



PROPRIEDADES PARA VISUALIZAÇÃO DA RETA DE NEWTON

Paulo Henrique Siqueira
UFPR, Departamento de Expressão Gráfica
paulohs@ufpr.br

Luzia Vidal de Souza
UFPR, Departamento de Expressão Gráfica
luzia@ufpr.br

Resumo

Este trabalho mostra uma sequência de propriedades para a compreensão da principal característica da reta de Newton, tais como teoria das cônicas, feixes de circunferências e feixes harmônicos. Para a visualização das propriedades foi utilizado o software acadêmico GeoGebra, pois como trata-se de um software de geometria dinâmica, é possível fazer a movimentação dos elementos das cônicas e dos quadriláteros circunscritos às mesmas, facilitando a compreensão das propriedades utilizadas.

Palavras-chave: Construções Geométricas, Geometria Euclideana, Cônicas, Geometria Dinâmica.

Abstract

This paper shows a sequence of properties that helps to understand the main characteristic of the Newton's Line, such as conic theory, coaxial system and harmonic system. In order to visualize these properties it was used the academic software GeoGebra that is the dynamic software of geometry that allows to move elements of the conics and this circumscribed quadrilaterals making easier the comprehension of the used properties.

Keywords: Geometric constructions, Euclidean Geometry, Conics, Dynamic Geometry

1 Introdução

Este trabalho apresenta os principais teoremas utilizados para a visualização e comprovação de um resultado interessante da Geometria Plana: a reta que passa pelos pontos médios das diagonais de um quadrilátero circunscrito em uma cônica contém o centro da mesma. Trata-se da reta de Newton, que necessita de um

referencial teórico sobre cônicas, feixes de circunferências e feixes harmônicos para a compreensão das justificativas de sua demonstração.

Os conteúdos teóricos apresentados estabelecem uma sequência didática interessante, que revisa algumas propriedades importantes das cônicas, e podem ser utilizados em disciplinas de Desenho Geométrico ou Geometria Euclidiana. A construção destes conceitos com o uso de um software de Geometria Dinâmica permite que os alunos visualizem e movimentem os elementos das construções, mantendo-se suas propriedades. As figuras deste trabalho foram feitas com o software livre GeoGebra (HOHENWARTER e PREINER, 2007).

A demonstração da validade da principal propriedade da reta de Newton para o caso particular da circunferência torna-se mais simples, e utiliza apenas propriedades do quadrilátero circunscrito (DÖRIE, 1965). Nos casos das cônicas, a demonstração utiliza conceitos de feixes harmônicos, pólo e reta polar, e algumas propriedades das cônicas.

O trabalho de Ehrmann (2004) mostra os teoremas enunciados por Jacob Steiner como os 10 problemas mais interessantes sobre quadriláteros. Um destes problemas é sobre a reta de Newton, cuja demonstração utiliza conceitos da teoria de pólo, polar e feixes harmônicos. Demonstrações similares podem ser encontradas em Akopyan e Zaslavsky (2007) e Faulkner (1949).

No trabalho de Pamfilos (2009) são mostradas diversas propriedades sobre a reta de Newton envolvendo conceito de feixes harmônicos, quadriláteros conjugados e quadriláteros duais.

Horwitz (2003) demonstra analiticamente que a reta de Newton passa pelo centro de uma elipse, enquanto Dörrie (1965) e Smogorzhevskii (1961) utilizam a área do quadrilátero circunscrito em uma circunferência para demonstrar que a mesma passa pelo seu centro. Nestes trabalhos os autores estendem a propriedade da circunferência para a elipse, considerando que a elipse é a projeção ortogonal de uma circunferência contida em um plano oblíquo ao plano de projeção considerado. Desta forma os pontos médios das diagonais do quadrilátero circunscrito na circunferência correspondem aos pontos médios das diagonais do quadrilátero circunscrito na elipse. Portanto, se a reta de Newton de uma circunferência passa pelo centro, o mesmo vale para a elipse.

Os conceitos descritos neste trabalho permitem a comprovação e a visualização de que a reta de Newton passa pelo centro de qualquer cônica, inclusive no caso particular em que a cônica é uma circunferência.

2 Feixes de circunferências

Um conjunto de circunferências que admite o mesmo eixo radical é denominado feixe de circunferências. Este feixe pode ser de circunferências tangentes, secantes ou exteriores, onde todas têm centros colineares.

No trabalho de Eves (1995) pode ser encontrada a demonstração de que o eixo radical entre duas circunferências é perpendicular à reta que passa pelos seus centros. Como todos os pontos de um eixo radical entre duas circunferências admitem mesma potência de ponto, um feixe de tangentes contém todas as circunferências tangentes em um mesmo ponto O (Figura 1). Um feixe de circunferências secantes é determinado pela reta comum a todas as circunferências, pois todos os pontos da reta têm mesma potência de ponto (Figura 2).

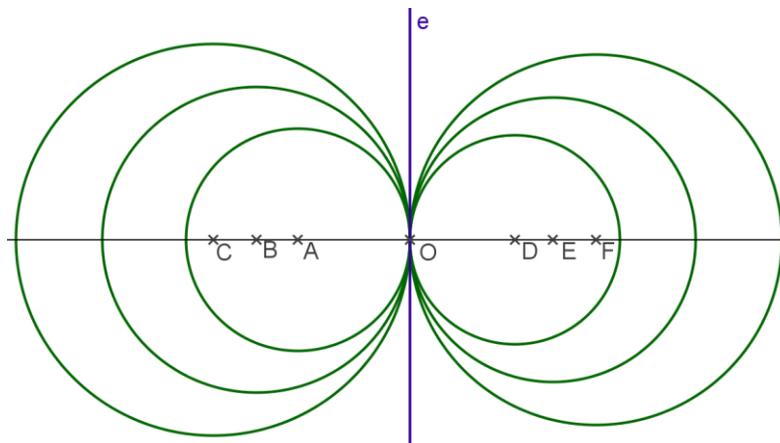


Figura 1: Feixe de circunferências tangentes.

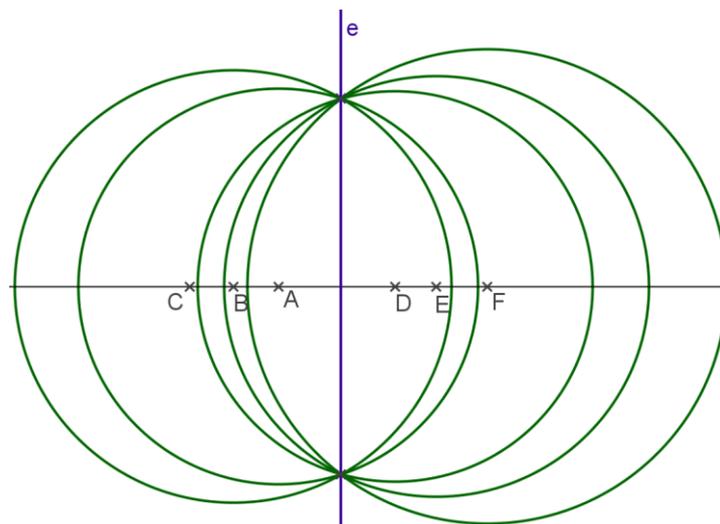


Figura 2: Feixe de circunferências secantes.

No caso de circunferências exteriores, pode-se utilizar uma circunferência ortogonal a uma das circunferências do feixe para obter outras circunferências do mesmo feixe (EVES, 1995). Por exemplo, se a circunferência α é ortogonal à

circunferência de centro A, a reta tangente OT_A contém o raio de α , e vice-versa (Figura 3). Como todos os pontos do eixo radical têm mesma potência de ponto em relação às circunferências do feixe, tem-se que $OT_A^2 = OT_B^2$, ou seja, $OT_A = OT_B$. Logo, a circunferência α é ortogonal ao feixe de circunferências, e para encontrar outras circunferências do feixe, basta traçar retas tangentes a α , cujas interseções com a reta AB determinam os centros das circunferências procuradas.

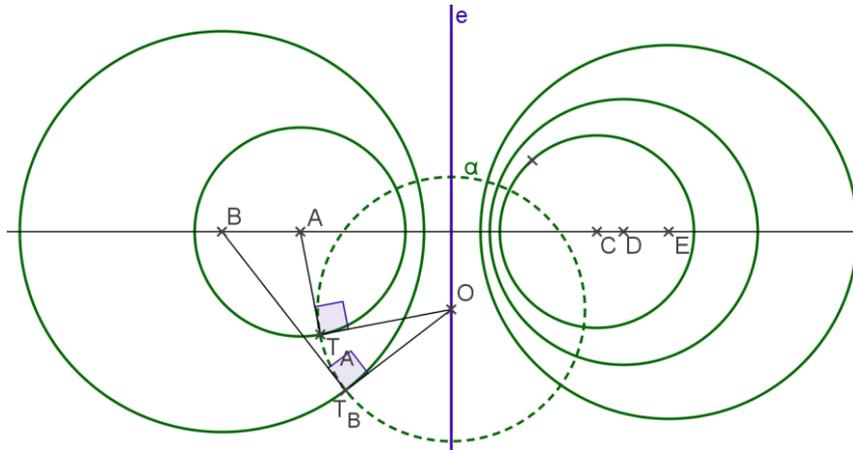


Figura 3: Feixe de circunferências exteriores.

3 Cônicas

Dada uma elipse ou hipérbole de diâmetros $A_1A_2 = 2a$ e $B_1B_2 = 2b$ e distância focal $F_1F_2 = 2c$, as circunferências com centros nos focos e raios iguais a $2a$ denominam-se diretrizes da cônica (Figura 4). No caso da parábola, o centro de uma das diretrizes é impróprio, e a circunferência diretriz é a reta perpendicular ao eixo (Figura 5).

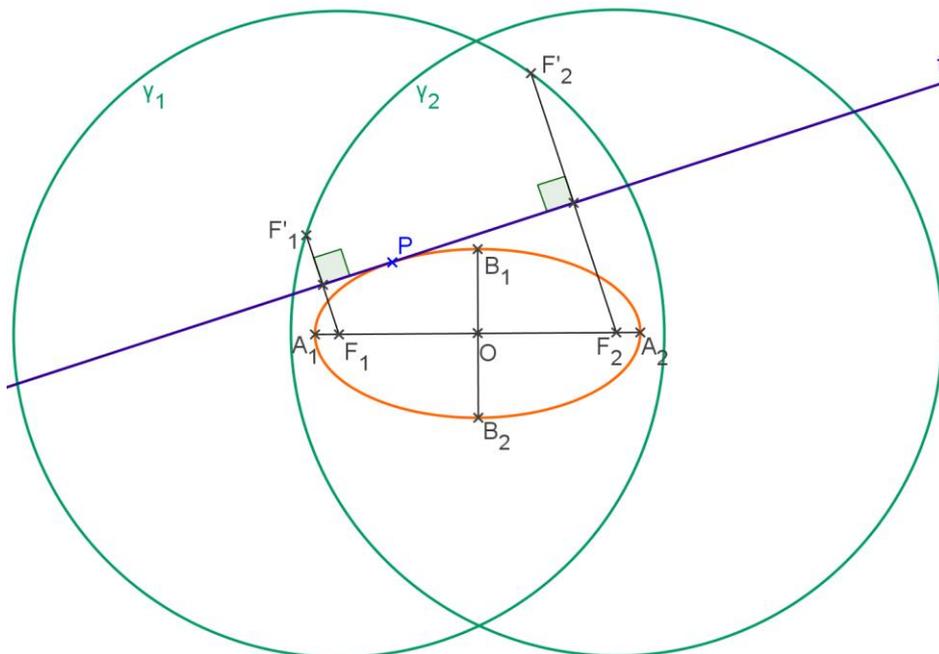


Figura 4: Circunferências diretrizes de uma elipse.

Propriedade: A circunferência diretriz de um foco de uma cônica contém os simétricos do outro foco em relação às retas tangentes à cônica.

Trata-se da propriedade ótica das cônicas. Considerando F'_1 o simétrico da tangente t que passa pelo ponto P de uma elipse (Figura 4), tem-se que $PF'_1 = PF_1$. Como P pertence à elipse, $PF_1 + PF_2 = 2a = PF'_1 + PF_2$, ou seja, F'_2 pertence à circunferência diretriz γ_2 . Analogamente comprova-se que a mesma propriedade vale para hipérbolos e parábolas (AKOPYAN e ZASLAVSKY, 2007).

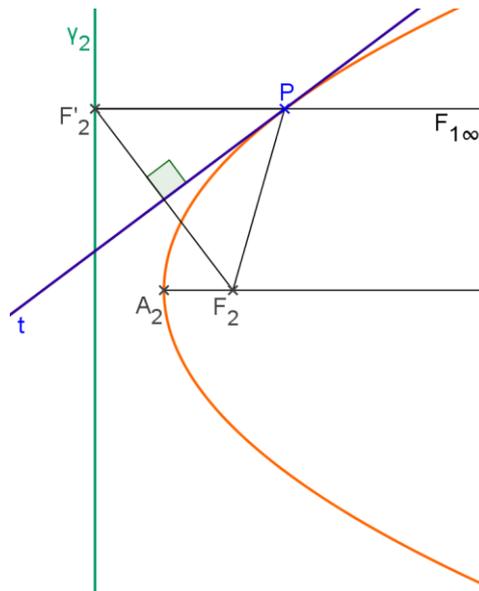


Figura 5: Reta diretriz de uma parábola.

Teorema de Poncelet: As tangentes a uma cônica, conduzidas por um ponto externo P formam ângulos iguais com as retas determinadas por este ponto P e pelos focos ($\alpha = \beta$).

A Figura 6 mostra o caso de uma hipérbole, e o caso da elipse é análogo. Seja a reta tangente t à cônica com diretriz γ_1 . Como t é mediatriz de $F_2F'_2$, então $\alpha = \alpha'$, ou seja, $F_2\hat{P}F'_2 = 2\alpha$.

Como t' é mediatriz de $F_2F''_2$ e PF_1 é mediatriz de $F'_2F''_2$ (pois $F'_2F''_2$ é a corda comum às circunferências de centros P e F_1), então $\beta = \beta'$ pois têm lados respectivamente perpendiculares. Considerando que β' mede a metade de $F_2\hat{P}F'_2$ (pois um é ângulo inscrito e outro central de uma mesma circunferência), tem-se $\alpha = \beta$.

Como a parábola tem um dos focos impróprio $F_{1\infty}$, a reta $PF_{1\infty}$ é perpendicular à diretriz, como mostra a Figura 7.

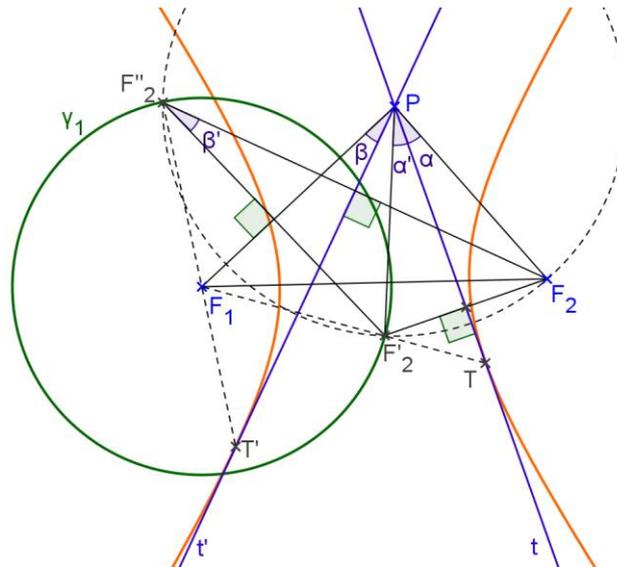


Figura 6: Teorema de Poncelet em uma hipérbole: $\alpha = \beta$.

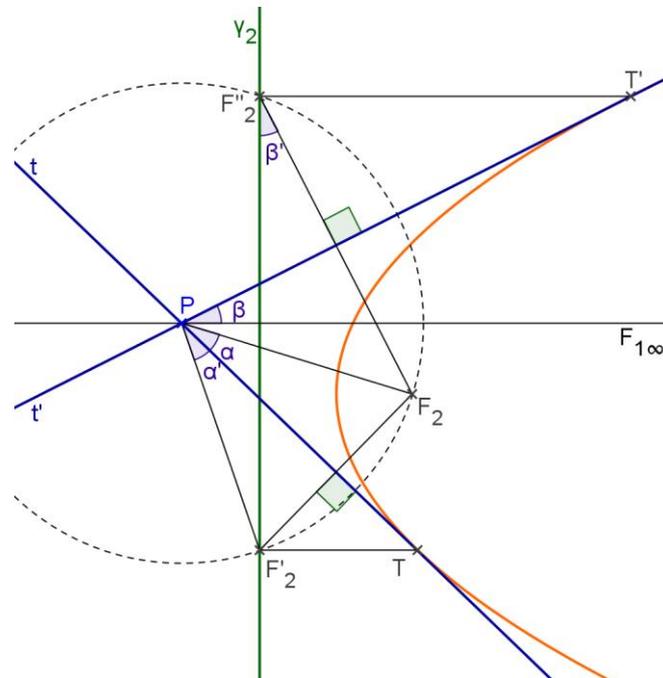


Figura 7: Teorema de Poncelet em uma parábola: $\alpha = \beta$.

Uma consequência deste teorema é que o lugar geométrico dos pontos de encontro de duas tangentes a uma elipse ou hipérbole perpendiculares entre si é denominado circunferência de Monge.

Como os ângulos $t\hat{P}t'$ e $F_1\hat{P}F'_2$ são iguais (Figura 8), e $t\hat{P}t' = 90^\circ$, o $\Delta F_1PF'_2$ é retângulo em P, logo:

$$(PF_1)^2 + (PF'_2)^2 = (F_1F'_2)^2.$$

Como $PF'_2 = PF_2$ e $F_1F'_2 = 2a$, tem-se:

$$(PF_1)^2 + (PF_2)^2 = 4a^2.$$

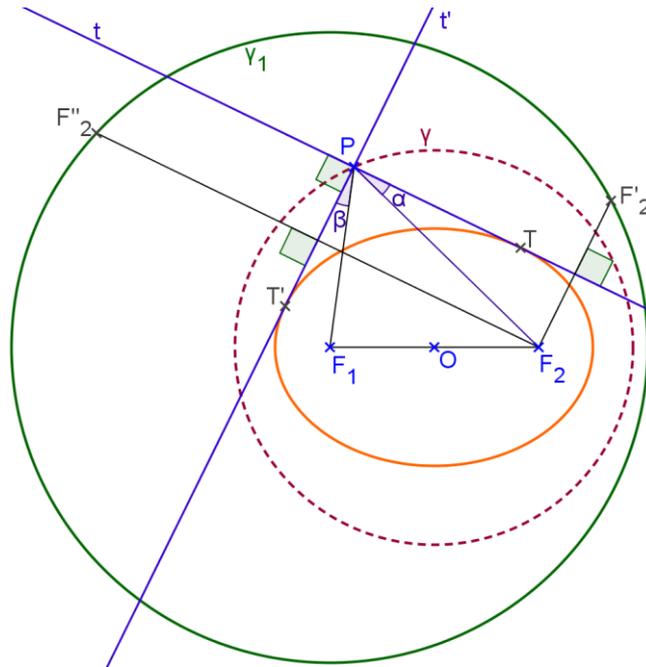


Figura 8: Circunferência de Monge de uma elipse.

Dos triângulos ΔPOF_1 e ΔPOF_2 tem-se que:

$$PF_1^2 = OF_1^2 + OP^2 - 2OF_1 \cdot OP \cdot \cos \hat{F}_1OP, \text{ e}$$

$$PF_2^2 = OF_2^2 + OP^2 - 2OF_2 \cdot OP \cdot \cos(\pi - \hat{F}_1OP).$$

Como $\cos(\pi - \hat{F}_1OP) = -\cos \hat{F}_1OP$, e somando-se as igualdades acima, tem-se:

$$PF_1^2 + PF_2^2 = 2c^2 + 2OP^2.$$

Quando as retas t e t' são perpendiculares, P pertence ao lugar geométrico dos pontos P tais que:

$$PF_1^2 + PF_2^2 = 2c^2 + 2OP^2 = 4a^2, \text{ ou seja,}$$

$$OP^2 = 2a^2 - c^2.$$

Quando a cônica for elipse, $a^2 - c^2 = b^2$ e na hipérbole $a^2 - c^2 = -b^2$. Logo, o raio da circunferência de centro O vale $\sqrt{a^2 + b^2}$ para a elipse e $\sqrt{a^2 - b^2}$ para a hipérbole.

No caso da parábola (Figura 7), como $\alpha = \alpha'$ e $F_2\hat{P}T' = T'\hat{P}F_2''$, quando $t\hat{P}t' = 90^\circ$, então $F_2\hat{P}F_2'' = 180^\circ$, e P pertencerá à diretriz γ_2 . Logo, a circunferência de Monge de uma parábola é a reta diretriz.

4 Reta de Newton

A principal propriedade da reta de Newton pode ser enunciada da seguinte forma: a reta que passa pelos pontos médios das diagonais de um quadrilátero circunscrito em uma cônica passa pelo centro da cônica.

Considere as circunferências α_1 com diâmetro AC , α_2 com diâmetro BD e a circunferência de Monge γ da cônica (Figura 9). Considerando T e U como a

interseção das circunferências α_1 e γ , tem-se que TU é o eixo radical entre estas circunferências.

A circunferência α_1 pode ser considerada como o lugar geométrico dos vértices opostos A_1 e C_1 de quadriláteros circunscritos na cônica. Analogamente, α_2 é o lugar geométrico dos vértices opostos B_1 e D_1 de quadriláteros circunscritos na cônica.

Logo, tomando-se um ponto A_1 pertencente a α_1 , o ponto correspondente C_1 também pertence a α_1 , onde A_1D_1 e C_1D_1 são tangentes à cônica. Quando A_1 coincidir com A , tem-se o quadrilátero ABCD original.

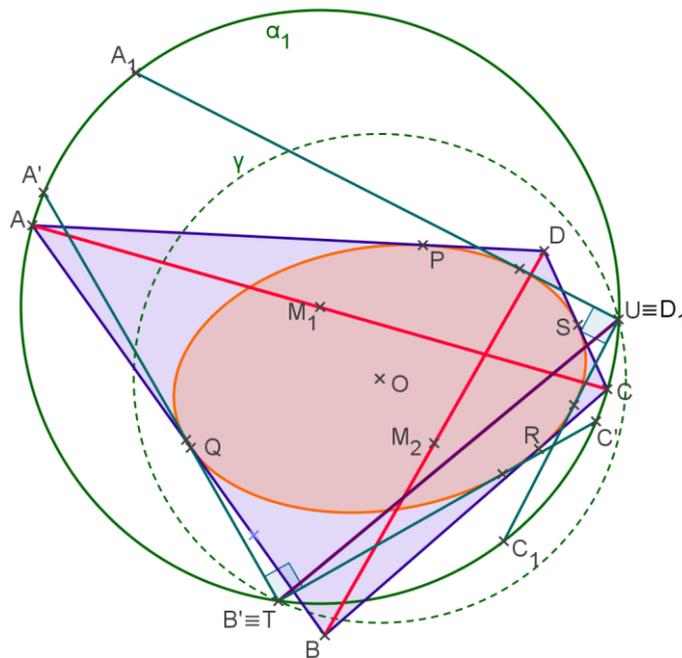


Figura 9: Tangentes a uma elipse conduzidas por T e U, onde TU é eixo radical de α_1 e γ .

Sejam os pontos A_1 e C_1 pertencentes aos arcos $\widehat{T\hat{A}U}$ e $\widehat{T\hat{C}U}$ de α_1 , respectivamente, onde UA_1 e UC_1 são tangentes à cônica. Como o ponto U pertence à circunferência de Monge, as tangentes UA_1 e UC_1 são perpendiculares em U, portanto o ponto U pode ser considerado como uma possível posição do vértice D_1 onde o quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ é circunscrito na cônica, com ângulo reto em D_1 .

De forma análoga o vértice B' pode ser considerado coincidente com o ponto T desde que TA' e TC' sejam tangentes à cônica, determinando-se um quadrilátero $A'B'C'D'$ circunscrito na cônica com ângulo reto em B' . Logo, a circunferência α_2 passa pelos pontos T e U, pois nestes pontos ocorrem os dois possíveis de quadriláteros circunscritos à cônica com ângulos retos em D_1 e B' . Um raciocínio análogo pode ser feito considerando-se os pontos U e T como as interseções entre α_2 e γ (Figura 10). Considerando-se os pontos B_2 e D_2 pertencentes à circunferência α_2 , onde UB_2 e UD_2 são tangentes à cônica, U pode ser considerado como o vértice C_2 do

quadrilátero $A_2B_2C_2D_2$ circunscrito na cônica, cujo ângulo C_2 é reto. Quando TB'' e TD'' são tangentes à cônica, pode-se determinar o quadrilátero $A''B''C''D''$ circunscrito na cônica com ângulo A'' reto. Logo, a circunferência α_1 também passa por T e U.

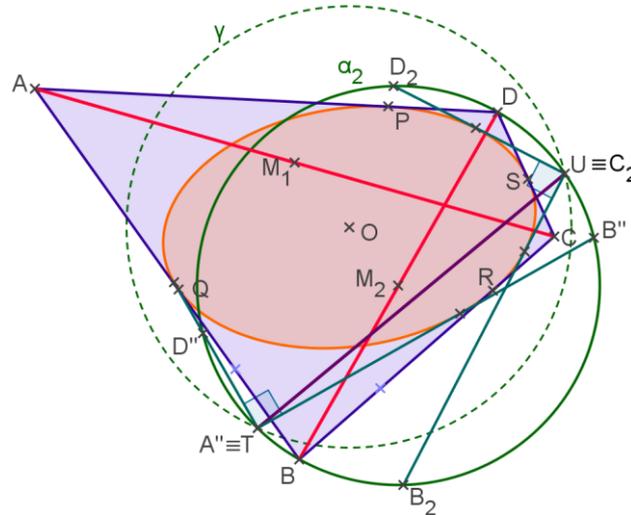


Figura 10: Tangentes a uma elipse conduzidas por T e U, onde TU é eixo radical de α_2 e γ .

Como as circunferências α_1 , α_2 e γ passam pelos pontos T e U, estas formam um feixe de circunferências com eixo radical TU. Logo, os centros destas circunferências são colineares, o que prova o Teorema de Newton. A Figura 11 mostra o caso de um quadrilátero ABCD circunscrito em uma hipérbole. No caso da parábola, o centro é um ponto impróprio, e a circunferência de Monge é a reta diretriz da parábola, conforme mostra a Figura 12. Neste caso, a reta M_1M_2 torna-se perpendicular à diretriz da parábola.

Como as circunferências α_1 , α_2 e γ passam pelos pontos T e U, estas formam um feixe de circunferências com eixo radical TU. Logo, os centros destas circunferências são colineares, o que prova o Teorema de Newton, ou seja, M_1 , M_2 e O são os centros das circunferências de um mesmo feixe TU, o que prova que as mesmas são colineares. A Figura 11 mostra o caso de um quadrilátero circunscrito em uma hipérbole. No caso da parábola, o centro é um ponto impróprio, e a circunferência de Monge é a reta diretriz da parábola, conforme mostra a Figura 12. Neste caso, a reta M_1M_2 torna-se perpendicular à diretriz da parábola.

Nas Figuras 13 e 14 encontram-se as cônicas circunscritas em um mesmo quadrilátero ABCD. Para construí-las, basta movimentar o ponto de tangência E sobre um dos lados. Neste exemplo, o ponto E pertence ao lado AB, onde: quando E estiver entre A e B tem-se uma elipse; quando B estiver entre A e E tem-se uma hipérbole; e quando o ponto E determinar o centro impróprio, tem-se a parábola.

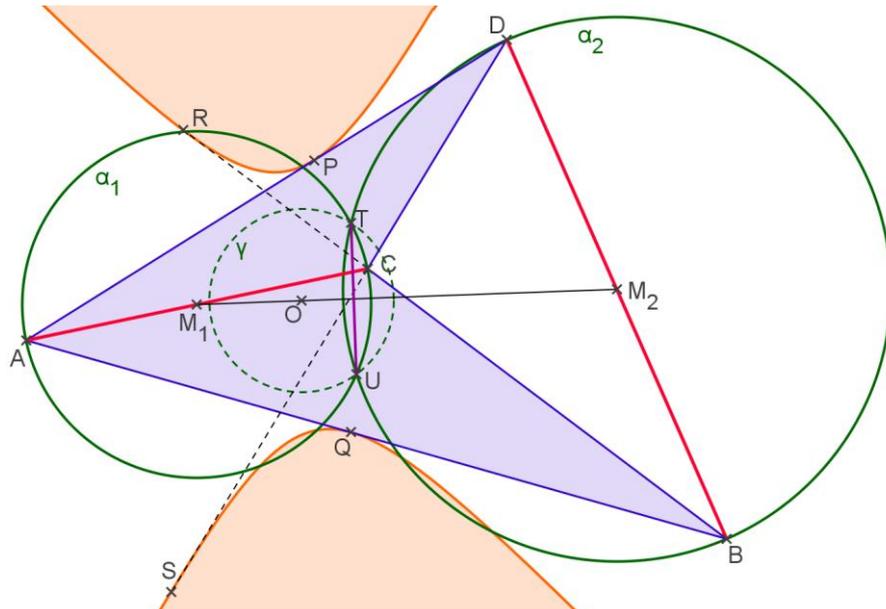


Figura 11: Reta de Newton em um quadrilátero circunscrito em uma hipérbole.

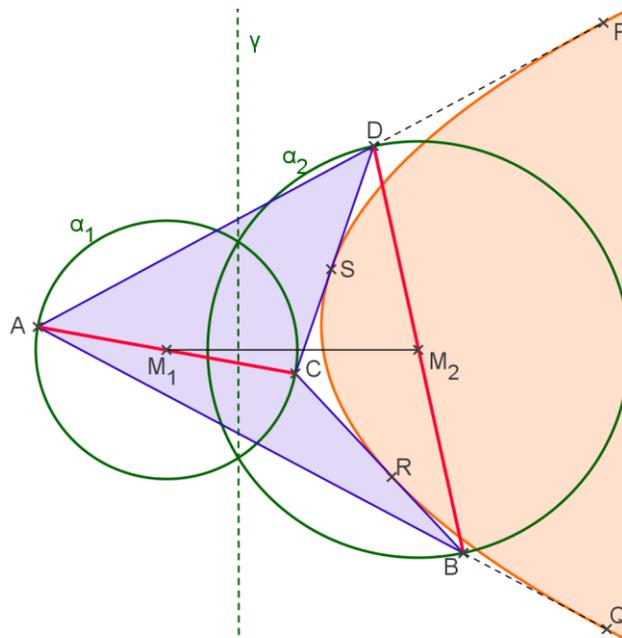


Figura 12: Reta de Newton em um quadrilátero circunscrito em uma parábola.

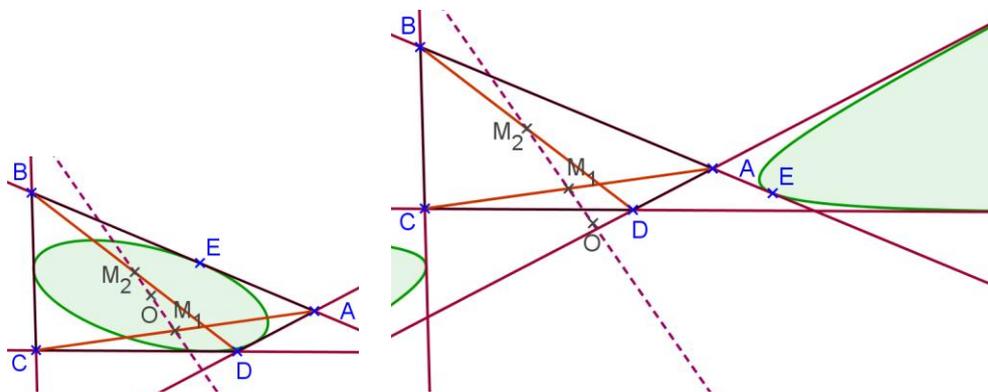


Figura 13: Reta de Newton em um quadrilátero circunscrito em elipses e hipérbolas.

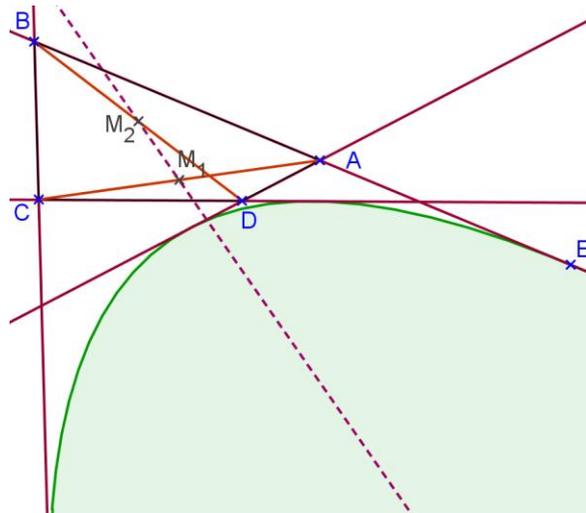


Figura 14: Reta de Newton em um quadrilátero circunscrito em uma parábola.

5 Conclusão

Neste trabalho foi apresentada uma sequência de propriedades sobre cônicas e feixes de circunferências para a compreensão da principal propriedade da reta de Newton. Estas propriedades podem ser trabalhadas nas disciplinas de Desenho Geométrico e Geometria Euclideana, e com o uso de um software de Geometria Dinâmica os alunos podem visualizá-las com mais facilidade.

Ao movimentar os vértices do quadrilátero e um dos pontos de tangência sobre um dos lados, o aluno pode perceber a formação das diversas cônicas inscritas em um mesmo quadrilátero, ou vice-versa. Outro fato que pode ser verificado é que o único tipo quadrilátero que não admite a reta de Newton é o paralelogramo, pois os pontos médios das diagonais coincidem.

Outras propriedades da reta de Newton podem ser exploradas em trabalhos futuros, com a possibilidade de descoberta de novas propriedades ou novas metodologias para a construção de uma sequência teórica que permita uma boa compreensão das propriedades já conhecidas.

Referências

AKOPYAN, Arseny; ZASLAVSKY, Alexey. **Geometry of Conics**. Mathematical World, vol. 26. Providence: American Mathematical Society, 2007.

DÖRIE, Heinrich. **100 Great Problems of Elementary Mathematics: their history and solution**. New York: Dover publications, 1965.

EHRMANN, Jean-Pierre. **Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral**. Forum Geometricorum, vol. 4, p. 35-52, 2004.

EVES, Howard Whitley. **College geometry**. Boston: Jones and Barlett Publishers, 1995.

FAULKNER, Thomas Ewan. **Projective geometry**. Edinburg: Oliver and Boyd, 1949.

HOHENWARTER, Markus; PREINER, Judith. **Dynamic Mathematics with GeoGebra**. Journal of Online Mathematics and its Applications, vol.7, 2007.

HORWITZ, Alan. **The locus of centers of ellipses inscribed in quadrilateral**. Arxiv preprint math/0312403, 2003.

PAMFILOS, Paris. **On the Newton Line of a Quadrilateral**. Forum Geometricorum, vol. 9, 2009.

SMOGORZHEVSKII. Aleksandr Stepanovich. **The ruler in geometrical constructions**. New York: Blaisdell, 1961.