



PREVISÕES PARA A SÉRIE TEMPORAL WOLF'S SUNSPOT VIA MÉTODO WAVELET-NEURAL

LEVI LOPES TEIXEIRA - prof.levilopes@gmail.com
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR

PAULO HENRIQUE SIQUEIRA - paulohs@ufpr.br
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR

LUIZ ALBINO TEIXEIRA JÚNIOR - luiz.junior@unila.edu.br
UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO AMERICA

SAMUEL BELLIDO RODRIGUES - samuelbellido@hotmail.com
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR-MEDIANEIRA

Área: 6 - PESQUISA OPERACIONAL
Sub-Área: 6.3 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Resumo: NESTE ARTIGO É PROPOSTO UM MÉTODO PARA MODELAGEM DE SÉRIES TEMPORAIS QUE COMBINA ENCOLHIMENTO E DECOMPOSIÇÃO WAVELET NO PRÉ-PROCESSAMENTO DOS DADOS E REDES NEURAS ARTIFICIAIS (RNA) PARA A GERAÇÃO DE PREVISÕES PONTUAIS. A FIM DE SE AVERIGUAR A EFICIÊNCIA DO MÉTODO PREDITIVO PROPOSTO FOI REALIZADA A PREVISÃO DE UMA SÉRIE TEMPORAL (WOLF'S SUNSPOT) JÁ MODELADA POR OUTROS AUTORES, POSSIBILITANDO A COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS. OS ERROS ORIUNDOS DAS PREVISÕES DA SÉRIE DE TEMPO WOLF'S SUNSPOT POR MEIO DO MÉTODO PROPOSTO SÃO INFERIORES AOS OBTIDOS NA PREVISÃO DA MESMA SÉRIE EM OUTROS TRABALHOS ENCONTRADOS NA LITERATURA.

Palavras-chaves: WAVELET; REDES NEURAS ARTIFICIAIS; SÉRIES TEMPORAIS.

FORECASTS FOR WOLF'S SUNSPOT TIME SERIES VIA METHOD WAVELET-NEURAL

Abstract: *THIS PAPER PROPOSES A METHOD FOR MODELING TIME SERIES THAT COMBINES WAVELET SHRINKAGE AND DECOMPOSITION IN THE PREPROCESSING OF DATA AND ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS (ANN) FOR THE GENERATION OF POINT FORECASTS. IN ORDER TO ASCERTAIN THE EFFICIENCY OF THE PROPOSED METHOD WAS CARRIED OUT PREDICTIVE FORECAST OF TIME SERIES (WOLF'S SUNSPOT) ALREADY SHAPED BY OTHER AUTHORS, ALLOWING COMPARISON OF RESULTS. THE ERRORS ARISING FROM THE FORECASTS OF THE WOLF'S SUNSPOT TIME SERIES BY THE PROPOSED METHOD ARE LOWER THAN THOSE OBTAINED IN THE PREDICTING OF THE SAME SERIES IN OTHER STUDIES IN THE LITERATURE.*

Keyword: *WAVELET; ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS; TIME SERIES.*

1. Introdução

As manchas solares são geradas por fortes campos magnéticos criados no interior do sol e são de interesse de climatologistas e geofísicos (ECHER, *et al.* 2003; ZHANG, 2003). Em 1854, Rudolf Wolf desenvolveu um método para quantificar o número de manchas solares e construiu uma série de médias anuais (*Wolf's Sunspot*), com início no ano de 1700. Esta série temporal de dados é considerada não linear e não-Gaussiana e muitas vezes utilizada para avaliar a eficácia de modelos não lineares (ZHANG, 2003). Revisando 24 anos (1982-2005) de pesquisa sobre previsão de séries temporais, Gooijer e Hyndman (2006) concluíram que importantes progressos foram feitos nesta área e salientam que encontraram numerosos estudos que atestam o sucesso das redes neurais artificiais (RNA) na previsão de séries temporais. Podendo ser utilizadas tanto na abordagem linear como na não linear. Uma breve inspeção na literatura especializada detecta o uso rotineiro das RNA como método base de previsão, tais como: Wang *et al.* (2006); Valenzuela *et al.* (2008); Teixeira Jr (2013), entre outros. Da Análise *Wavelet*, advém importantes métodos auxiliares de pré-processamento (decomposição, filtragem ou alisamento) de uma série de tempo, antes de sua efetiva modelagem com um método preditivo base plausível, de forma a gerar um novo método para se prever séries temporais (AQUINO *et al.* 2009). Desde que sejam utilizados de forma adequada com os métodos de previsão, é possível se obter ganhos preditivos relevantes. Pode-se verificar este fato, dentre muitas outras referências, em: Donoho & Jonhstone (1994); Donoho *et al.* (1995); Karthikeyan e Kumar (2013); Kisi e Cimen (2011). Teixeira Jr *et al.* (2012), apresentaram um método em que as componentes *wavelets* de uma série temporal constituem os padrões de entrada de uma RNA *feedforward* MLP, cuja saída fornece a previsão da série temporal. Com esta metodologia, chegaram a resultados melhores aos obtidos por RNA convencional (sem considerar componentes *wavelet* como padrões de entrada).

Modelos matemáticos e o avanço das tecnologias da informação estão propiciando cada vez mais o uso de previsões, sendo utilizadas por profissionais das engenharias, ciências e negócios. Tomadores de decisão empregam previsões em análises e planejamento de necessidades operacionais futuras em áreas diversas, tais como: precipitação atmosférica, índices da bolsa de valores, planejamento energético, entre outras. Wang *et al.* (2006) utilizaram redes neurais artificiais para fazer a previsão de vazões na cabeceira do rio Amarelo na China. Maceira *et al.* (1999) fizeram previsões de vazões em usinas hidrelétricas do Brasil através de modelos ARMA. Lima (2011) utilizou filtros de Kalman, wavelet e redes

neurais para a previsão de séries temporais financeiras. Yoon *et al.* (2011) fizeram um estudo comparativo de redes neurais artificiais e máquinas de vetores de suporte para a previsão de níveis de águas subterrâneas em um aquífero costeiro. Martins e Werner (2014) trabalharam com previsão de séries industriais a partir da combinação de previsões obtidas através de modelos ARIMA e redes neurais artificiais (RNA). Teixeira *et al.* (2012) combinaram RNA e decomposição *wavelet* na previsão de radiação solar direta. Diante do exposto, percebe-se uma grande diversidade de métodos e aplicações das séries temporais. Sendo a melhoria da acurácia das previsões o cerne dos estudos encontrados nesta área. A presente pesquisa está inserida neste contexto e se propõe em apresentar um método de previsão para séries temporais envolvendo *wavelet* na filtragem das séries e na decomposição ortogonal do resultado da filtragem e modelagem por redes neurais artificiais. O método proposto possui as seguintes etapas: (i) Alisamento da série temporal por encolhimento *wavelet* (EW), obtendo-se uma série temporal menos ruidosa (Tendência) e outra constituída pelos resíduos *wavelet*. A soma dessas duas séries temporais é igual à observada; (ii) Decomposição ortogonal (usando *wavelet*) das séries temporais Tendência e resíduos *wavelet*. Da decomposição *wavelet* (DW) resultam componentes de detalhes e aproximação, que são agrupadas em duas séries denominadas por X e Z; (iii) Modelagem das séries temporais X e Z por RNAs. As previsões pontuais da série temporal observada resultam da soma das previsões das séries X e Z.

2. Materiais e Métodos

Na presente seção é apresentada a série temporal *Wolf's Sunspot* e o método empregado nas previsões desta série.

2.1 Materiais

A série temporal *Wolf's Sunspot* apresenta um padrão cíclico com ciclo médio de cerca de onze anos. Na Figura 1, é representado gráfico da *Wolf's Sunspot*, com 288 observações, para os anos de 1700 até 1987.

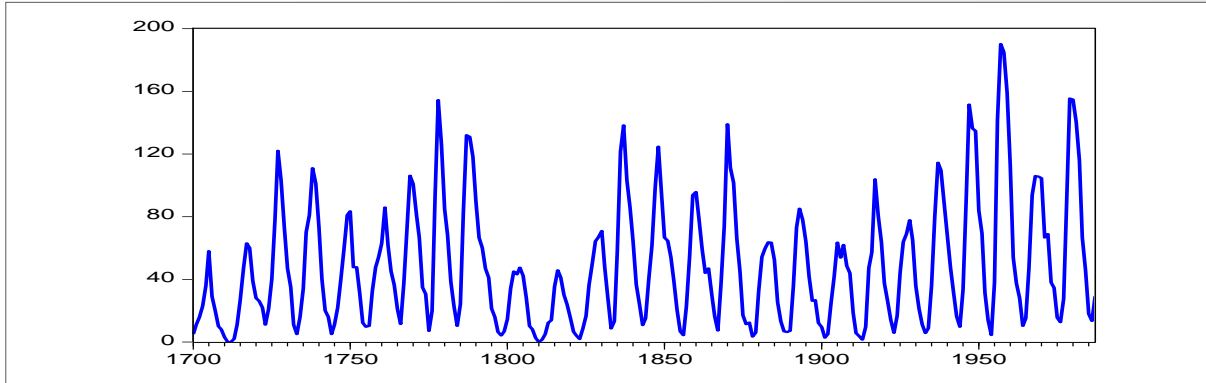


FIGURA 1 - Gráfico da série temporal *Wolf's Sunspot* no período 1700-1987.

2.2 Método Proposto

Nas seções 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 são descritas as etapas do método proposto.

2.2.1 Análise Wavelet

De acordo com Kubrusly e Levan (2006) e Mallat (2009), tem-se que a decomposição *wavelet* (DW) de uma série temporal $f(\cdot)$ é dada, genericamente, em (1).

$$f(\cdot) = f_{A_{m_0}}(\cdot) + \sum_{m=m_0}^{\infty} f_{D_m}(\cdot), \quad (1)$$

onde: $f_{A_{m_0}}(\cdot) = \sum_{n \in Z} a_{m_0,n} \phi_{m_0,n}(\cdot)$ é a componente de aproximação de nível m_0 de $f(\cdot)$;

$f_{D_m}(\cdot) = \sum_{n \in Z} d_{m,n} \omega_{m,n}(\cdot)$ é a componente de detalhe de nível m de $f(\cdot)$; $d_{m,n}$ e $a_{m_0,n}$ são,

respectivamente, os coeficientes de detalhe e de aproximação e são calculados, ainda nesta ordem, a partir do produto interno usual entre $f(\cdot)$ e a função *wavelet* $\omega_{m,n}(\cdot)$ (isto é,

$$d_{m,n} = \sum_{t=1}^T f(t) \omega_{m,n}(t) \text{ e entre } f(\cdot) \text{ e a função escala } \phi_{m_0,n}(\cdot) \text{ (isto é, } a_{m_0,n} = \sum_{t=1}^T f(t) \phi_{m_0,n}(t)),$$

para todo $m_0, m, n \in Z$, onde Z é o conjunto dos números inteiros. São várias as famílias de funções *wavelet* existentes na literatura, tais como: as famílias daubechies (db), coiflets (coif) e symlets (sym), desenvolvidas por Ingrid Daubechies (DAUBECHIES, 1992).

No caso da série temporal ser fortemente ruidosa, recomenda-se a sua filtragem para então modelá-la. O princípio do encolhimento *wavelet* tem como objetivo a redução (ou mesmo remoção) do ruído presente num sinal, diminuindo (ou zerando) a magnitude dos coeficientes *wavelet* (MORETTIN, 1999). Outras referências nesta área são os trabalhos de Donoho e Johnstone (1994) e Donoho *et al.*, (1995).

As três etapas do encolhimento *wavelet* são: 1) decomposição *wavelet* do sinal ruidoso; 2) selecionar limiares (*thresholds*) que eliminam (ou reduzem) os ruídos; 3) aplicar a

transformada *wavelet* inversa a fim de se obter o sinal menos ruidoso. Das várias regras de limiarização encontradas na literatura, talvez as mais tradicionais sejam: o limiar duro (*hard threshold*) e limiar suave (*soft threshold*). Em ambas as regras, eliminam-se os coeficientes de detalhes ($d_{m,n}$) que em módulo são menores ou iguais a um limiar λ . Na regra limiar duro $d_{m,n}$ é mantido sempre que $|d_{m,n}| > \lambda$ e atenuado por $|d_{m,n}| - \lambda$ na regra limiar suave. Neste trabalho o cálculo do limiar λ foi realizado a partir de duas propostas: universal e SURE (*Estimation Stein's Unbiased Risk Estimate*). Maiores detalhes dessas técnicas podem ser encontradas em Donoho e Johnstone (1993), Johnstone e Silverman (1996) e Morettin (1999).

A série temporal $\{y_t\}_{t=1}^T$ foi submetida ao encolhimento *wavelet*, dando origem a uma série temporal de tendência $\{y_{t,EW}\}_{t=1}^T$ e uma componente total de resíduo

$\{y_{t,R}\}_{t=1}^T = \{y_t\}_{t=1}^T - \{y_{t,EW}\}_{t=1}^T$. Resultados empíricos obtidos com o emprego das bases

daubechies, symlet e coiflet no encolhimento *wavelet*, mostraram que as bases com menores níveis de decomposição e ordens, eram mais indicadas na busca pela acurácia das previsões da série temporal estudada. Desta forma, a busca pela base *wavelet* a ser usada no EW ficou restrita às ordens $N=1,2,\dots,10$ e níveis de decomposição $p = 1,\dots,4$.

Os testes de autocorrelação residual, independência estatística BDS e de estacionariedade *Dickey-Fuller* foram aplicados à componente $y_{t,R}$ a fim de se obter indicação que a mesma não pode ser classificada estatisticamente como ruído branco, de forma que os resíduos devem possuir estruturas de autodependência linear e/ou não linear que podem ser modeladas. Neste caso, a previsão da série observada resultará da soma das previsões dos resíduos e tendência ($\hat{y}_t = \hat{y}_{t,EW} + \hat{y}_{t,R}$).

2.2.2 Decomposição *Wavelet*: Tendência e Resíduos

As bases *wavelet* da família daubechies são largamente aplicadas no estudo de séries temporais, pois apresentam alta capacidade de análise e síntese. Devido à regularidade destas bases, aproximam eficazmente funções suaves do espaço L^2 . Então, para a série de manchas solares, escolheu-se para a decomposição ortogonal *wavelet* das séries de tendência e resíduos as bases daubechies (db N) e symlet (sym N), em nível p , com o valor de N definido a partir do erro quadrático médio entre as séries decompostas e as respectivas somas das $p + 1$ componentes *wavelet* (TEIXEIRA Jr, 2013)

Considerando-se a série temporal $\{y_{t,EW}\}_{t=1}^T$ obtida na seção 2.2.1, calcula-se a sua média (μ) e obtém-se a série temporal centrada em zero por meio da diferença: $\{Y_{t,EW}\}_{t=1}^T = \{y_{t,EW}\}_{t=1}^T - \mu$. Em seguida, faz-se decomposição *wavelet* (DW) de nível p de $\{Y_{t,EW}\}_{t=1}^T$. Os coeficientes $d_{m,n}$, nos primeiros níveis de resolução representam a escala fina (detalhe dos dados), enquanto os coeficientes $d_{m,n}$ nos últimos níveis de resolução, juntamente com os coeficientes $a_{m_0,n}$ representam a escala mais grossa (parte suave dos dados) (MORETTIN, 1999). Assim, podem-se determinar séries temporais X e Z a partir dos coeficientes da escala grossa e fina, respectivamente. Ariño (1995) decompôs via *wavelet*, em nível $p = 7$, uma série econômica e agrupou as componentes *wavelet* obtidas em dois conjuntos de dados, onde cada um deles refletia a série observada em diferentes frequências.

A fim de se determinar os níveis de resolução que comporão X e Z , calcula-se a energia $E(m) = \sum_{n=0}^{2^m-1} d_{m,n}^2$, $m = 0, 1, \dots, Q - 1$, dos coeficientes *wavelet* de detalhes ($d_{m,n}$). Sejam π e Π níveis de resolução das componentes de altas e baixas frequências, respectivamente, onde ocorrem picos de energia para os coeficientes $d_{m,n}$, então, o nível π e os que se encontram em seu entorno formam a série temporal Z , enquanto o restante juntamente com a componente de aproximação formarão X . Não tendo dois picos bem definidos, pode-se optar pelo nível de resolução médio ou algum valor próximo a ele, mediante análise dos gráficos das componentes *wavelet* e escalograma (gráfico com a energia dos coeficientes *wavelet* em cada um dos níveis de resolução).

Decompondo $\{Y_{t,EW}\}_{t=1}^T$ em nível p e definido o valor de π , tem-se $\{Z_{t,EW}\}_{t=1}^T = D_1 + \dots + D_k + \dots + D_\pi$ e $\{X_{t,EW}\}_{t=1}^T = D_{\pi+1} + \dots + D_p + A_p + \mu$, onde D_k é a componente *wavelet* de detalhes no nível k e A_p a componente de aproximação no nível p . As séries $\{X_{t,EW}\}_{t=1}^T$ e $\{Z_{t,EW}\}_{t=1}^T$ ($\{y_{t,EW}\}_{t=1}^T = \{X_{t,EW}\}_{t=1}^T + \{Z_{t,EW}\}_{t=1}^T$) são divididas em amostras de treino e validação e submetidas à RNA a fim de se obter a previsão um passo a frente $\hat{y}_{T+1,EW}$, que resulta da soma $\hat{y}_{T+1,EW} = \hat{X}_{T+1,EW} + \hat{Z}_{T+1,EW}$.

A série de resíduos $\{y_{t,R}\}_{t=1}^T$ (seção 2.2.1) é submetida à decomposição *wavelet* em nível p , obtendo-se π e consequentemente $\{X_{t,R}\}_{t=1}^T$ e $\{Z_{t,R}\}_{t=1}^T$ de forma análoga à descrita para as séries $\{Z_{t,EW}\}_{t=1}^T$ e $\{X_{t,EW}\}_{t=1}^T$. As previsões de $X_{t,R}$ e $Z_{t,R}$ são usadas no cálculo de $\hat{y}_{T+1,R}$ ($\hat{y}_{T+1,R} = \hat{X}_{T+1,R} + \hat{Z}_{T+1,R}$). Desta forma, chega-se à previsão da série analisada no instante $T + 1$, dada por $\hat{y}_{T+1} = \hat{y}_{T+1,EW} + \hat{y}_{T+1,R}$.

2.2.3 Previsões Pontuais

Para a modelagem das componentes *wavelet* foi utilizada redes neurais artificiais *multilayer feedforward* com uma camada escondida e um neurônio na camada de saída.

Uma vez obtidas as séries temporais X e Z , conforme descrito na seção 2.2.2, num total de quatro séries $(\{X_{t,EW}\}_{t=1}^T, \{Z_{t,EW}\}_{t=1}^T, \{X_{t,R}\}_{t=1}^T$ e $\{Z_{t,R}\}_{t=1}^T)$, estas são modeladas via quatro RNA. Para o treinamento da rede foi utilizado o aplicativo computacional Matlab (8.0), com dez simulações para cada combinação entre janela de entrada de dados ($J=8, \dots, 14$) e número de neurônios na camada escondida ($CE=6, \dots, 12$).

Da modelagem por RNA resultam as previsões das séries tendência e resíduos, representadas por $\hat{y}_{t,EW} = \hat{X}_{t,EW} + \hat{Z}_{t,EW}$ e $\hat{y}_{t,R} = \hat{X}_{t,R} + \hat{Z}_{t,R}$, respectivamente.

Como estatísticas de aderência, foram utilizados o MSE (*mean square error*) e o MAE (*mean absolute error*), definidos, respectivamente, abaixo, em (2).

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2 \quad e \quad MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |y_t - \hat{y}_t|. \quad (2)$$

A fim de se fazer comparações com outros trabalhos publicados na literatura, a série temporal *Wolf's sunspot* foi dividida em três amostras: treino, validação e testes, constituídas por 173, 48 e 67 observações, respectivamente. Em consonância com esses trabalhos, realizou-se previsões um passo à frente.

A título de ilustração a Figura 2 traz as etapas do método proposto para a realização das previsões pontuais da série observada.

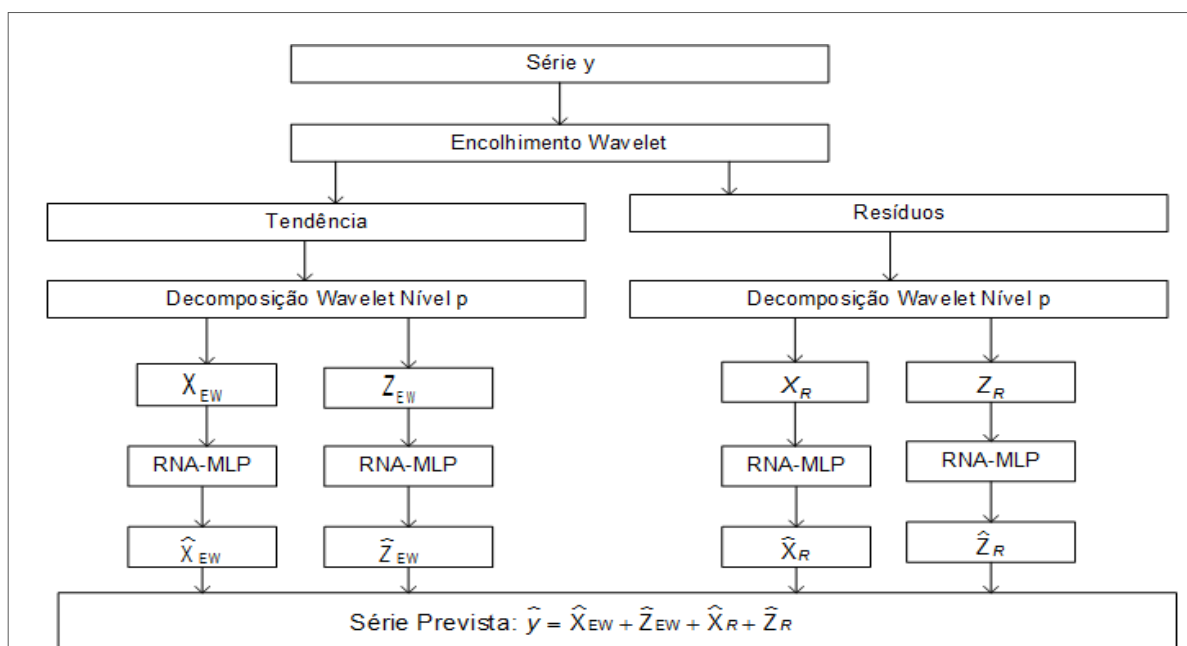


FIGURA 2 - Fluxograma com etapas do método proposto: previsões pontuais.
 Fonte: O autor, 2015.

3. Resultados Obtidos

A Tabela 1 traz os quatro melhores resultados na modelagem da *Wolf's Sunspot* pelo método proposto.

TABELA 1 - MAPE e MAE para modelagens oriundas de encolhimentos *wavelet* distintos da

Modelagem	Base	Nível de decomposição	Limiar	Regra de limiarização	MSE	MAE
1	db 2	3	universal	Suave	243,51	11,68
2	sym 7	2	SURE	Duro	226,79	10,86
3	db 1	3	universal	Duro	251,43	11,95
4	db 10	2	universal	Suave	212,62	10,03

Fonte: O autor (2015).

As próximas análises são referentes à modelagem 4 da Tabela 1, pois foi a que apresentou o melhor resultado. Realizado o EW a partir da base db 10 (Tabela 1), a próxima etapa é DW e formação das séries X e Z . Na Figura 3 estão representadas as séries temporais X e Z que resultaram da decomposição ortogonal *wavelet* da série temporal de tendência, com utilização de base *wavelet* da família symlet, mais especificamente a sym10 em nível $p=9$ e $\pi=3$ (nível para construção de X e Z). As mesmas configurações foram usadas na decomposição *wavelet* da série temporal de resíduos.

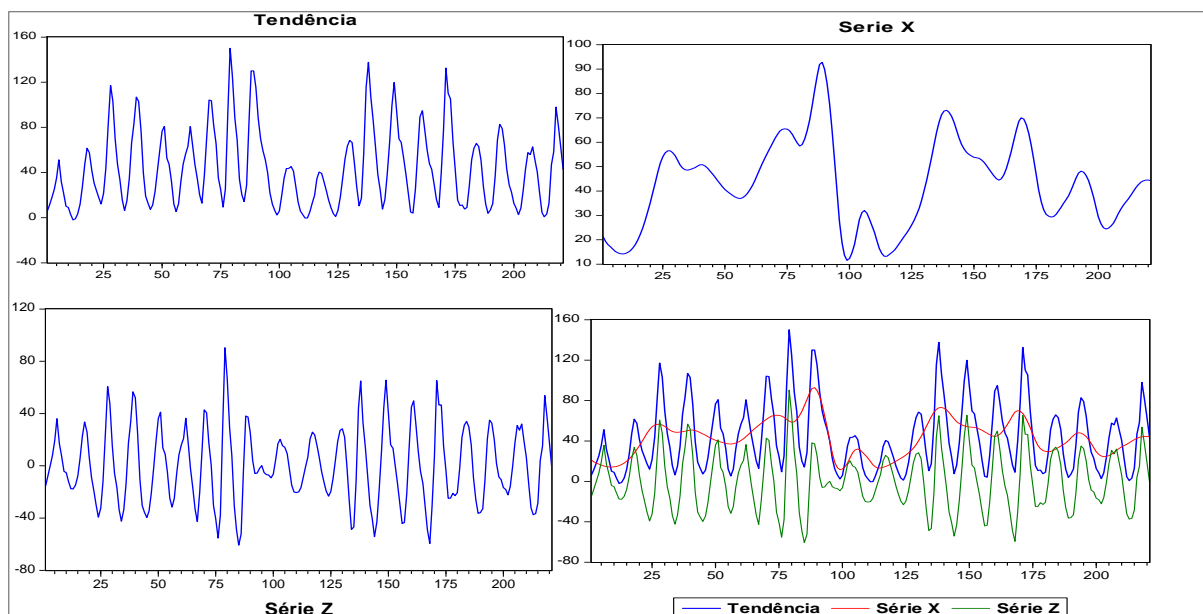


FIGURA 3 - Gráficos das séries: tendência, X e Z - *Wolf's Sunspot*.
 Fonte: O autor (2015).

Tendo as séries X e Z , realizou-se, conforme descrito na seção 2.2, a previsão da série temporal *Wolf's Sunspot*. Na Figura 4 estão representados os gráficos da *Wolf's Sunspot* e de suas respectivas previsões oriundas do método proposto.

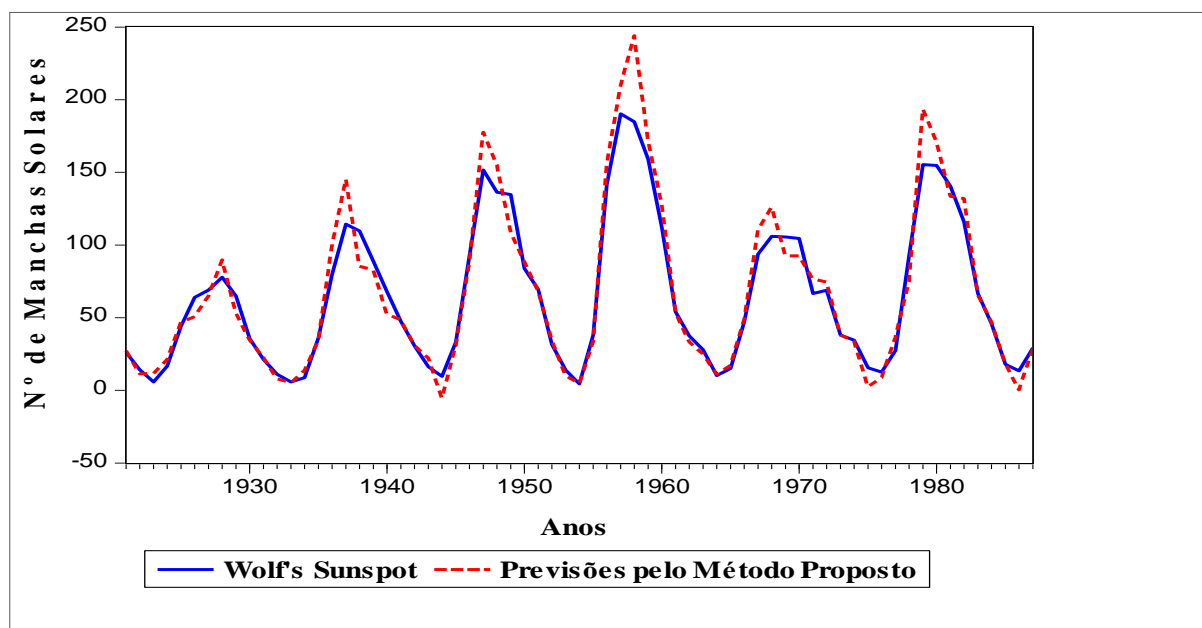


FIGURA 4 - Gráficos das séries *Wolf's Sunspot* e previsões pelo método proposto – amostra de teste.

Na Tabela 2 podem ser observados os resultados de previsões da *Wolf's Sunspot* obtidos por outros autores e publicados na literatura especializada e, os alcançados por meio do método proposto.

TABELA 2 - Comparativo MSE e MAE entre métodos de previsão aplicados à série *Wolf's Sunspot*

Método	MSE	MAE
ARIMA (Zhang, 2003)	306,082	13,0337
RNA (Zhang, 2003)	351,194	13,5444
Híbrido (Zhang, 2003)	280,160	12,7802
ARIMA (Adhikari e Agrawal, 2012)	483,500	17,6300
RNA (Adhikari e Agrawal, 2012)	494,900	15,5800
EANN (Adhikari e Agrawal, 2012)	492,900	14,7100
Ensemble (Adhikari e Agrawal, 2012)	247,700	12,5000
RNA (Khashei e Bijari, 2011)	234,206	12,1180
Híbrido (Khashei e Bijari, 2011)	218,642	11,4470
ARIMA/PNN (Khashei e Bijari, 2012)	234,775	11,5485
Método Proposto	212,618	10,0301

Fonte: O autor (2015).

4. Considerações Finais

O presente trabalho apresentou um método de modelagem de séries temporais que envolvem combinação de filtragem e decomposição wavelet no pré-processamento dos dados, modelando os resultados deste estágio por meio de redes neurais artificiais.

O uso da filtragem wavelet, dentro da proposta apresentada no artigo, permitiu ganhos preditivos consideráveis, atestando a sua importância na modelagem de séries temporais, particularmente nas mais ruidosas.

Baseado na Tabela 3, conclui-se que a integração de métodos distintos incorreu na redução relevante nas estatísticas de aderência MSE e MAE, em relação a todas as outras abordagens consideradas. Os resultados auferidos por meio do método proposto na modelagem da série manchas solares são motivadores da sua aplicação em séries de tempo de outras áreas. .

Referências

- ADHIKARI, R.; AGRAWAL, R. K. A Novel Weighted Ensemble Technique for Time Series Forecasting. *Lecture notes in computer Science*, v.7301, p.38-49, 2012.
- AQUINO, R. R. B.; LIRA, M. M. S.; OLIVEIRA, J. B.; CARVALHO J.; M. A.; NETO, O. N.;
- ARIÑO, M. A. Time Series Forecasts via Wavelets: An Application to Car Sales in The Spanish Market, *Discussion Paper 95-30, ISDS, Duke University*, 1995.
- DAUBECHIES, I. Ten Lectures on Wavelets (C B M S N S F Regional Conference Series in Applied Mathematics), v. 61, *Soc for Industrial & Applied Math*, Philadelphia, 1992.
- DONOHO, D. L.; JONHSTONE, I. M. Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage. *Biometric*, 81,425-455, 1994.

- DONOHO, D. L. et al. Wavelet Shrinkage: Asymptopia? (with discussion) *Journal Royal Statistical Society. B*, 57:301-369, 1995.
- ECHER, E.; NORDEMANN, D.J.R.; VIEIRA, L.E.A.; PRESTES, A.P.; FARIA, H.H. O número de manchas solares, índice da atividade do sol. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v.25 n.2, p. 157-163, 2003.
- GOOIJER, J. G.; HYNDMAN, R. J. 25 years of time series forecasting. *International Journal of Forecasting*, p.443– 473, 2006.
- JOHNSTONE, I.M.; SILVERMAN, B. Wavelet Threshold Estimators for data with Correlated Noise. Stanford University Technical Report, 1996.
- KARTHIKEYAN, L; KUMAR, D. N. Predictability of nonstationary time series using wavelet and EMD based ARMA models. *Journal of hydrology*, p. 103-119, 2013.
- KHASHEI, M.; BIJARI, M. A novel hybridization of artificial neural networks and ARIMA models for time series forecasting. *Applied Soft Computing*, v. 11, p. 2664-2675, 2011.
- KHASHEI, M.; BIJARI, M. A new class of hybrid models for time series forecasting. *Expert Systems with Applications*, v. 39, p. 4344-4357, 2012.
- KISI, O.; CIMEN, M. A wavelet-support vector machine conjunction model for monthly streamflow forecasting. *Journal of hidrology*, p. 132-140, 2011.
- KUBRUSLY, C. S. and LEVAN, N. Abstract Wavelets Generated by Hilbert Space Shift Operators. *Adv. Math. Sci. Appl.* 14, 643-660, 2006.
- LIMA, F. G. *Modelos de previsões de séries temporais financeiras com combinação de filtros de kalman e wavelets*. Ribeirão Preto, 151p. Tese (Livre Docência em Economia)- Universidade Estadual de São Paulo, Ribeirão Preto, 2011.
- MACEIRA, M.E.P.; DAMAZIO, J.M.; GHIRARDI, A.O. Periodic ARMA Models Applied to Weekly Streamflow Forecasts. *Anais... Budapest, IEEE*, 1999.
- MALLAT, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, 2009.
- MARTINS, V.L.M.; WERNER, L. Comparação de previsões individuais e suas combinações: um estudo com séries industriais. *Production Journal*, v. 24, n.3, p.618-627, 2014.
- TEIXEIRA Jr., L. A. et al. Redes neurais artificiais wavelet causal na previsão da radiação solar direta. *Anais... Rio de Janeiro: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional 2012*.
- TEIXEIRA Jr., L. A. *Combinação SSA-Wavelet de métodos preditivos com ajuste numérico MINIMAX, na geração de previsões e de cenários*. Rio de Janeiro, 114 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.
- VALENZUELA, O. Hybridization of intelligent techniques and ARIMA models for time series prediction. *Fuzzy Sets and Systems*, v.159, p. 821-845, 2008.
- WANG, A.B.W.; VAN GELDER, P.H.A.J.M.; URIJLING, J.K.; MA, J. Forecasting daily streamflow using hybrid ANN models. Amsterdam: *Journal of Hydrology*, v. 324, p. 383-399, 2006.

YOON, H.; JUN, S.C.; HYUN, Y.; BAE, G.O.; LEE, K.K. A comparative study of artificial neural networks and support vector machines for predicting groundwater levels in a coastal aquifer. *Journal Hydrology*, v.396, p. 128-138, 2011.

ZANG G. P. Time Series Forecasting Using a Hybrid ARIMA and Neural Network Model. *Neurocomputing*, 50, p.159-175, 2003.