

VISUALIZAÇÃO DOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES ATRAVÉS DE UM AMBIENTE WEB DE REALIDADE AUMENTADA E REALIDADE VIRTUAL
SIQUEIRA, Paulo Henrique¹

Resumo

Este artigo mostra o desenvolvimento de um ambiente web para a construção de poliedros de Arquimedes em Realidade Aumentada (RA) e Realidade Virtual (RV). Neste ambiente foram utilizadas as transformações geométricas de translação e rotação com a estrutura de hierarquias de páginas HTML, sem o uso das coordenadas de cada vértice do poliedro. O ambiente desenvolvido pode ser usado em sala de aula para a visualização dos poliedros em Realidade Aumentada, com a possibilidade de manipulações das representações gráficas pelos alunos no ambiente criado em Realidade Virtual. Outros estudos que podem ser desenvolvidos com os poliedros modelados são de áreas, volumes e a relação de Euler. Outro conteúdo importante que pode ser desenvolvido é o de seções planas, pois sete poliedros de Arquimedes são obtidos através de seções planas dos poliedros de Platão. Com este trabalho, torna-se possível o desenvolvimento de materiais didáticos com uma tecnologia simples, gratuita e com grande contribuição para a melhoria do ensino da Geometria e outras áreas que utilizam objetos 3D.

Palavras-chave: Realidade Aumentada; Realidade Virtual; Visualização gráfica.

Abstract

This paper shows the development of a web environment for the construction of Archimedes polyhedra in Augmented Reality (AR) and Virtual Reality (VR). In this environment we used the geometric transformations of translation and rotation with the structure of hierarchies of HTML pages, without the use of the coordinates of each vertex of the polyhedron. The developed environment can be used in classroom to visualize the polyhedra in Augmented Reality, with the possibility of manipulations of the graphical representations by students in the environment created in Virtual Reality. Other studies that can be developed with the polyhedra modeled are areas, volumes and the relation of Euler. Another important content that can be developed is truncation, because seven Archimedes polyhedra are obtained through truncation of Plato's polyhedrons. With this work, it becomes possible to develop didactic materials with a simple technology, free and with great contribution to improvement of the teaching of Geometry and other areas that use 3D objects.

Keywords: Augmented Reality; Virtual Reality; Graphical Visualization.

¹ Universidade Federal do Paraná, paulohs@ufpr.br

1 Introdução

Os conceitos tridimensionais usados em algumas disciplinas podem ser melhor compreendidos pelos alunos através do uso de recursos auxiliares. Hoje em dia os materiais concretos podem ser feitos com impressões 3D para aulas de Biologia (McMENAMIN et al., 2014), Geometria (Huleihil, 2017) ou disciplinas com conteúdos que envolvem representações 3D (BASNIAK e LIZIERO, 2017; CASAS e ESTOP, 2015). O desenvolvimento de ambientes ou aplicativos web para o ensino também colabora em visualizações e manipulações de conceitos de Biologia (Attardi e Rogers, 2015) e Geometria (Cantos, Izquierdo e Cantos, 2016) e tem sido utilizado como uma alternativa atraente para auxílio da aprendizagem dos alunos.

O uso de modelagem com tecnologias virtuais também pode auxiliar na aprendizagem de conteúdos que envolvem conceitos em 3D. A Realidade Virtual (RV) cria um ambiente imersivo com manipulação dos objetos através de controles e óculos imersivos (MORO et al., 2017). Ambientes desenvolvidos em RV podem ajudar na visualização de fenômenos físicos ou biológicos, simulações de situações de treinamentos, jogos educacionais, simulações de construções e outras áreas ligadas à educação.

Os ambientes modelados com a tecnologia de Realidade Aumentada (RA) são renderizados em dispositivos com câmera para colocar objetos virtuais junto com o ambiente da imagem da câmera, criando camadas virtuais de objetos 3D e texto sobre a imagem da câmera em tempo real (KIRNER e KIRNER, 2011). As aplicações da RA podem auxiliar no ensino de Geometria (GONZÁLEZ, 2017), Engenharia (CERRA et al., 2018), Arquitetura (ABDULLAH et al., 2017) e Medicina (KAMPHUIS et al., 2014). O uso de RA na área educacional demonstra que se trata de uma poderosa ferramenta, pois permite várias formas de interações visuais no aprendizado de diversas disciplinas (CHEN et al., 2017).

A aprendizagem dos conteúdos que envolvem poliedros em disciplinas como Geometria Euclidiana, Geometria Descritiva e Desenho Técnico quase sempre necessita de materiais auxiliares, tais como poliedros planificados ou montados com materiais alternativos (ANDRADE, SANTOS e MOURA, 2017) ou impressos em 3D. Os conteúdos que envolvem visualizações de faces e arestas, além dos cálculos de áreas e volumes podem ser explorados com materiais manipuláveis ou modelados em ambientes virtuais.

O uso da RA pode complementar a utilização dos materiais didáticos tradicionais no ensino dos poliedros, pois os alunos podem interagir e visualizar os sólidos e suas propriedades de maneira mais efetiva e significativa. A RV pode colaborar na interação dos alunos com as representações dos poliedros modelados, facilitando as visualizações e a compreensão dos objetos.

Neste trabalho são mostradas as estruturas de páginas web que possibilitam a construção de um ambiente com as tecnologias de RV e RA para representar os poliedros de Arquimedes. A ideia principal é usar uma página codificada em HTML para RA, com links para as páginas desenvolvidas em RV. Na página em RA, os alunos visualizam os poliedros através de diversos pontos de vista e acessam os sites de RV para manipularem as representações dos sólidos com dispositivos móveis, computadores ou podem até imergirem na cena com óculos de RV.

Como pode ser visto neste trabalho, os comandos usados na construção do ambiente proposto em RA e RV são bastante intuitivos, e exigem apenas um conhecimento básico dos conceitos de HTML. De acordo com Munoz-Crisóbal et al. (2018), algumas dificuldades no uso da RA em sala de aula podem ser contornadas com o uso do ambiente proposto neste trabalho.

2 Modelagem de um poliedro de Arquimedes

Um poliedro convexo de Arquimedes é formado por polígonos regulares e cada vértice é extremidade do mesmo número de arestas. Existem 13 poliedros de Arquimedes, onde 7 são obtidos através de seções planas dos Sólidos de Platão. Os vértices destes poliedros são combinações de dois ou mais polígonos regulares diferentes (COXETER, 1973; Weisstein, 2019). Neste trabalho são mostrados os elementos do octaedro truncado e suas respectivas *tags* para visualização em Realidade Virtual. As construções dos demais sólidos de Arquimedes podem ser feitas de forma similar.

O octaedro truncado é um poliedro de Arquimedes formado por 14 faces: 8 hexágonos e 6 quadrados. Este poliedro pode ser construído utilizando-se as simetrias das faces, rotações, translações e a composição de suas partes, sem a necessidade da obtenção das coordenadas de seus vértices. Neste tipo de construção, são usadas as hierarquias estruturais das páginas web e transformações geométricas, obtendo-se uma renderização otimizada do modelo em RV e RA.

A primeira face modelada do octaedro truncado é um quadrado. Considerando-se o ponto O como centro da esfera circunscrita ao poliedro de aresta $a = 3$, a distância até o centro do quadrado do octaedro truncado é $dq = OO' = a/4,243$ (COXETER, 1973), onde O' é o centro do quadrado. Todas as arestas dos quadrados sofrem translação igual a dq em relação ao centro da esfera circunscrita.

O apótema do quadrado mede a metade da aresta, ou seja, $ap' = a/2 = 1,5$. Definindo-se a aresta como um cilindro com altura igual à aresta $a = 3$ e raio da base $r_c = 0,03$, e o vértice da face como uma esfera de raio $r_e = 0,2$, a posição da aresta com vértice A é obtida através da translação na direção OO' com distância dq , com a segunda translação na direção ortogonal a OO' e distância ap' (Figura 1). Os outros três lados do quadrado são obtidos através das rotações de 90° em torno da reta OO' .

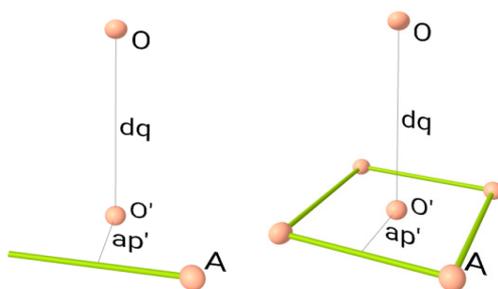


Figura 1. Construção das arestas dos quadrados do octaedro truncado.

Fonte: Autores.

A distância do centro da esfera circunscrita ao centro de cada hexágono do octaedro truncado mede $dh = OO'' = a/3,676$ e o apótema do hexágono regular mede $ap'' = a/2,598$. Outra medida utilizada para posicionar os hexágonos adjacentes a cada quadrado é o ângulo diédrico deste poliedro, que mede $\alpha = 125,16^\circ$ (COXETER, 1973; WEISSTEIN, 2019). A posição da aresta com vértice B é obtida através da rotação com ângulo α e centro O , translação na direção OO'' com distância dh , com a segunda translação na direção ortogonal a OO'' e distância igual ao apótema ap'' (Figura 2). Os outros lados do hexágono são obtidos através das rotações de 60° em torno de OO'' .

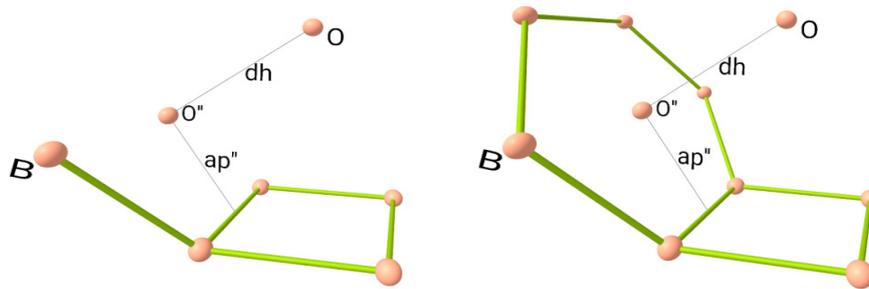


Figura 2. Construção das arestas dos hexágonos do octaedro truncado.
Fonte: Autores.

Os outros três hexágonos são obtidos através de rotações de 90° em torno do eixo OO' (Figura 3). Este bloco representa uma das partes do poliedro, que pode ser encaixado em outro bloco simétrico. Neste poliedro, basta encaixar a parte de cima através de uma rotação de 180° em torno do eixo OO' e uma translação com medida igual a $2dq$, obtendo-se o octaedro truncado completo (Figura 4).

Outros poliedros de Arquimedes mais complexos podem ser construídos com a mesma metodologia mostrada, com mais repetições do bloco principal. Por exemplo, o bloco principal do icosidodecaedro é formado por um pentágono regular e cinco triângulos equiláteros (Figura 5). Este módulo pode ser repetido nas laterais, formando-se a parte inferior do sólido. A composição destes módulos pode ser transladada com o dobro da distância do centro da esfera até o pentágono do primeiro módulo e rotacionada com 180° em torno do eixo principal, da mesma forma que foi mostrada no octaedro truncado.

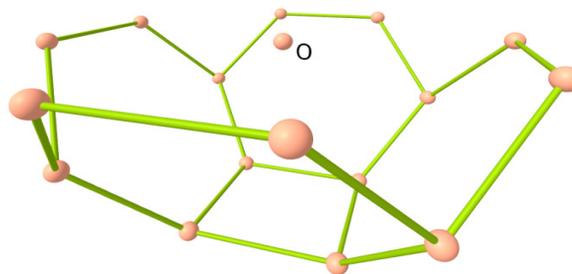


Figura 3. Bloco inferior do octaedro truncado.
Fonte: Autores.

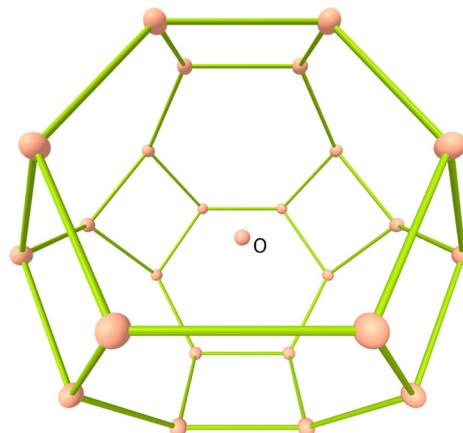


Figura 4. Octaedro truncado completo representado em RV.
Fonte: Autores.

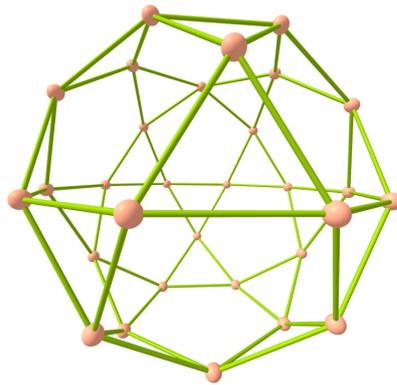


Figura 5. Icosidodecaedro regular representado em RV.
Fonte: Autores.

O poliedro de Arquimedes mais conhecido é o icosaedro truncado, sólido utilizado como base para confecção de bolas de futebol (Figura 6). Neste poliedro o bloco principal é formado por um hexágono regular com pentágonos e hexágonos regulares adjacentes intercalados (pode ser considerado também um pentágono com 5 hexágonos adjacentes). Este módulo pode ser repetido 6 vezes nas laterais e depois na parte superior do poliedro.

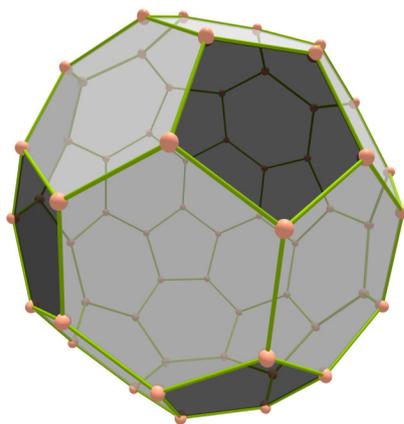


Figura 6. Icosaedro truncado representado em RV.
Fonte: Autores.

Com os elementos definidos, os poliedros de Arquimedes podem ser modelados em RA e RV para utilização em sala de aula. A mesma metodologia pode ser usada em poliedros de Platão ou sólidos que tenham simetrias das posições das faces.

3 Realidade Virtual

Em um ambiente programado em Realidade Virtual, ocorre uma simulação dos objetos em 3D, proporcionando ao visitante a sensação de que os objetos programados são reais (MORO et al., 2017). Já o ambiente programado em Realidade Aumentada tem os objetos de RV integrados com as imagens reais da câmera do dispositivo, criando a sensação de que os objetos virtuais fazem parte do mundo real.

As medidas mostradas na seção 2 do octaedro truncado foram programadas tanto em RV quanto em RA. Nos dois casos, foram utilizadas as bibliotecas do A-frame, ambiente desenvolvido pela equipe de RV do Mozilla (OLIVEIRA, 2018). O A-frame utiliza funções da biblioteca Three.js do Java com *tags* do HTML puro, permitindo que toda a programação de

RV ou RA seja feita em uma página da web, que segue é composta de *tags* com princípios de herança e hierarquia (A-FRAME, 2019).

As *tags* principais da modelagem de uma parte do octaedro truncado são mostradas na Figura 7. As informações colocadas nesta figura incluem as *tags* das arestas do quadrado e de uma das arestas do hexágono do bloco principal do poliedro. As demais *tags* têm estrutura similar e serão omitidas. Na *tag* de cabeçalho da página HTML está inserida a referência à biblioteca principal do A-frame entre as linhas 3 e 5. Todas as referências de bibliotecas podem ser inseridas dentro desta *tag* de cabeçalho.

A modelagem do poliedro está definida nas *tags* do corpo da página HTML. Nas linhas 7 e 8 da Figura 7 encontram-se as definições para interação do usuário com o mouse ou controle de RV e a câmera da cena com posição inicial nas coordenadas x (direita/esquerda), y (altura) e z (profundidade). Os valores iniciais são: x = 0 que centraliza a câmera na tela; y = 2m que representa a altura do observador; e z = 8m para afastar o observador da origem do sistema, onde está representado o centro do octaedro truncado.

```

1 <!DOCTYPE html>
2 <html>
3 <head>
4 <script src="https://aframe.io/releases/0.8.2/aframe.min.js"></script>
5 </head>
6 <body>
7 <a-scene cursor="rayOrigin:mouse">
8 <a-entity camera look-controls position="0, 2, 8"></a-entity>
9 <a-assets>
10 <a-mixin id="vertices" geometry="radius:0.2;"></a-mixin>
11 <a-mixin id="arestas" geometry="radius:0.05; height:3"></a-mixin>
12 <a-mixin id="mt11" material="color:#86B404;"></a-mixin>
13 <a-mixin id="mt12" material="color:#F79F81;"></a-mixin>
14 </a-assets>
15 <a-entity position="0,-4.243,0">
16 <a-entity id="modulo">
17 <a-entity rotation="0,0,90">
18 <a-cylinder mixin="arestas mt11" position="0,0,1.5"></a-cylinder>
19 <a-sphere mixin="vertices mt12" position="0,-1.5,1.5"></a-sphere>
20 </a-entity>
21 <a-entity rotation="0,90,90">
22 <a-cylinder mixin="arestas mt11" position="0,0,1.5"></a-cylinder>
23 <a-sphere mixin="vertices mt12" position="0,-1.5,1.5"></a-sphere>
24 </a-entity>
25 <a-entity rotation="0,180,90">
26 <a-cylinder mixin="arestas mt11" position="0,0,1.5"></a-cylinder>
27 <a-sphere mixin="vertices mt12" position="0,-1.5,1.5"></a-sphere>
28 </a-entity>
29 <a-entity rotation="0,270,90">
30 <a-cylinder mixin="arestas mt11" position="0,0,1.5"></a-cylinder>
31 <a-sphere mixin="vertices mt12" position="0,-1.5,1.5"></a-sphere>
32 </a-entity>
33 <a-entity position="0,4.243,0">
34 <a-entity rotation="125.16,0,0"><a-entity>
35 <a-entity position="0,3.674,0"></a-entity>
36 <a-entity rotation="0,60,90">
37 <a-cylinder mixin="arestas mt11" position="0 0 2.598"></a-cylinder>
38 <a-sphere mixin="vertices mt12" position="0 -1.5 2.598"></a-sphere>
39 </a-entity>
40 <tags das outras arestas do hexagono>
41 </a-entity>
42 </a-entity>
43 </a-entity>
44 <tags das outras faces do poliedro>
45 </a-entity>
46 <tags da parte superior do poliedro>
47 </a-entity>
48 </a-scene>
49 </body>
50 </html>

```

Figura 7. Tags da página de RV em A-frame para a modelagem do Octaedro truncado.

Fonte: Autores.

As *tags* que definem as cores, raio das esferas que representam os vértices ($r_e = 0,2$), além do raio ($r_c = 0,05$) e da altura ($a = 3$) dos cilindros que representam as arestas do poliedro estão colocadas entre as linhas 9 e 14 da Figura 7. O código utiliza a função *a-mixin* para acelerar o carregamento da página, pois cada propriedade é definida apenas uma vez e usada no restante da página com sua respectiva referência através dos identificadores (id).

O conjunto de *tags* entre as linhas 15 e 47 representa a construção de parte do octaedro truncado mostrado na seção 2. A *tag* da linha 15 faz a translação do poliedro com a distância do centro da esfera circunscrita ao centro do quadrado ($dq = 4,243$). As *tags* entre as linhas 17 e 20 mostram a construção de uma aresta do quadrado, com a translação igual ao apótema ($ap' = 1,5$). Entre as linhas 21 e 32 estão as rotações para construir as outras arestas do quadrado.

Nas linhas 33, 34 e 35 estão os comandos para fazer uma translação até o centro da esfera com distância dq (distância do centro do quadrado), a construção do ângulo diédrico $\alpha = 125,16^\circ$ e a translação com distância $dh = 3,674$ para posicionar o hexágono. Estes três comandos são necessários para não perder a referência de hierarquia da página HTML. Dentro desta *tag* podem ser feitas todas as construções dos hexágonos adjacentes ao primeiro quadrado construído. Vale ressaltar que as aproximações feitas com 3 casas decimais nas medidas de distâncias e apótemas indicadas não acarretaram imprecisões nas construções dos poliedros.

Entre as linhas 36 e 39 estão as *tags* para a construção de uma aresta do hexágono. Nestas *tags* são feitas a rotação de 60° em relação ao eixo OO' e a translação com distância igual ao apótema do hexágono $ap'' = 2,598$. As outras arestas podem ser construídas com *tags* similares de rotações de 120° , 180° , 240° e 300° a partir da linha 40 do código mostrado na Figura 7.

As *tags* das outras faces podem ser inseridas a partir da linha 44, e a repetição para a parte superior do poliedro pode ser definida a partir da linha 46 com as construções mencionadas na seção 2.

Uma forma de interação com os elementos programados na cena utiliza a função de órbita (NGO, 2019), que permite a movimentação da câmera em torno dos objetos da cena. Ao usar os óculos de RV, a movimentação da câmera com a função de órbita é automática. Nos computadores, tablets e smartphones, a movimentação da câmera em torno dos objetos pode ser feita através do mouse, teclado ou *touch*.

4 Realidade Aumentada

Os elementos modelados em Realidade Virtual podem ser misturados com objetos físicos mostrados através da câmera de um dispositivo através da programação em Realidade Aumentada. As mesmas *tags* estruturais mostradas na Seção 3 em RV podem ser usadas na programação de uma página em RA, com a inclusão da *tag* de referência para a visualização em RA, desenvolvida por Etienne (2019), que deve ser inserida no cabeçalho da página junto com a *tag* referencial do A-frame.

As *tags* de dois poliedros de Arquimedes estão ilustradas na Figura 8. A *tag* da cena em RA tem a inclusão de propriedades de incorporação da imagem da webcam e captura de interação com mouse ou raios de controles em objetos com links (linhas 7 e 8). A cena em RA tem marcadores, que funcionam com códigos de bits 0 e 1 em forma matricial de imagens que são reconhecidas através da webcam (ISHII, 2010). Estes marcadores funcionam como

pontos de referência, onde podem ser estabelecidas posições específicas para que os objetos virtuais apareçam na imagem real da webcam.

```

1 <head>
2 <script src="https://aframe.io/releases/0.8.2/aframe.min.js"></script>
3 <script src="https://jeromeetienne.github.io/AR.js/aframe/build/
4   aframe-ar.min.js"></script>
5 </head>
6 <body>
7 <a-scene embedded cursor="rayOrigin:mouse" raycaster="objects:[link];"
8   arjs='sourceType:webcam; detectionMode:mono_and_matrix; matrixCodeType:3x3;'>
9 <a-marker preset="hiro">
10 <a-link href="octat.html" title="VR"></a-link>
11 <a-entity position="1.5 0.8 0" scale="0.25 0.25 0.25">
12 <tags do octaedro truncado>
13 </a-entity>
14 </a-marker>
15 <a-marker preset="kanji">
16 <a-link href="icosi.html" title="VR"></a-link>
17 <a-entity position="1.5 0.8 0" scale="0.15 0.15 0.15">
18 <tags do icosidodecaedro>
19 </a-entity>
20 </a-marker>

```

Figura 8. Tags da página de RA em A-frame para a modelagem de poliedros de Arquimedes.
Fonte: Autores.

Quando a imagem de um marcador for reconhecida na cena de RA, os elementos modelados em RV são ativados. Existem mais de 80 opções de marcadores programados na biblioteca desenvolvida por Etienne (2019), que são representados por tags que englobam os elementos programados em RV que são ativados. Os marcadores mais comuns são hiro, kanji e os barcodes, ilustrados na Figura 9.



Figura 9. Marcadores usados no A-frame: hiro, kanji e barcode #20.
Fonte: Autores.

Os alunos podem acessar de seus dispositivos a página web, visualizam os marcadores programados impressos e os respectivos objetos programados em RV aparecem nas telas dos dispositivos em RA. O marcador hiro foi usado para a visualização em RA do octaedro truncado. A estrutura de suas tags está entre as linhas 9 e 14 da Figura 8. Nestas tags, a-entity serve para agrupar os elementos do poliedro, posicioná-lo sobre o marcador e usar escalas. A tag link (linha 10) cria a interação para acesso das páginas programadas em RV através de círculos azuis que aparecem sobre os marcadores. O marcador kanji foi usado para mostrar o icosaedro truncado em RA, com as tags entre as linhas 15 e 20 da Figura 8. A Figura 10 mostra os dois poliedros de Arquimedes em RA.

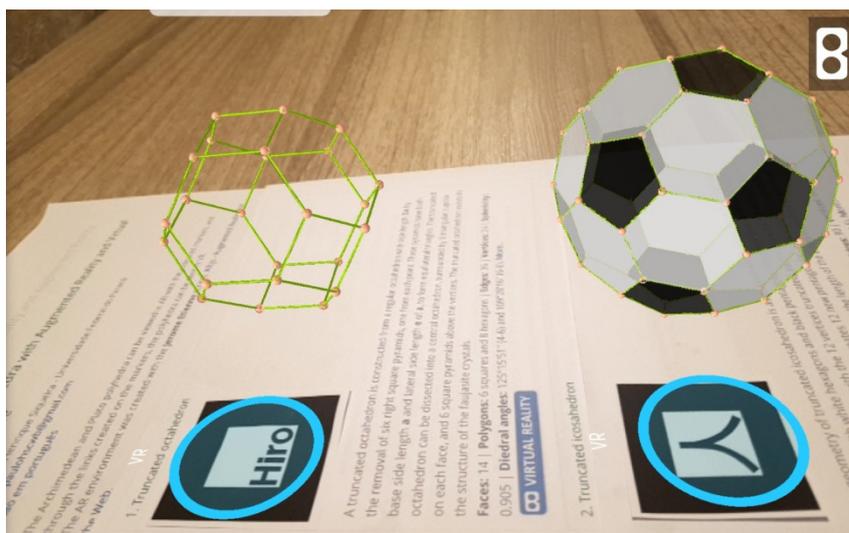


Figura 10. Visualização do octaedro truncado e do icosaedro truncado em RA com A-frame.

Fonte: Autor.

A página desenvolvida em RA possui todos os links para visualizações dos sólidos em RV mostrados neste trabalho e encontra-se disponível em: <https://paulohscwb.github.io/polyhedra/>

5 Conclusões

Este trabalho mostra um sistema baseado em web para visualização de poliedros de Arquimedes em Realidade Virtual e Realidade Aumentada. Através da visualização de marcadores impressos, os alunos podem visualizar os sólidos em RA em qualquer dispositivo com webcam e acesso à internet, com links para as visualizações em RV.

A metodologia usada neste trabalho propõe o uso de simetrias, translações e rotações para o posicionamento correto de cada face dos poliedros. Desta forma, a renderização de cada poliedro é otimizada ao usar as hierarquias da programação da página web, facilitando a programação de vários poliedros em uma mesma página. O resultado mostra que se trata de uma ferramenta útil para uso em sala de aula, pois permite que os alunos visualizem e manipulem as representações gráficas dos poliedros em seus dispositivos ou que usem os óculos de Realidade Virtual para imersão completa na cena.

O ambiente programado pode ser explorado em aulas de Geometria, auxiliando na compreensão dos elementos dos poliedros ou em tópicos como cálculos de áreas e volumes, relação de Euler, seções planas ou simplesmente na visualização de cada sólido modelado. Os poliedros de Platão e os poliedros duais também podem ser explorados em um ambiente similar ao proposto neste trabalho.

Todos os elementos dos poliedros podem ser visualizados em RA e RV e os alunos podem movimentar a câmera da cena para encontrarem os melhores pontos de vista dos sólidos em RV com ferramentas desenvolvidas para o A-frame para orbitar a câmera em torno dos objetos.

As ferramentas de programação de páginas de web mostradas neste trabalho são simples e intuitivas, e podem ser usadas em salas de aula com materiais impressos. Os alunos acessam o site programado em RA, visualizam os sólidos com seus respectivos marcadores impressos e podem interagir com os poliedros programados em RV. Desta forma, os alunos podem explorar os conceitos geométricos envolvidos de forma mais eficiente e dinâmica.

Algumas vantagens da criação de ambientes de RA e RV como páginas da web para uso em sala de aula são a praticidade, baixo custo, ótimo desempenho, a simplicidade de programação e o funcionamento em todos os tipos de smartphones e tablets. Outra vantagem desta ferramenta é o carregamento quase que imediato do site, pois é construído em HTML com referências de bibliotecas de RV desenvolvidas em Java. Os alunos não precisam fazer download de aplicativos e diversos marcadores podem ser usados em uma mesma página de HTML, que permitem a criação de materiais didáticos com diversos temas programados em RA e RV. Esta ferramenta pode ser usada em outras disciplinas, tais como Cálculo Diferencial e Integral, Estatística, Biologia, Química, Física, Engenharia e outras áreas que utilizam representações gráficas em 3D.

Referências

ABDULLAH, F., KASSIM, M. H. B., SANUSI, A. N. Z. **Go virtual: exploring augmented reality application in representation of steel architectural construction for the enhancement of architecture education.** Advanced Science Letters, v. 23, n. 2, p. 804-808, fev. 2017.

A-FRAME. **A-frame documentation of Virtual Reality.** Disponível em: <<https://aframe.io/docs/0.8.0/introduction>>. Acesso em: 20 fev. 2019.

ANDRADE, C. B., SANTOS, J. C. B., MOURA, V. C. S. **Comparação entre os métodos de ensino aprendizagem, com e sem a utilização de materiais manipuláveis.** Revista Científica Docum: Educação, v. 1, n. 2, p. 1-15, 2017.

ATTARDI, S. M., ROGERS, K. A. **Design and implementation of an online systemic human anatomy course with laboratory.** Anatomical sciences education, v. 8, n. 1, p. 53-62, jun. 2014.

BASNIAK, M. I., LIZIERO, A. R. **A impressora 3D e novas perspectivas para o ensino: possibilidades permeadas pelo uso de materiais concretos.** Revista Observatório, v. 3., n. 4, p. 445-466, jul. 2017.

CANTOS, L. A., IZQUIERDO, J. L., CANTOS, E. C. **Interactive multimedia application for teaching and learning in Analytical Geometry.** IEEE Latin America Transactions, v. 14, n. 7, p. 3461-3466, out. 2016.

CASAS, L., ESTOP, E. **Virtual and printed 3D models for teaching crystal symmetry and point groups.** Journal of Chemical Education, v. 92, n. 8, p. 1338-1343, 2015.

CERRA, P. P. et al. **Combining multimedia and self-assessment CAD tools in an interactive web environment to learn engineering drawing.** Interactive Learning Environments, v. 27, n. 2, p. 1-14, set. 2018.

CHEN, P. et al. **A review of using Augmented Reality in Education from 2011 to 2016.** In: POPESCU, E. et al. (Org.). Innovations in Smart Learning, Lecture Notes in Educational Technology. Singapore: Springer-Verlag, 2017, p. 13-18.

COXETER, H. S. M. **Regular Polytopes**, New York: Dover, 1973.

ETIENNE, J. **Efficient Augmented Reality for the Web.** Disponível em: <<https://github.com/jeromeetienne/AR.js>>. Acesso em 20 fev. 2019.

GONZÁLEZ, N. A. A. **Development of spatial skills with virtual reality and augmented reality.** International Journal on Interactive Design and Manufacturing, v. 12, n. 1, p. 133-144, mar. 2017.

HULEIHIL, M. **3D printing technology as innovative tool for math and geometry teaching applications.** IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, v. 164, n. 1, p. 1-7, 2017.

ISHII, H. **Augmented Reality: Fundamentals and Nuclear Related Applications.** International Journal of Nuclear Safety and simulation, v. 1, n. 1, dez. 2010.

KAMPHUIS, C. et al. **Augmented reality in medical education.** Perspectives on Medical Education, v. 3, n. 4, p. 300-311, jan. 2014.

KIRNER, C., KIRNER, T. G. **Development of an interactive artifact for cognitive rehabilitation based on augmented reality.** In: International Conference on Virtual Rehabilitation, 2011, Zurich: IEEE, p. 1-7.

McMENAMIN, P. G. et al. **The production of anatomical teaching resources using three-dimensional (3D) printing technology.** Anatomical sciences education, v. 7, n. 6, p. 479-486, jun. 2014.

MORO, C. et al. **The effectiveness of virtual and augmented reality in health sciences and medical anatomy.** Anatomical sciences education, v. 10, n. 6, p. 549-559, abr. 2017.

MUNOZ-CRISTÓBAL, J. A. et al. **Game of Blazons: Helping Teachers Conduct Learning Situations That Integrate Web Tools and Multiple Types of Augmented Reality.** IEEE Transactions on learning technologies, v. 11, n. 4, p. 506-519, out. 2018.

NGO, K. **Orbit controls for A-Frame.** Disponível em: <<https://github.com/supermedium/superframe/tree/master/components/orbit-controls>>. Acesso em: 20 fev. 2019.

OLIVEIRA, J. R. **Visualização de conteúdos multimídia num ambiente de realidade virtual.** 2018. 80 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, 2018.

WEISSTEIN, E. W. **Archimedean Solid. MathWorld--A Wolfram Web Resource.** Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html>>. Acesso em 20 fev. 2019.