figura 5).

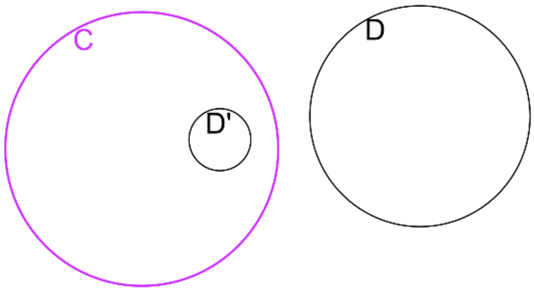


Figura 5: Inversão de circunferência que não passa pelo centro.

A inversão em relação à *C* de uma circunferência *D* que passa por *O* é uma reta que não passa por *O*.

Demonstração:

Seja *C* uma circunferência de inversão de centro *O* e raio *r* e *D* uma circunferência de centro O_1 que passa por *O* (Figura 6). Seja $A \neq O$ o ponto onde a reta $t_1 = OO_1$ intercepta *D*. Se A' é o inverso de *A* em relação à *C*, então, A' pertence à t_1. Seja t_2 a reta que passa por A' e é perpendicular à t_1. Provaremos que $t_2 = D'$, ou seja, a inversão da circunferência *D* em relação à *C* é a reta t_2.

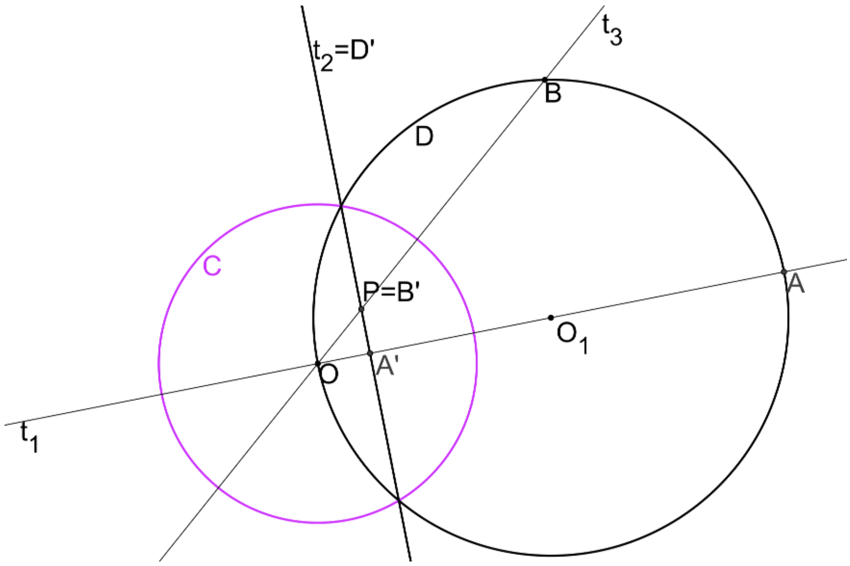


Figura 6: Inversão de circunferência que passa pelo centro de inversão.

Sejam *B* um ponto da circunferência *D*, com $B \neq A$ e $B \neq O$, e $t_3 = OB$. Agora, seja *P* o ponto onde t_2 intercepta a reta t_3. Queremos mostrar que $P = B'$.

Temos que os triângulos ΔABO e $\Delta PA'O$ são semelhantes, pois os ângulos $A'\hat{O}P = B\hat{O}A$ são comuns e os ângulos $A\hat{B}O$ e $P\hat{A}'O$ são retos. Assim,

$$\frac{OB}{OA'} = \frac{OA}{OP}$$

Logo, $OB \cdot OP = OA \cdot OA' = r^2$, donde, *P* é o inverso de *B*, ou seja, $P = B'$.

Portanto, os inversos dos pontos B $\neq$ O da circunferência *D* pertencem à reta t_2 e, como Ω (inverso de O') pertence à t_2, então $D' \subseteq t_2$. É fácil ver que, pela demonstração feita acima, qualquer ponto *P* de t_2 é o inverso do ponto de interseção da reta *OP* com a circunferência *D*. Logo, $t_2 = D'$ e, como $\Omega \notin D$, então, seu inverso *O* não pertence à D', donde, D' é uma reta que não passa por *O* (Figura 6).

A Transformação Inversão é uma aplicação conforme, ou seja, preserva ângulos. Em particular, preserva a tangência entre objetos. Assim, muitos problemas envolvendo tangências entre retas e circunferências podem ser simplificados através desta transformação. Exemplos podem ser vistos em Munaretto (2010). A fim de resolver o Problema de Apolônio que consiste em encontrar as circunferências tangentes a outras três circunferências, usaremos uma inversão que transforma duas circunferências disjuntas e exteriores em duas circunferências concêntricas. Para isto, precisaremos encontrar os pontos mágicos destas circunferências.

4 Pontos mágicos

Proposição 1: Sejam *C* e *D* circunferências disjuntas e não concêntricas. Então, existe um único par de pontos *P* e *Q* que são inversos em relação à *C* e inversos em relação à *D* simultaneamente.

Demonstração:

<u>Existência</u>

Sejam *C* e *D* circunferências disjuntas e não concêntricas. Chamemos de *s* a reta dos centros e *AB* e *EF* os diâmetros determinados por *s* em *C* e *D*, respectivamente (Figura 7).

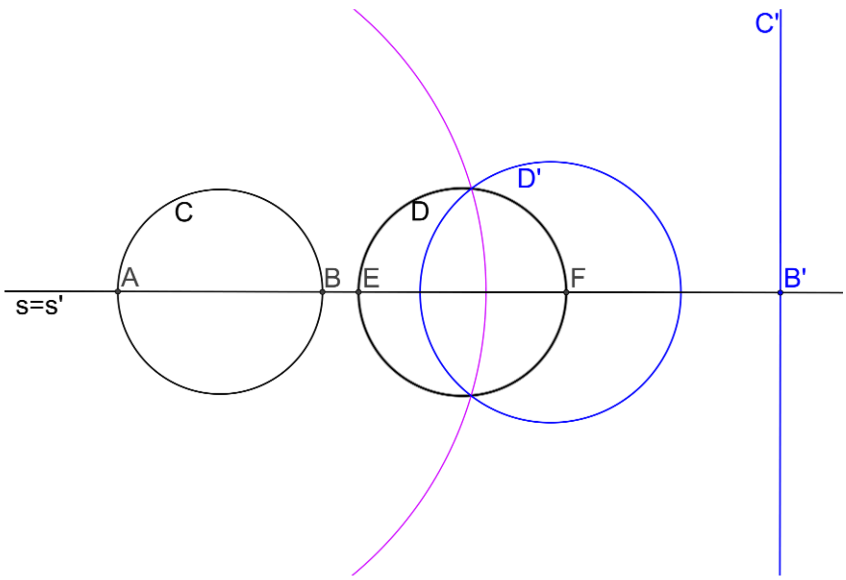


Figura 7: Inversão com centro em *A*.

Agora, uma inversão com centro em *A* transforma a circunferência *C* em uma reta *C′* e a circunferência *D* em uma circunferência *D′*. A inversa *s′* de *s* é a própria reta *s*.

Com centro em *B′*, existe uma única circunferência *G′* ortogonal a *D′*. Desta forma, temos que *G′* também é ortogonal a *C′*, pois, *C′* é uma reta que passa pelo centro de *G′*. Note que *s′* é ortogonal a *C′* e a *D′*. Portanto, como a inversão preserva ângulos, sendo $G = (G')'$, temos que *G* e *s* são ortogonais a *C* e a *D*. Portanto, suas interseções *P* e *Q* são inversos em relação a *C* e a *D* simultaneamente (Figura 8).

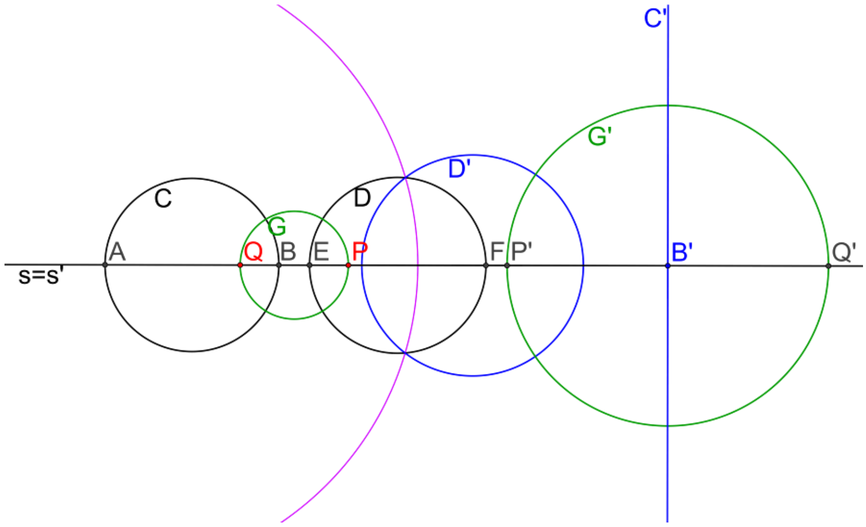


Figura 8: Encontrando *P* e *Q*.

<u>Unicidade</u>

Para encontrar pontos que são simultaneamente inversos em relação a *C* e a *D*, devemos encontrar as interseções de quaisquer duas circunferências *X* e *Y* que sejam ortogonais a *C* e a *D*. Por preservar ângulos, podemos pensar em encontrar duas circunferências *X′* e *Y′* que sejam simultaneamente ortogonais a *C′* e a *D′*. Mas, com a inversão feita acima, temos que *C′* é uma reta e, portanto, as circunferências ortogonais a C′ têm centros em *C′*.

Para mostrar a existência, usamos um caso particular onde, $X' = s'$ e $Y' = G'$. Queremos mostrar agora, que qualquer circunferência ortogonal a *C′* e a *D′* simultaneamente, passa por *P′* e *Q′*. Assim, seja *O* um ponto de *C′*. Com centro em *O*, existe uma única circunferência *X′* ortogonal a *D′*. Agora, seja *W* a circunferência de centro em *O* passando por *P′* (inverso de *P*). Então, como *P′* e *Q′* são inversos em relação a *C′* e *W* é ortogonal a *C′*, temos que *W* passa por *Q′*. Logo, como *P′* e Q′ são inversos com relação a *D′*, então, *W* é ortogonal a *D′*, mas, como *X′* é única com centro em *O* ortogonal a *D′*, então, $W = X'$ e, portanto, *X′* passa por *P′* e *Q′*.

Concluímos, então, que qualquer circunferência ortogonal a *C′* e a *D′* passa por *P′* e *Q′*, logo, este par de pontos é o único a ser inverso em relação a *C′* e a *D′*

simultaneamente. Portanto, *P* e *Q* é o único par de pontos inverso em relação a *C* e a *D* simultaneamente.

Definição 1: Sejam *C* e *D* circunferências disjuntas e não concêntricas. Chamemos de *s* a reta dos centros e *AB* e *EF* os diâmetros determinados por *s* em *C* e *D*, respectivamente. Os pontos *P* e *Q* que são conjugados harmônicos simultaneamente de *AB* e *EF* são denominados **pontos mágicos** de *C* e *D*.

Os pontos mágicos de *C* e *D* são, portanto, os pontos que são inversos em relação a *C* e a *D* simultaneamente.

Lema 1: Seja *C* uma circunferência de inversão de centro *O* e *D* uma circunferência que não passa por *O*. Seja *O′* o inverso de *O* em relação à *D* e *D′* a inversa de *D* com relação à *C*. Então, *O″*, o inverso de *O′* em relação à *C*, é o centro da circunferência *D′* (Figura 9).

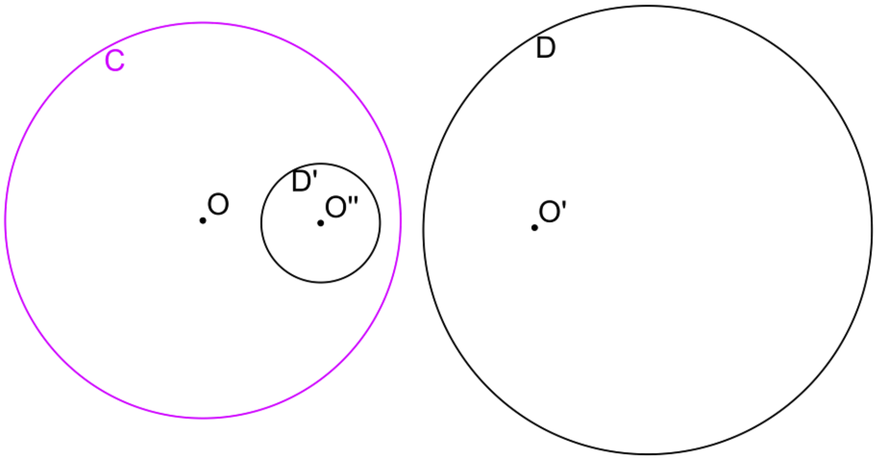


Figura 9: O centro do inverso.

5 O Problema de Apolônio

O Problema de Apolônio consiste em encontrar as circunferências que são tangentes a três circunferências dadas (Figura 10).

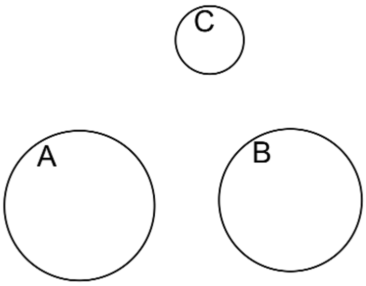


Figura 10: O problema de Apolônio.

Se as circunferências dadas são disjuntas e não concêntricas, o problema pode ser reduzido a um caso mais simples por meio da inversão. Esta simplificação ocorre porque existe uma inversão que transforma duas destas circunferências em circunferências concêntricas, conforme mostra a proposição a seguir.

Proposição 2: Sejam *C* e *D* circunferências disjuntas e não concêntricas. Então, existe uma inversão que transforma *C* e *D* em circunferências concêntricas.

Demonstração:

Sejam *P* e *Q* os pontos mágicos de *C* e *D*. Seja *S* uma circunferência com centro em *P* e *C′* a inversa de *C* em relação à *S*. Temos que o inverso do centro *P* de *S* em relação à *C* é o ponto *Q*, logo, pelo Lema 1, o inverso de *Q* em relação à *S* é o centro de C′. Analogamente, se *D′* é o inverso de *D* em relação à *S*, então, como o inverso de *P* em relação à *D* é o ponto *Q*, temos que o inverso de *Q* em relação à *S* é o centro de D′. Portanto, Q′ é o centro de C′ e D′, ou seja, C′ e D′ são concêntricas (Figura 11).

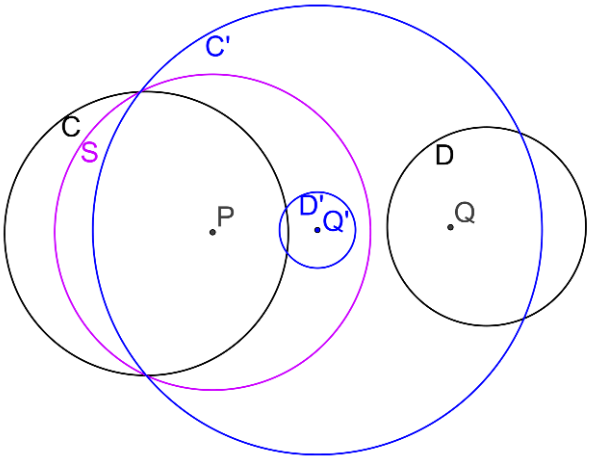


Figura 11: Transformação em circunferências concêntricas.

Agora, dadas três circunferências *A*, *B* e *C* disjuntas e externas, podemos encontrar *A′*, *B′* e *C′* com *A′* e *B′* concêntricas e *C′* no anel compreendido entre *A′* e *B′* (Figura 12).

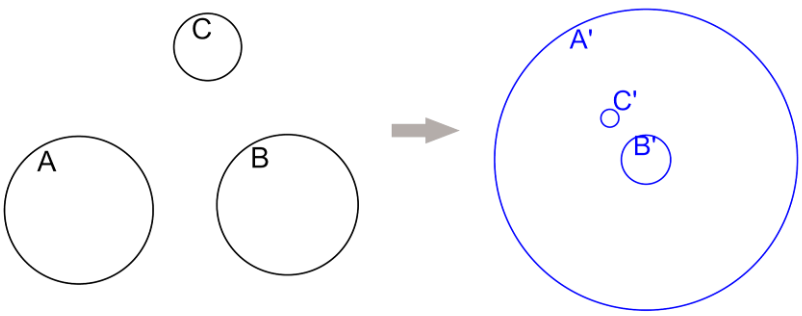


Figura 12: Simplificação do problema.

Temos, neste caso, oito soluções, sendo que B′ é externa a quatro delas e interna a outras quatro como mostra a Figura 13.

Finalmente, invertendo essas soluções, encontramos as oito soluções procuradas, conforme mostra a Figura 14.

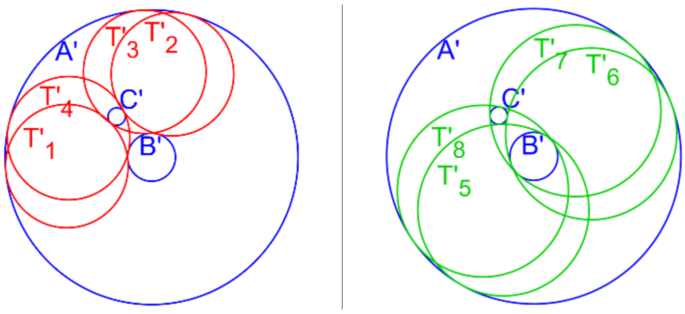


Figura 13: Soluções invertidas do problema.

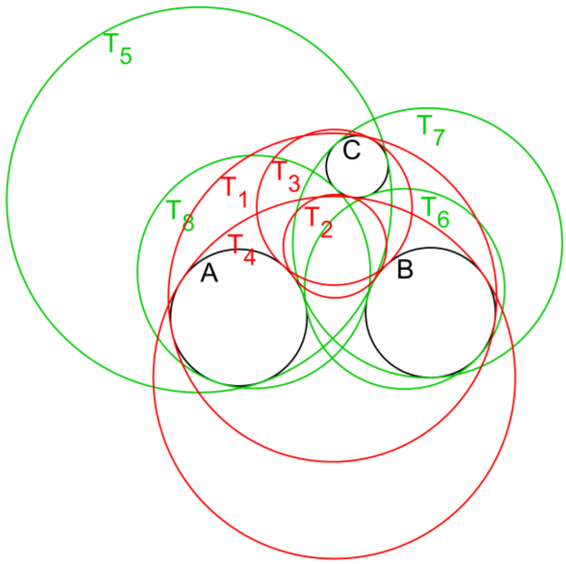


Figura 14: Soluções do problema de Apolônio.

6 Conclusão

Neste trabalhou apresentamos uma solução do Problema de Apolônio fazendo uso da Transformação Geométrica Inversão. Para isto, demonstramos que existem, e são únicos, os chamados pontos mágicos entre duas circunferências. Através destes pontos, utilizamos uma inversão que transforma duas circunferências disjuntas e não concêntricas, em circunferências concêntricas, ficando assim, o problema de Apolônio reduzido a um caso particular muito mais simples.

Outros problemas envolvendo tangência podem ser resolvidos através da inversão, porém, mais do que resolver tais problemas, descobrir e construir a Geometria Inversiva com o auxílio da Geometria Dinâmica é um caminho instigante que leva ao desenvolvimento de habilidades de visualização, desenho e argumentação lógica.

Referências

CABARITI, Eliane. **Geometria Hiperbólica: Uma proposta didática em ambiente informatizado**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.COXETER, Harold Scott Macdonald; GREITZER, Samuel. **Geometry revisited**. New York: Mathematical Association of America, 1967.

MAFALDA, Rovilson. **Resolução de problemas de tangências por inversões e aplicações à Engenharia**. 2007. Tese de Doutorado em Engenharia, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

MUNARETTO, Ana Cristina Corrêa. **Resolução do Problema de Apolônio por meio da Inversão: Um roteiro de estudo para a formação de Professores em Geometria**. Monografia de Especialização em Expressão Gráfica no Ensino, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2010.

OLIVEIRA, Pedro Miguel. **Será o infinito um ponto?!** Educação e Matemática: Notas sobre o ensino de Geometria. Revista da Associação dos Professores de Matemática, Vol. 95, 2007.

PUIG ADAM, Pedro. **Curso de Geometria Metrica**. Madrid: Euler, 1986.

SEARBY, David Graham. **On three circles**. Forum Geometricorum, Vol. 9, 2009.