

PARTE I MÉTODOS DE TANGÊNCIA

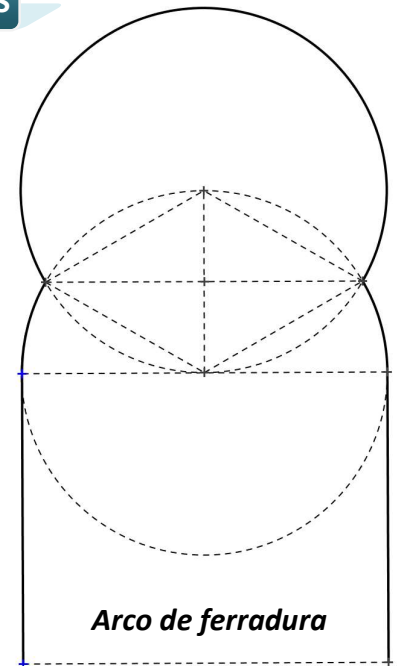
1. APLICAÇÕES DE CONCORDÂNCIA: ARCOS, OVAIS, ESPIRAIS e CURVAS

1.1. ARCOS

Definição: Denomina-se arco a uma curva constituída de linhas concordantes apoiadas em duas semi-retas, r e s , paralelas, nos pontos de origem A e B , respectivamente.

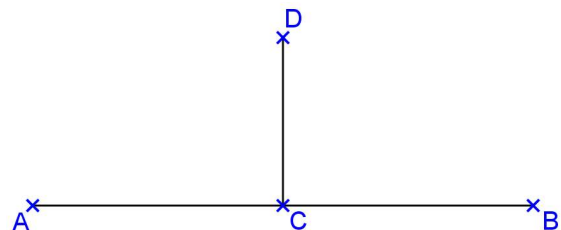
Elementos: Todo arco é formado por:

- a) Pontos de nasença ou de origem: são pontos que determinam as extremidades do arco.
- b) Vão, base do arco ou abertura: é a distância entre os pontos de origem.
- c) Flecha: é a distância entre o ponto mais alto do arco e a reta base do arco.
- d) Suportes: são as semi-retas paralelas que sustentam o arco.



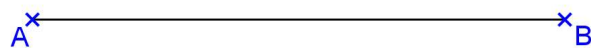
Exercícios propostos:

1. Construir um **arco pleno** (a flecha é igual à metade do vão), dada a medida do vão AB .
2. Construir um **arco abatido** (concordância de um número ímpar de arcos de circunferência, onde a flecha é menor que a metade do vão) de 3 centros, dados o vão AB e a flecha CD .

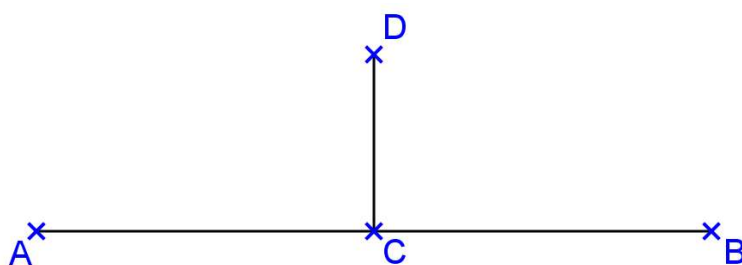


3. Construir um **arco abatido** de 3 centros, sabendo-se que o vão AB mede 7cm e a flecha CD mede 1cm.

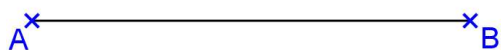
4. Construir um **arco abatido**, de vão AB.



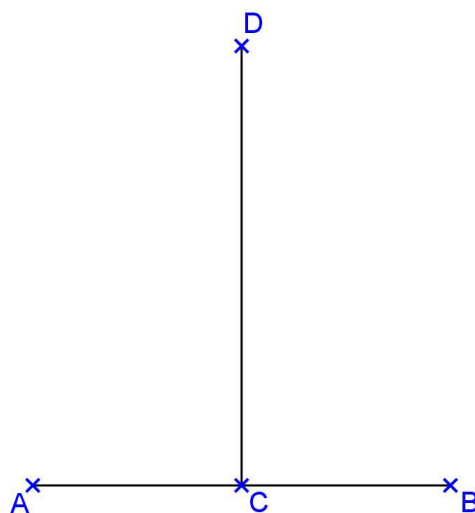
5. Construir um **arco abatido**, dados o vão AB e a flecha CD, conjugando-o em outros dois arcos abatidos menores.



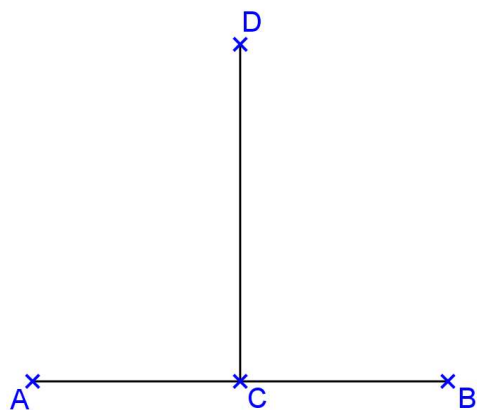
6. Construir um **arco ogival** (flecha maior que a metade do vão) com vão AB.



7. Construir um **arco ogival**, conhecendo-se o vão AB e a flecha CD (flecha maior do que o vão).



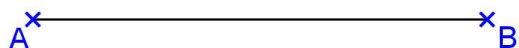
8. Construir um **arco ogival**, conhecendo-se o vão AB e a flecha CD (flecha menor que o vão).



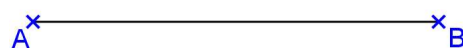
10. Construir um **arco gótico flamejante** com vão AB.



12. Construir um arco **ogival de ferradura** com vão AB e ângulo de 30° .



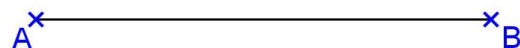
9. Construir um **arco gótico** conhecendo-se o vão AB.



11. Construir um **arco otomano** com vão AB.



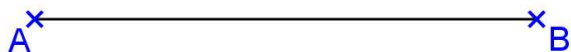
13. Construir um arco **ogival de ferradura** com vão AB e ângulo de 45° .



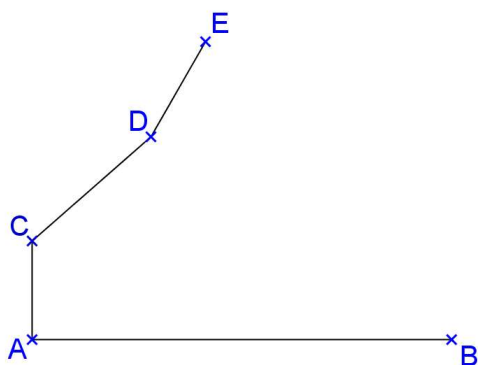
14. Construir um **arco esconso** de origens A e B.



16. Construir um **arco Tudor** com vão AB.



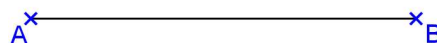
18. Construir um **arco geminado**, dados o vão AB e os centros dos demais arcos de circunferência C, D e E de um dos lados do arco geminado.



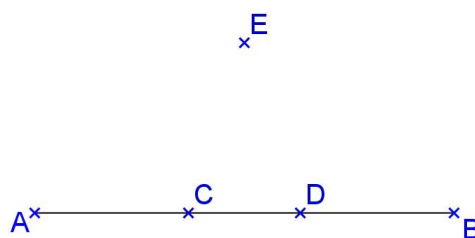
15. Construir um **arco esconso** de origens A e B, com BC menor que $\frac{1}{3}$ de AC.



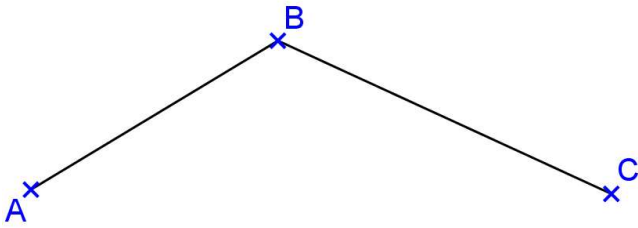
17. Construir um **arco Mourisco** com vão AB.



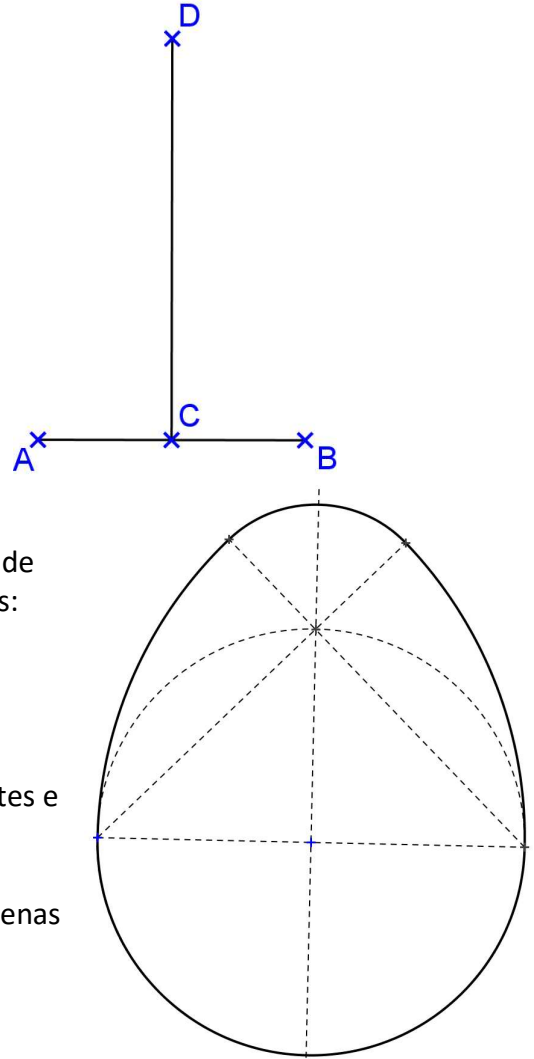
19. Construir um **arco trilobado** com arcos de circunferência de centros C e D, com arco de centro E de raio qualquer.



20. Arco parabólico, dados AB e BC.



21. Arco bulbiforme, com vão AB e flecha CD (a flecha deve ser maior do que o vão).



Oval de 4 centros

1.2. OVAIS

Definição: As ovais são curvas fechadas, constituídas por arcos de circunferências concordantes entre si, possuindo dois eixos: maior e menor.

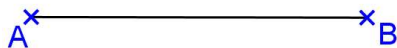
Classificação das ovais:

As ovais podem ser:

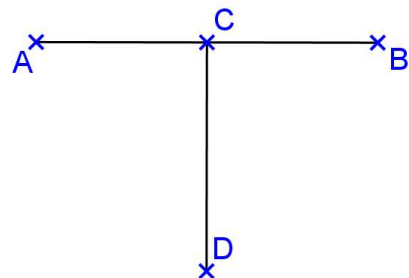
- regulares ou falsas elipses – formadas por arcos concordantes e simétricos dois a dois, possuem dois eixos de simetria de tamanhos diferentes;
- irregulares – formadas por arcos concordantes, possuem apenas um eixo de simetria, são chamadas de óvulos.

Exercícios propostos:

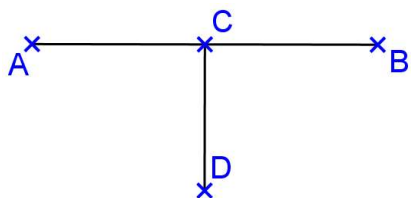
1. Construir uma **oval irregular** de 4 centros conhecendo-se o eixo menor AB.



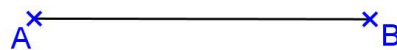
2. Construir uma **oval irregular alongada** conhecendo-se o eixo menor AB, e sabendo-se que o centro do arco menor é o ponto D (CD é maior do que a metade de AB).



3. Construir uma **oval irregular encurtada** conhecendo-se o eixo menor AB, e sabendo-se que o centro do arco menor é o ponto D (CD é menor do que a metade de AB).



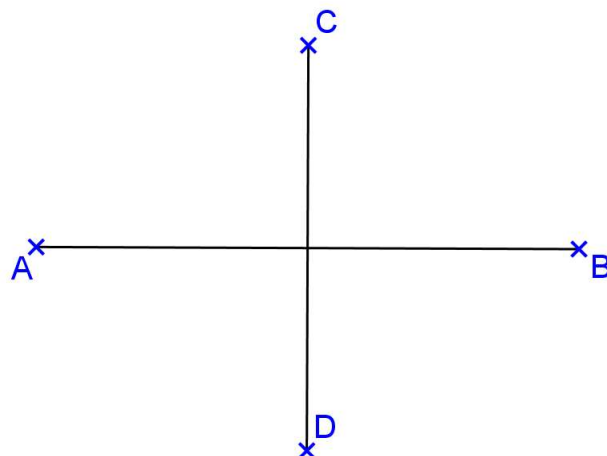
4. Construir uma **oval regular** conhecendo-se o eixo menor de 4cm.



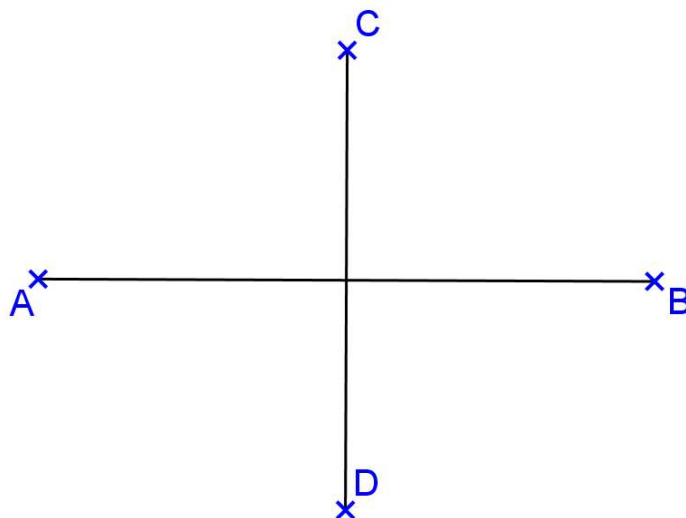
5. Construir uma **oval regular** de 4 centros conhecendo-se o eixo maior de 6cm.



6. Construir uma **oval regular** com eixo menor CD e o eixo maior AB.



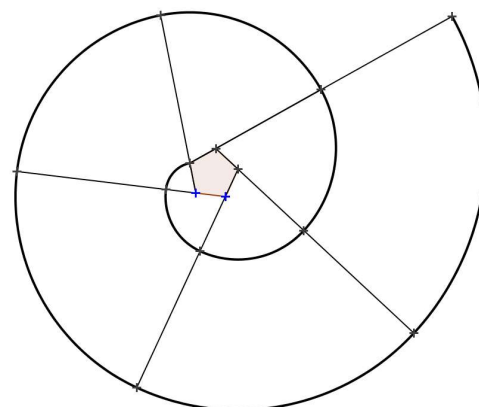
7. Construir uma **oval regular** com eixo menor CD e o eixo maior AB (método do retângulo).



1.3. FALSAS ESPIRAIS

Definição: Chama-se espiral a curva descrita por um ponto que se desloca com um movimento retilíneo uniforme (ou não), sobre uma reta, ao mesmo tempo em que este ponto gira em movimento circular também uniforme.

Existem dois tipos de espirais: as verdadeiras, que são traçadas por pontos auxiliares à mão livre (por exemplo, espiral de Arquimedes, hiperbólica e espiral logarítmica); e as falsas, que é o nome dado às curvas formadas por arcos concordantes que lembram o formato de uma espiral.



Falsa espiral de 5centros

Elementos de uma falsa espiral:

- a) núcleo – é um polígono regular ou irregular, que contém os vários centros dos arcos que formam a espiral. Na espiral verdadeira, o núcleo é substituído por um ponto de centro, chamado pólo;
- b) centros – são os centros dos arcos que formam a espiral;
- c) raios vetores – prolongamentos dos lados do núcleo. Na espiral verdadeira são linhas que saem do pólo a um ponto qualquer da curva;
- d) espira – cada evolução completa da espiral;
- e) passo – distância entre duas espiras.

Observação: O desenvolvimento de uma espiral pode ser no sentido horário ou anti-horário.

Exercícios:

1. Construir uma **falsa espiral de 2 centros** (bicêntrica), no sentido horário, sabendo que seus centros distam 0,5cm.
2. Construir uma **falsa espiral de 3 centros regular** (tricêntrica), no sentido horário, sabendo que seu núcleo é formado pelos pontos A, B e C, dados, onde $AB = BC = AC = 1\text{cm}$.

3. Construir uma **falsa espiral de 3 centros irregular** (tricêntrica), no sentido horário, sabendo que seu núcleo é formado pelos pontos A, B e C: $AB = 0,5\text{cm}$, $BC = 1\text{cm}$ e $AC = 0,7\text{cm}$.
4. Construir uma **falsa espiral de 4 centros** (quadrícêntrica), no sentido anti-horário, sabendo que seu núcleo é formado pelos vértices do quadrado ABCD de lado $0,5\text{cm}$.
5. Construir uma **falsa espiral ovalada** de 4 centros, no sentido horário, sabendo que seu núcleo é formado pelos vértices do retângulo ABCD de lados iguais a $0,5\text{cm}$ e $1,1\text{cm}$.
6. Construir um retângulo áureo de lado maior 10cm e a **espiral de Fibonacci ou de ouro** (esta espiral aproxima-se de uma espiral logarítmica).

7. Construir um triângulo áureo de lado maior 12cm e a **espiral de ouro** (esta espiral aproxima-se de uma espiral logarítmica).

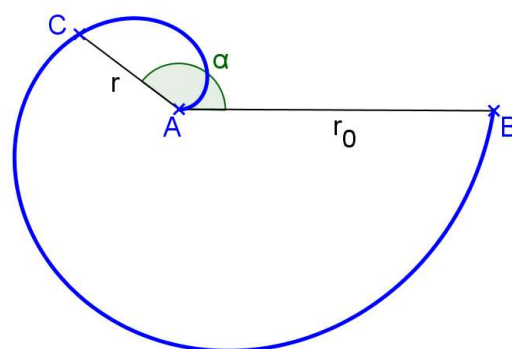
8. Construir uma **Voluta Jônica**.

1.4. CURVAS

Espirais

Definição: A **espiral de Arquimedes** resulta do movimento do ponto **C** que se desloca em velocidade uniforme sobre um raio **AC = r** que gira em torno do ponto fixo **A**.

A equação polar desta espiral é: $r = r_0 \cdot \alpha$



Exercício:

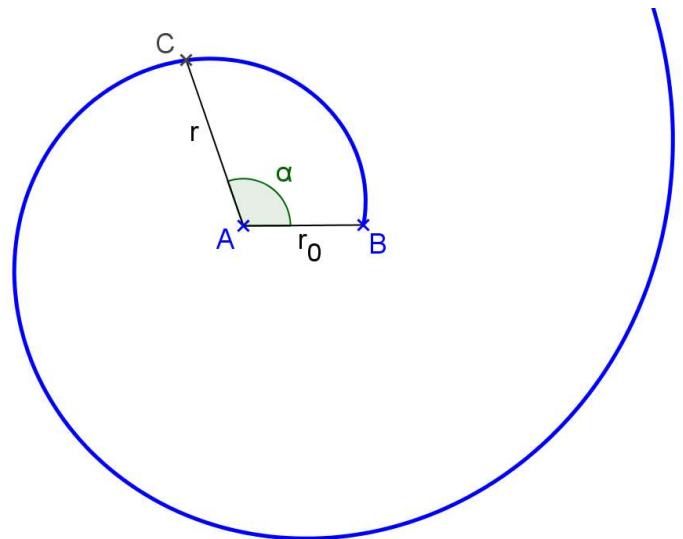
Construir uma espiral de Arquimedes.

Definição: Se um ponto **C** colocado sobre um raio vetor de uma espiral se desloca em progressão geométrica, enquanto este raio se desloca em progressão aritmética em torno do ponto **A**, o lugar geométrico de **C** será uma **espiral logarítmica**.

A equação polar desta espiral é: $r = r_0 e^{m\alpha}$

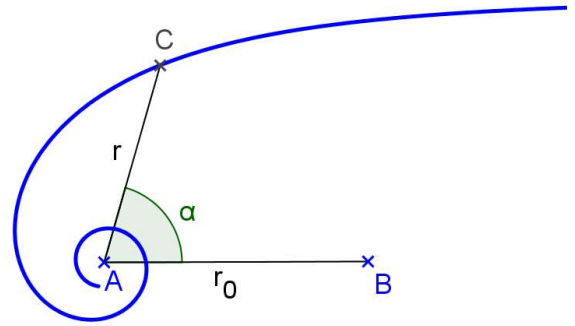
Exercício:

Construir uma espiral logarítmica por pontos.



Definição: A espiral **hiperbólica** é o lugar geométrico dos pontos extremos de vetores com intensidade inversamente proporcional aos seus ângulos com o eixo principal.

A equação polar desta espiral é: $r\alpha = r_0$

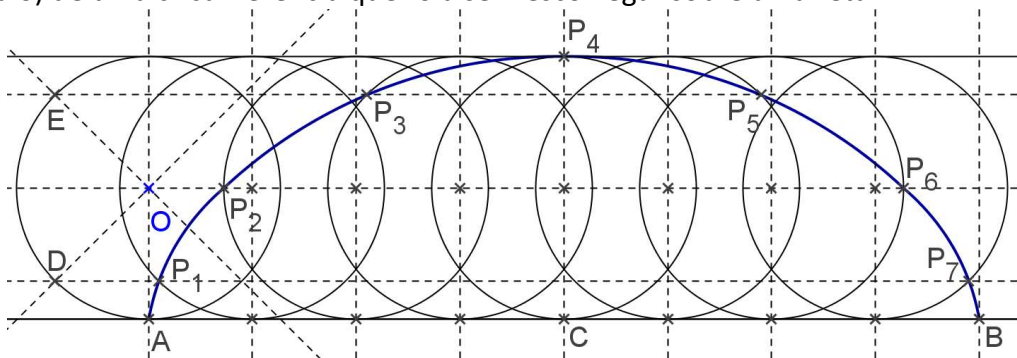


Exercício:

Construir uma espiral hiperbólica por pontos.

Ciclóides

Definição: Chama-se **ciclóide** uma curva plana descrita por um ponto de um raio (ou do prolongamento de um raio) de uma circunferência que rola sem escorregar sobre uma reta.



Elementos:

- a) a circunferência é denominada de circunferência geradora;
- b) a reta é denominada de diretriz;
- c) o ponto que descreve a ciclóide é chamado de ponto gerador.

Existem três tipos de ciclóide: a simples ou normal, quando o ponto P gerador da ciclóide pertence à circunferência geradora; a encurtada, quando o ponto gerador está no interior da circunferência geradora; e a alongada, quando o ponto gerador é externo à circunferência geradora.

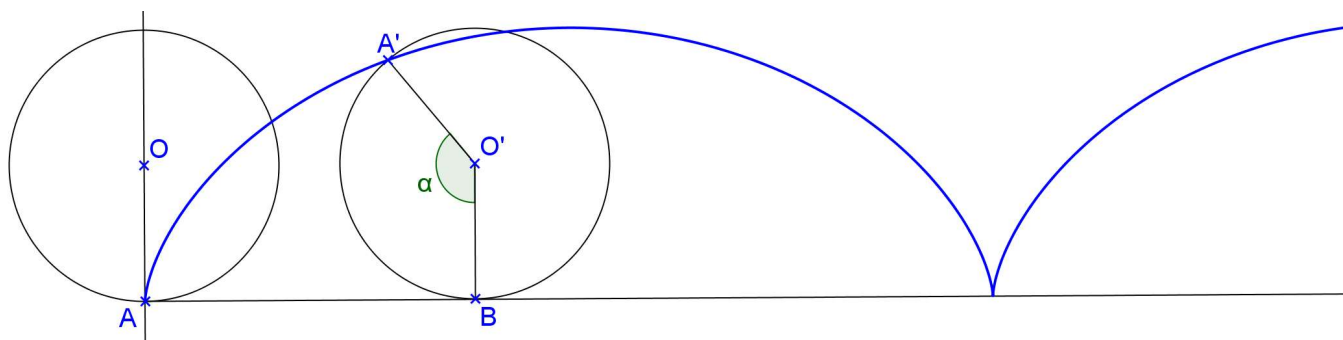
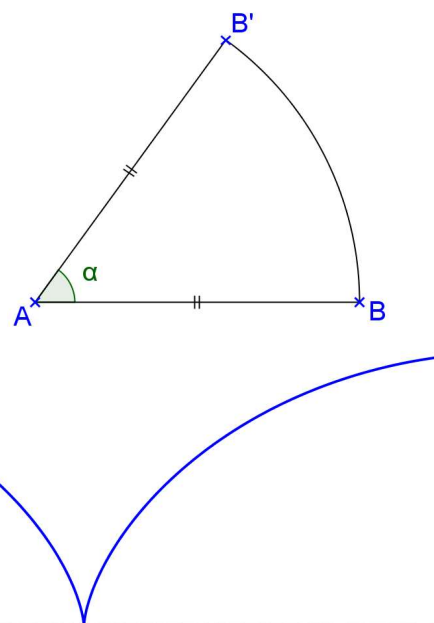
Exercício:

Construir uma cicloide simples, com circunferência geradora de raio 2cm.

Rotação

Definição: Para encontrar a rotação do ponto B em torno de um ponto fixo A com amplitude α , basta encontrar B' tal que $AB' = AB$ e $\angle BAB' = \alpha$.

Esta transformação geométrica pode ser utilizada na construção de cicloides, epicloides e hipocicloides.

**Exercícios propostos:**

1. Construir uma cicloide simples, com circunferência geradora de raio qualquer da seguinte forma: encontre um ponto da curva usando rotação e defina o lugar geométrico em relação a um ponto móvel da reta.
2. Construir uma cicloide encurtada com a mesma ideia do exercício anterior.
3. Construir uma cicloide alongada com a mesma ideia dos exercícios anteriores.
4. Construa uma cicloide simples com uma circunferência geradora de raio qualquer com centro O. Na circunferência móvel, com centro O', construa um pentágono regular estrelado inscrito. Faça com que um dos vértices do pentágono seja o ponto móvel A' da cicloide.

Epiciclóides

Definição: Chama-se **epiciclóide** a curva descrita por um ponto de um raio (ou do prolongamento de um raio) de uma circunferência que rola externamente, sem escorregar, sobre outra circunferência fixa.

Elementos da epiciclóide:

- a) a circunferência móvel é a circunferência geradora;
- b) o ponto que descreve a epiciclóide é o ponto gerador;
- c) a circunferência fixa é a circunferência diretora.

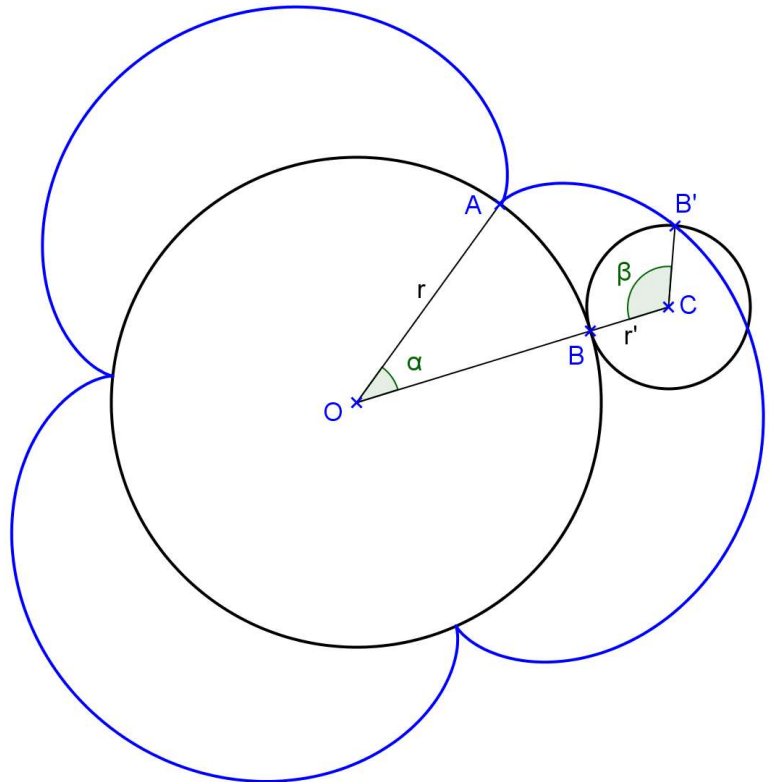
Conforme o ponto gerador pertença à circunferência geradora, ou esteja no seu interior ou no seu exterior, a epiciclóide é chamada, respectivamente, simples, encurtada ou alongada.

Quando a circunferência geradora completa uma volta inteira, o ponto gerador descreve um ciclo da epiciclóide.

Epiciclóides notáveis:

Sejam r e r' , respectivamente, os raios das circunferências diretora e geradora de uma epiciclóide. Se $r' = r/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) quando a circunferência geradora percorre a volta inteira da circunferência diretora, a epiciclóide tem início e término num mesmo ponto. Nesse caso, o número de ciclos da epiciclóide é igual a n , isto é, a circunferência geradora dá n voltas sobre si mesma para então completar uma volta inteira sobre a diretora.

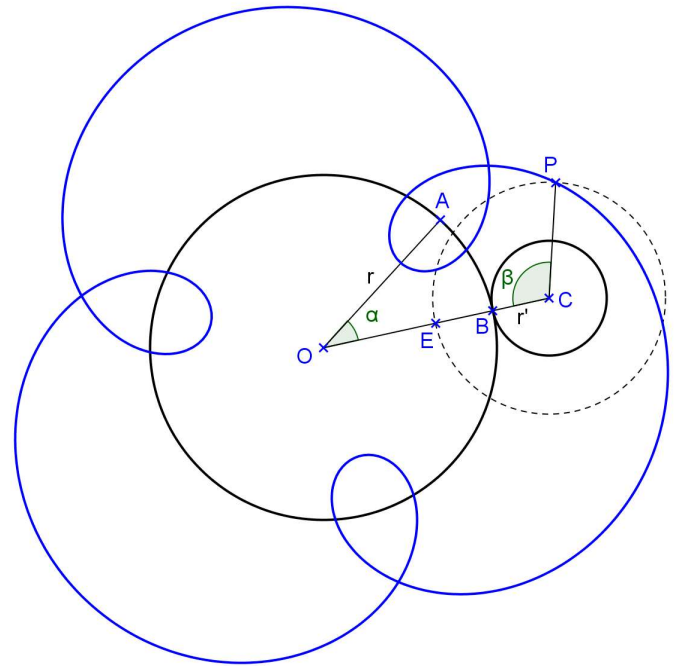
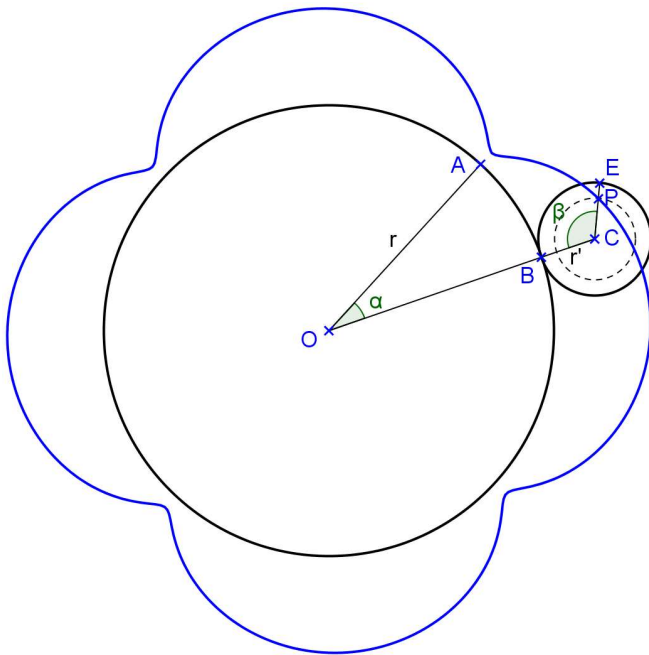
Essas epiciclóides particulares, em que $r' = r/n$, são denominadas notáveis e, para os casos em que $n \geq 3$, a figura constituída pela reunião dos n ciclos é chamada de **polígono epicicloidal**.



Exercícios propostos:

1. Construir uma epiciclóide com $r' = 2\text{cm}$, e $r = 4\text{cm}$.

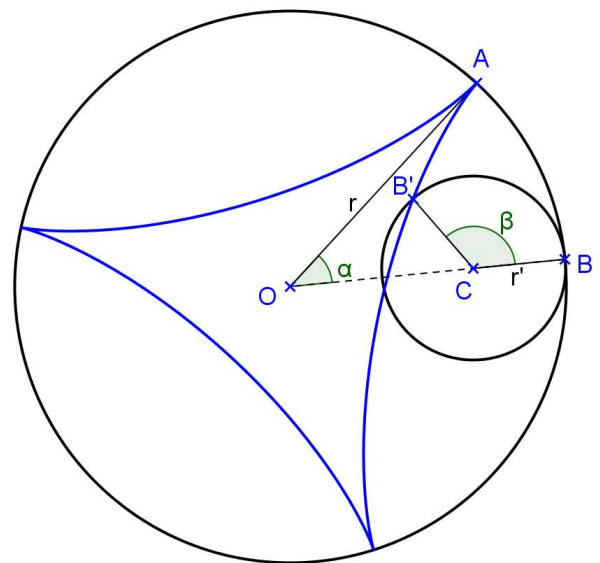
2. Construir uma epiciclóide alongada com $r'=1,5\text{cm}$, $r=3\text{cm}$ e $PC=2\text{cm}$.
3. Construir uma epiciclóide encurtada com $r'=1,5\text{cm}$, $r=4,5\text{cm}$ e $PC=1\text{cm}$.



4. Construa uma epiciclóide simples com circunferências de raios r e r' quaisquer. Na circunferência móvel, com centro C , construa um pentágono regular estrelado inscrito. Faça com que um dos vértices do pentágono seja o ponto móvel B' da epiciclóide.

Hipociclóides

Definição: Chama-se **hipociclóide** a curva descrita por um ponto de um raio ou do prolongamento de um raio de uma circunferência que rola internamente sem escorregar sobre outra circunferência fixa. As hipociclóides podem ser: simples, encurtadas ou alongadas.

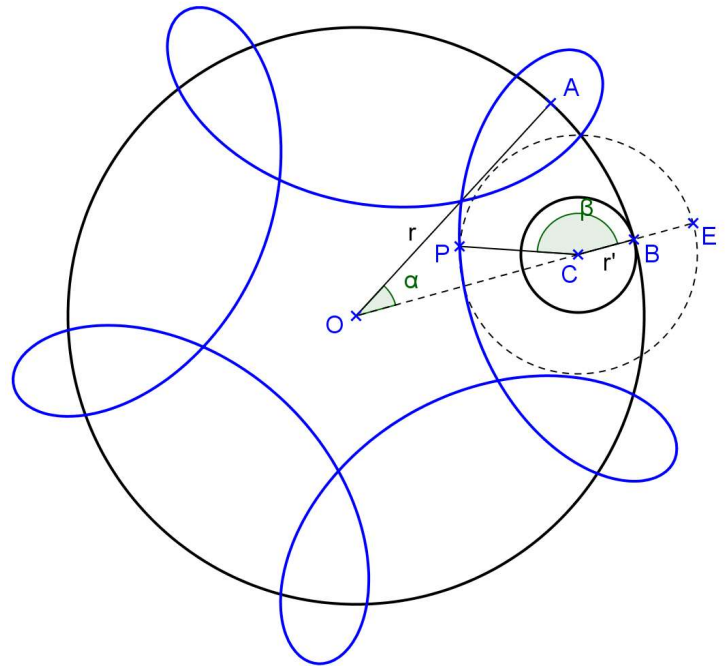
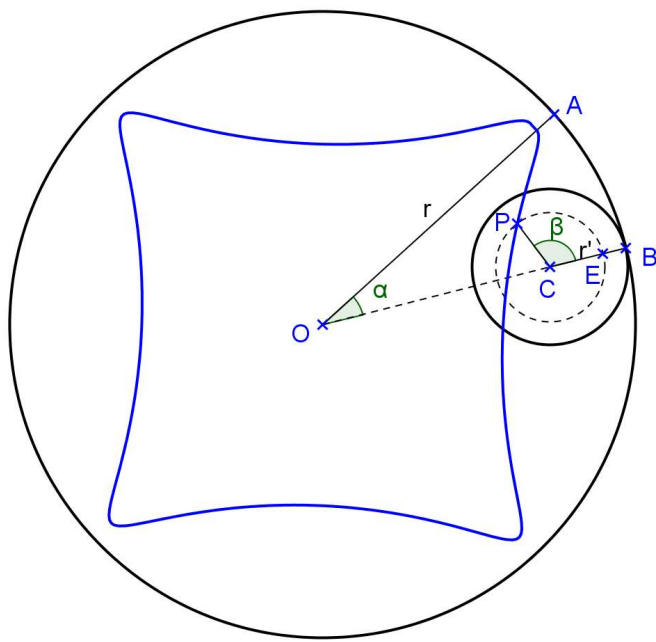


Exercícios propostos:

1. Construir uma hipociclóide com $r = 8\text{cm}$, e $r' = 2\text{cm}$.

2. Construir uma hipociclóide alongada com $r = 8\text{cm}$, $r' = 2\text{cm}$ e $PC = 2,5\text{cm}$.

3. Construir uma hipociclóide encurtada com $r = 9\text{cm}$, $r' = 3\text{cm}$ e $PC = 2\text{cm}$.

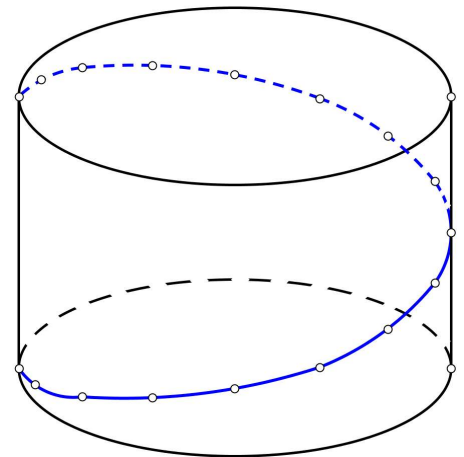


Hélices

Definição: Uma **hélice cilíndrica** é uma curva que intercepta as geratrizes de um cilindro circular reto com ângulo constante.

Exercício proposto:

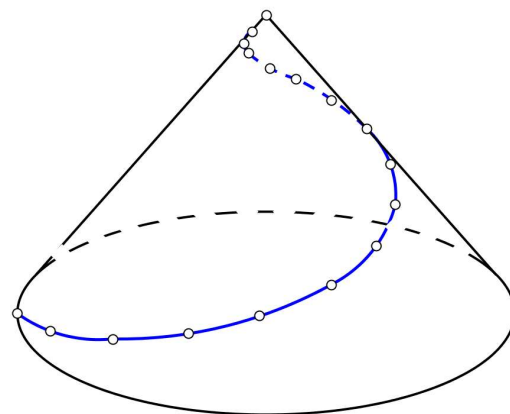
Construir uma hélice cilíndrica dado o raio da base do cilindro $r = 2\text{cm}$, e altura $h = 4,5\text{cm}$.



Definição: Uma **hélice cônica** é uma curva que intercepta as geratrizes de um cone circular reto com ângulo constante.

Exercício proposto:

Construir uma hélice cônica dado o raio da base do cone $r = 3\text{cm}$, e altura $h = 7,5\text{cm}$.



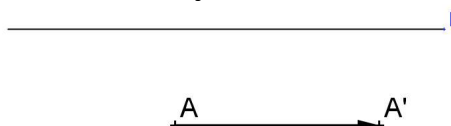
Translação

Definição: Seja um ponto se deslocando sobre uma reta r , de uma posição A para uma posição A' .

Dizemos que A sofreu uma translação de A para A' . Esta translação pode ocorrer nos dois sentidos.



Seja um ponto A , não pertencente à reta r , se deslocando para a posição A' , paralelamente à r . Dizemos que a translação do ponto A tem a direção da reta r .

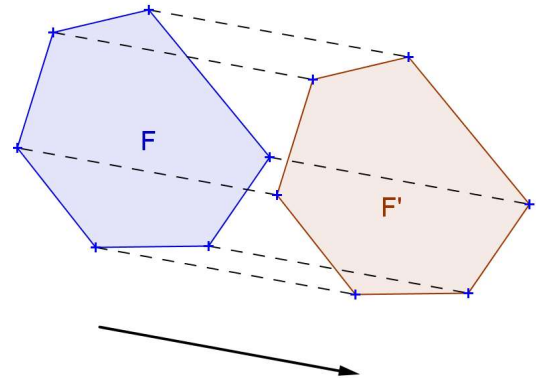


A translação de um ponto A para uma posição A' fica definida quando se conhecem três características distintas desse deslocamento: a direção, o sentido e a amplitude (distância entre A e A').

Translação de uma figura

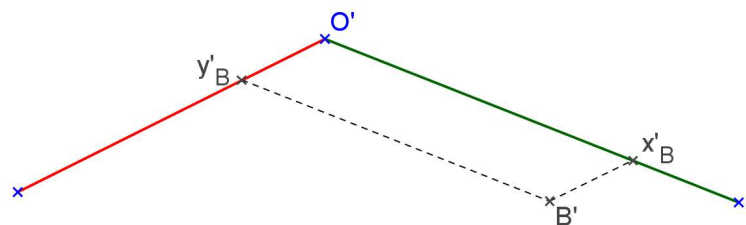
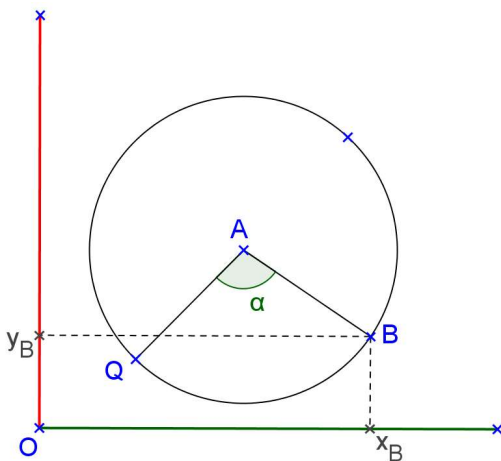
Definição: Seja F uma figura qualquer. Suponha que cada ponto de F sofra uma translação de mesma direção, sentido e amplitude. O conjunto de todos os pontos obtidos pelas translações dos pontos de F é uma segunda figura F'. Dizemos, então, que F' é uma transformação de F por translação.

Se, através de uma translação, um ponto A de uma figura F se transforma no ponto A' da figura F', então dizemos que A e A' são pontos homólogos, ou ainda que A' é a imagem de A pela translação.



Exercícios propostos:

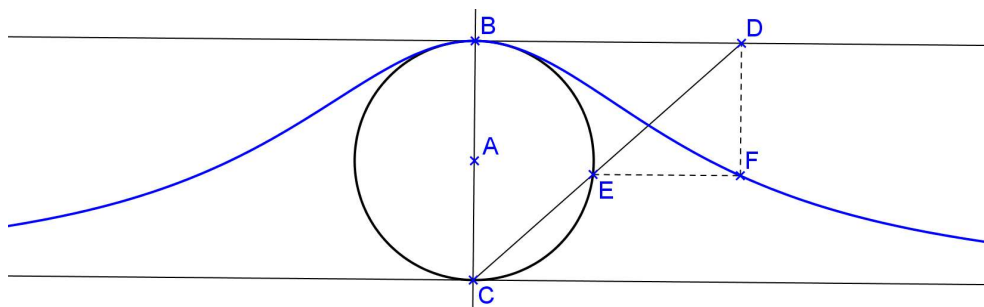
1. Construa um sistema de coordenadas xy , com eixos perpendiculares. Defina uma transformação que transfira as coordenadas deste sistema para um sistema em perspectiva, usando como base a transformação de uma circunferência de centro A e raio AB em uma circunferência em perspectiva com raio A'B'. A partir destes elementos, construa uma hélice cilíndrica em perspectiva, usando a translação para marcar a altura e os pontos da hélice.



2. Faça os mesmos procedimentos para construir a hélice cônica em perspectiva.
3. Construa uma hélice esférica.
4. Construa uma hélice elíptica.
5. Construa uma hélice hiperbólica.
6. Construa uma hélice parabólica.

Cúbica de Agnesi ou Versiera

Definição: Na geometria, a Versiera é uma curva cúbica do plano caracterizada por uma forma de sino, semelhante à distribuição de Gauss. É uma curva simétrica em relação ao eixo y, onde x é uma assíntota da curva. Sua equação é $yx^2 = a^2(a-y)$, onde a é o diâmetro de uma circunferência.



Exercício proposto:

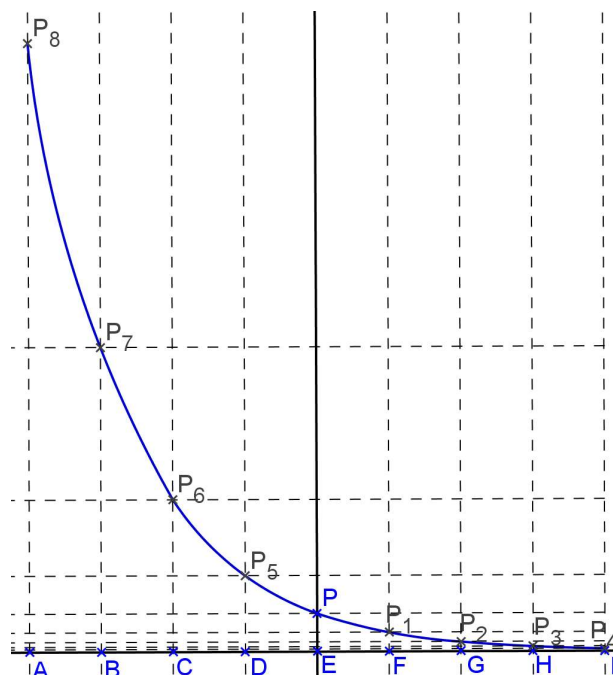
Construir a cúbica de Agnesi de uma circunferência de raio $r=2\text{cm}$.

Curva logarítmica

Definição: É caracterizada pelo crescimento em progressão geométrica da ordenada, com o respectivo crescimento em progressão aritmética da abscissa, ou vice-versa.

Exercício proposto:

Construir uma curva Logarítmica.

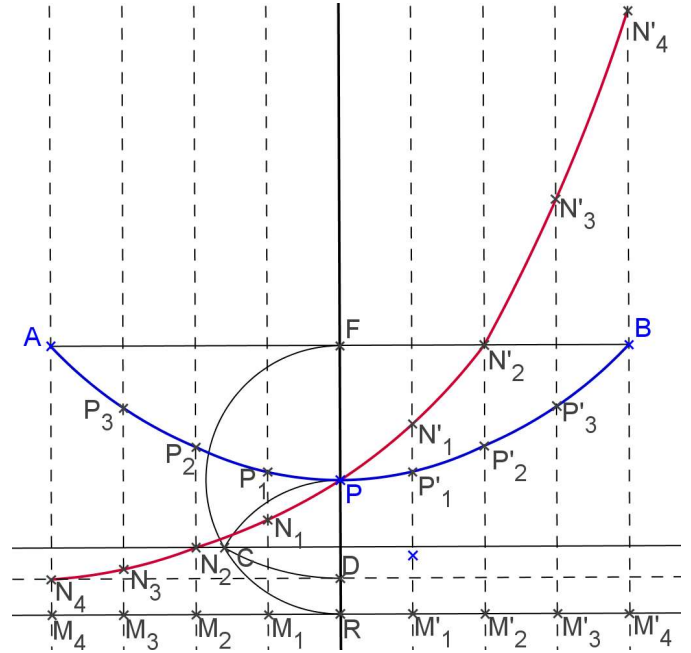


Catenária

Definição: É uma curva formada por um fio flexível inextensível e homogêneo, sob ação da gravidade com seus extremos fixos e dois pontos que não pertencem a uma mesma vertical.

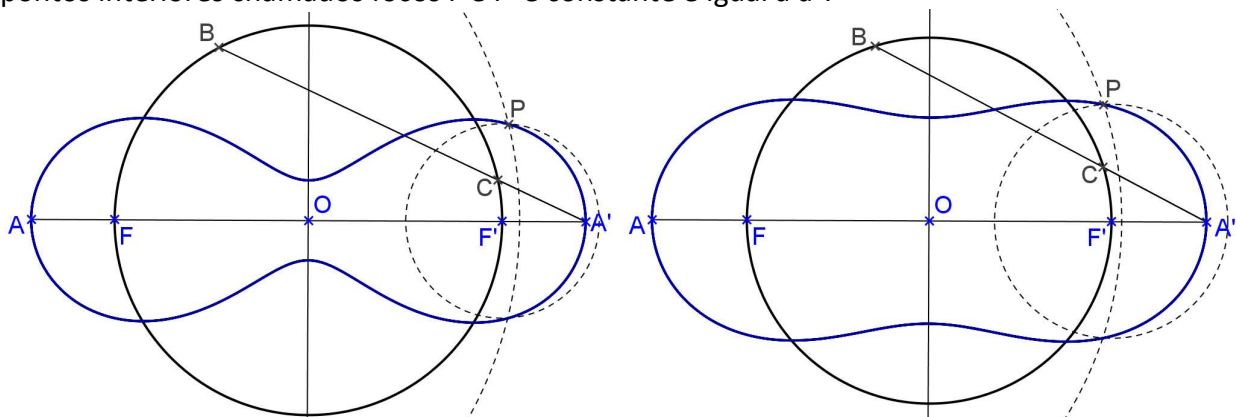
Exercício proposto:

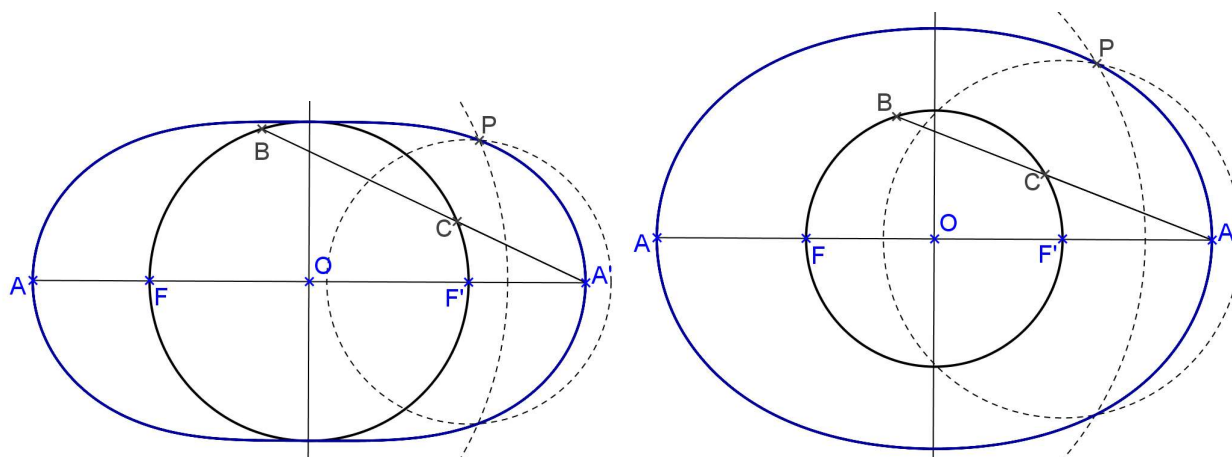
Construir uma curva Catenária, supondo-se conhecidos dois pontos na horizontal A e B, e o vértice da curva P, onde $AB = 7\text{cm}$ e $AP = PB = 4\text{cm}$.



Curva de Cassini

Definição: É uma curva fechada, onde o produto das distâncias de qualquer de seus pontos a dois pontos interiores chamados focos F e F' é constante e igual a a^2 .



**Exercícios propostos:**

1. Construir a curva de Cassini, com $AA' = 9\text{cm}$ e $FF' = 6\text{cm}$.

2. Construir a curva de Cassini, com $AA' = 9\text{cm}$ e $FF' = 3\text{cm}$.

Lemniscata de Bernoulli

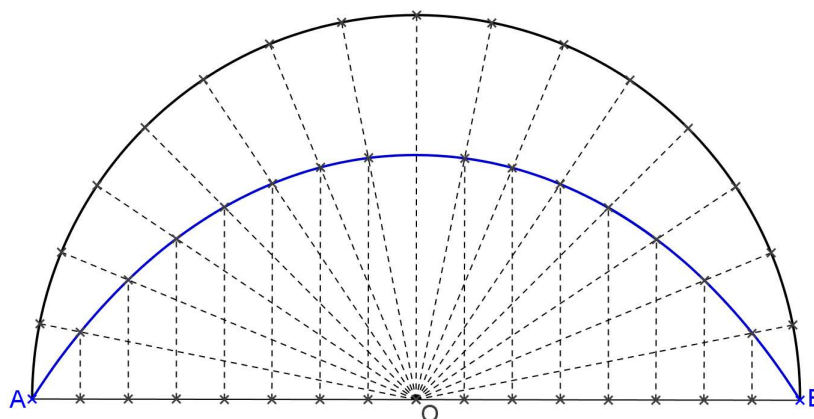
Definição: É o lugar geométrico dos pontos do plano cujo produto das distâncias a dois pontos fixos é constante, e igual ao quadrado da metade do segmento que liga dos dois pontos dados. Trata-se de um caso particular da curva de Cassini, quando $a = OF$.

Exercício proposto:

Construir a Lemniscata de Bernoulli com $FF' = 9\text{cm}$.

Quadratriz de Hippias

Definição: É a curva descrita pelo ponto de interseção de duas retas que se movem, onde a primeira é o raio de uma circunferência, e a segunda é uma paralela a um de seus diâmetros.

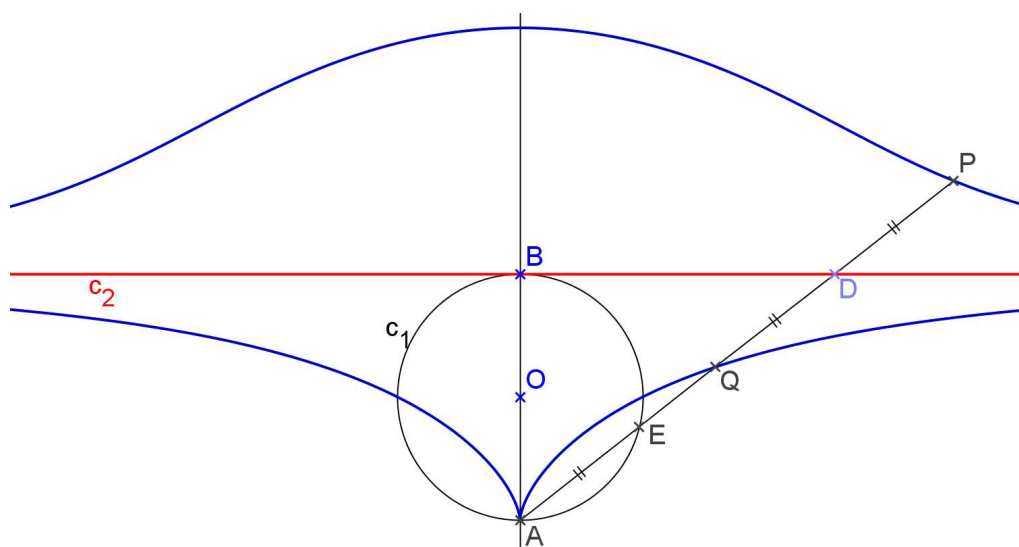


Exercício proposto:

Construir a Quadratriz de Hippias, definida pelos extremos $AB = 10\text{cm}$.

Cissóide

Definição: Considere as curvas c_1 e c_2 e um ponto A chamado de polo pertencente a c_1 (circunferência). Quando for possível determinar os pontos $E \in c_1$ (circunferência) e $D \in c_2$ (reta) tais que $PD = QD = AE$, o lugar geométrico dos pontos P e Q é chamado de cissóide.



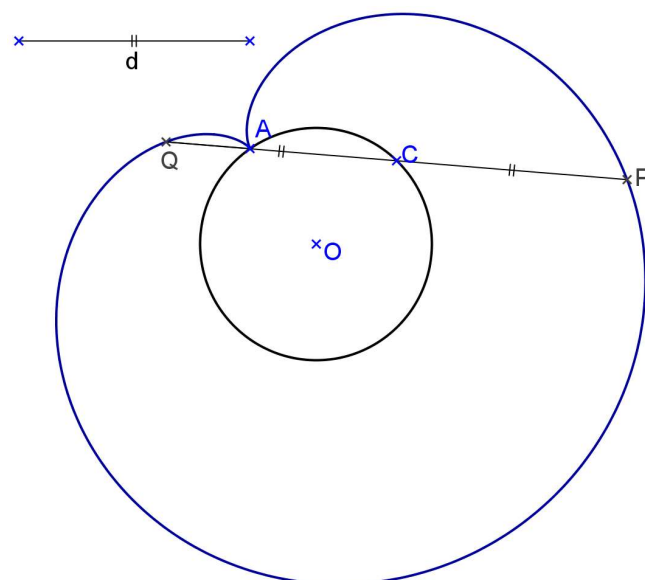
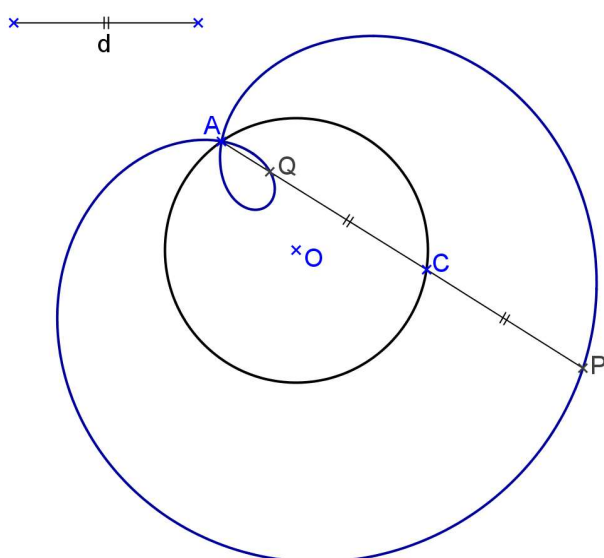
O exemplo acima é de uma cissóide simétrica em relação à reta AB, com a curva c_2 sendo uma reta tangente à circunferência. Deslocando-se a curva c_3 temos outros casos de cissóides.

Exercícios propostos:

1. Construa uma cissóide de uma circunferência de raio 2cm, exterior a uma reta dada.
2. Construa uma cissóide de uma circunferência de raio 2cm, tangente a uma reta dada.
3. Construa uma cissóide de uma circunferência de raio 2cm, secante a uma reta dada.
4. Construa uma cissóide de uma elipse, secante a uma reta dada.
5. Construa uma cissóide de uma hipérbole, secante a uma reta dada.

Conchóide

Definição: Considere uma curva c , e um ponto A chamado de pólo. Quando for possível determinar os pontos C , P e Q tais que $PC = QC = d$, o lugar geométrico dos pontos P e Q é chamado de conchóide.



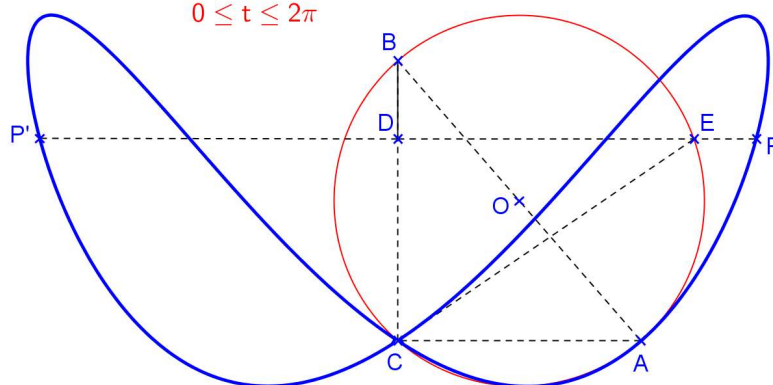


- ## Besácea

$$x = a \cdot \cos(t) - b \cdot \sin(t)$$

$$y = -x \cdot \sin(t)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$



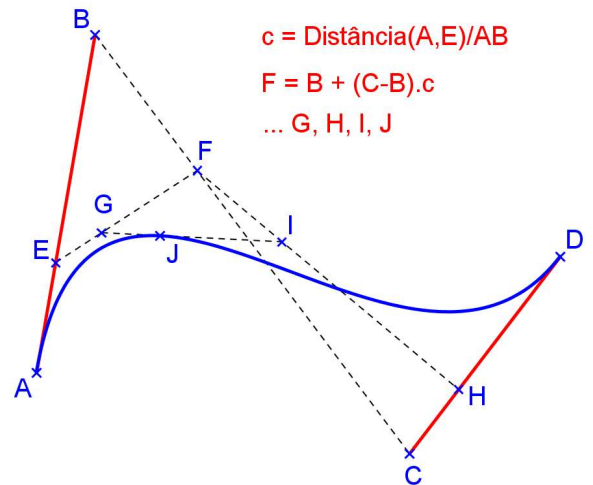
Exercício proposto:

Construir uma besace com diâmetro $AB = 5\text{cm}$ e $AC = 2\text{cm}$.

Curva de Bézier

Definição: A curva de Bézier é uma polinomial e pode ser expressa como a interpolação linear entre alguns pontos representativos, chamados de pontos de controle.

A curva de Bézier linear é baseada na proporção t entre os pontos de controle A e B (AE), usada na obtenção dos demais pontos com a equação recursiva: $F = B + c(C - B)$.



Exercício proposto:

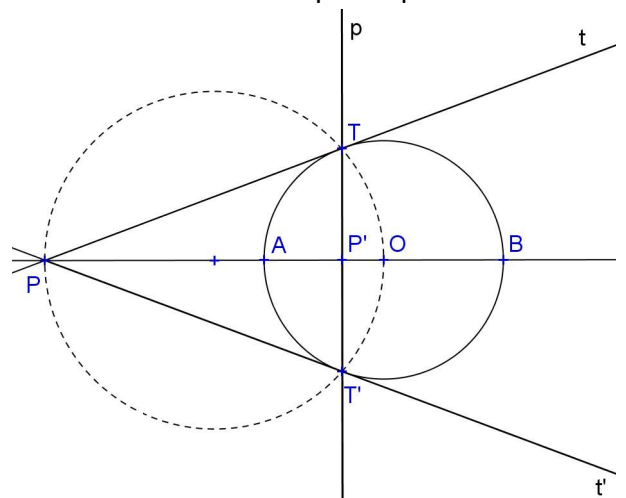
Construir uma curva de Bézier dados os segmentos AB e CD.

Inversão, pólo e polar

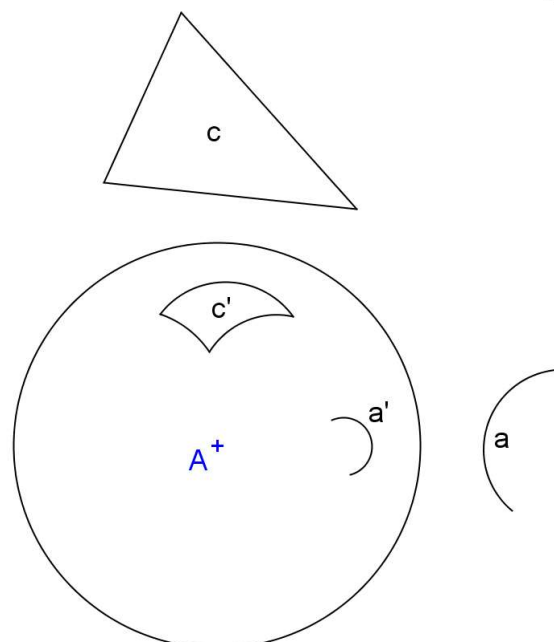
Definição: A polar é uma reta que está relacionada, ou com um par de retas, ou com uma circunferência ou com uma cônica. A um ponto P, denominado de pólo, corresponde uma reta p, denominada de polar do ponto P.

Este conceito de pólo e polar está relacionado com o de razão harmônica de quatro pontos.

Sejam uma circunferência de centro O e um ponto P exterior. Conduzimos por P tangentes t e t' à circunferência. A polar do ponto P em relação à circunferência corresponde às retas definidas pelos pontos de tangência T e T'. O ponto P' é denominado inverso de P em relação à circunferência.



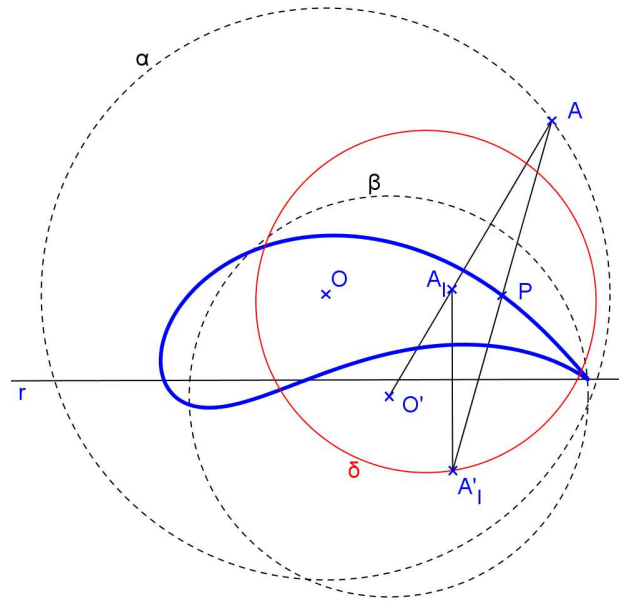
Inversão de figuras:



Aerofólio

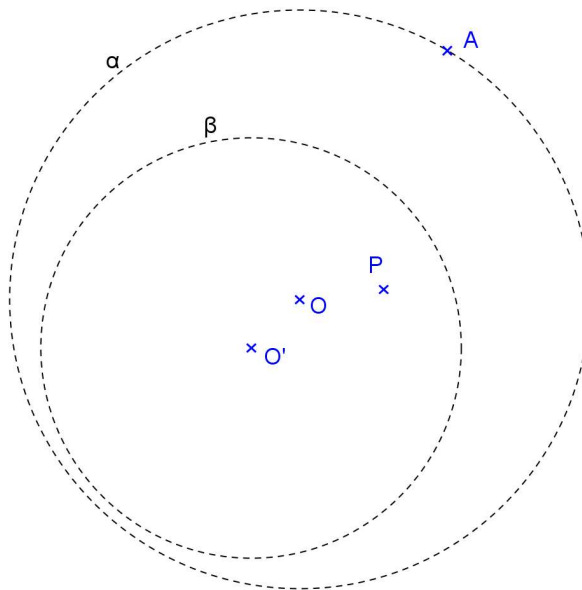
Definição: Uma seção bidimensional projetada para provocar a variação de velocidade chama-se aerofólio.

Esta curva é também chamada de **curva de Joukowski**, e uma aproximação dela é construída com os seguintes elementos: as circunferências α e β ; uma reta r ; o inverso A_I do ponto A de α em relação a β . O lugar geométrico dos simétricos dos pontos médios de AA_I em relação à reta r é o aerofólio.



Exercícios propostos:

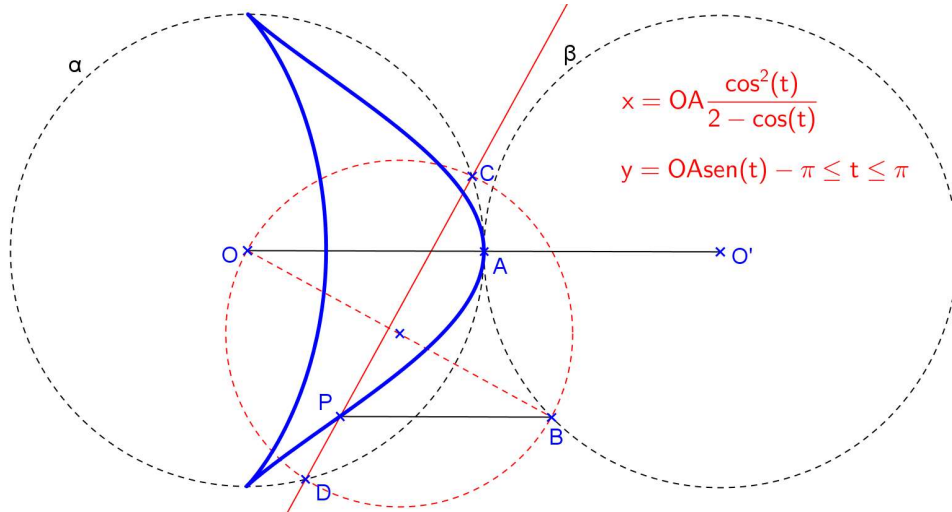
1. Construir o aerofólio dados seus elementos principais: as circunferências α e β , e uma reta r .
2. Dados os pontos A e P e as circunferências α e β , encontrar a reta r que define os pontos do aerofólio. Determine mais um ponto P' do aerofólio.



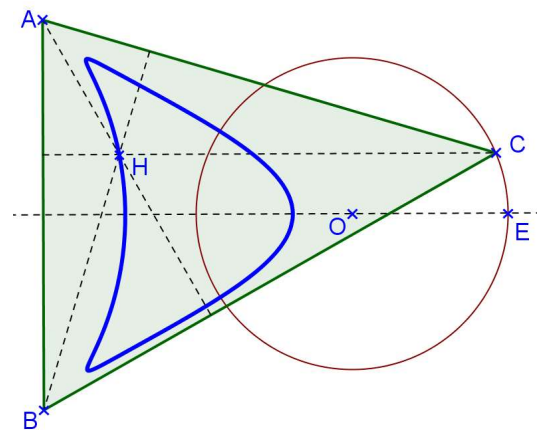
Curva bicorne

A curva similar ao chapéu de duas pontas pode ser construída de três formas:

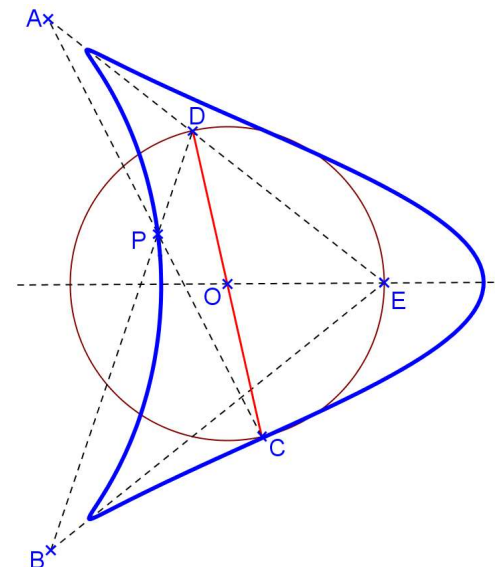
Definição 1: São dados as circunferências α e β tangentes em A e um ponto B pertencente a β . O lugar geométrico da interseção de BP, paralelo a OO' , com a reta CD, polar de B em relação a α , é uma curva bicorne.



Definição 2: São dados os pontos A e B, simétricos em relação a OE, a circunferência de centro O e raio OE e um ponto C pertencente a esta circunferência. O lugar geométrico do ortocentro de um triângulo ABC é uma curva bicorne.



Definição 3: São dados os pontos A e B, simétricos em relação a OE, a circunferência de centro O e um diâmetro CD desta circunferência. O lugar geométrico da interseção das retas AC com BD é uma curva bicorne.



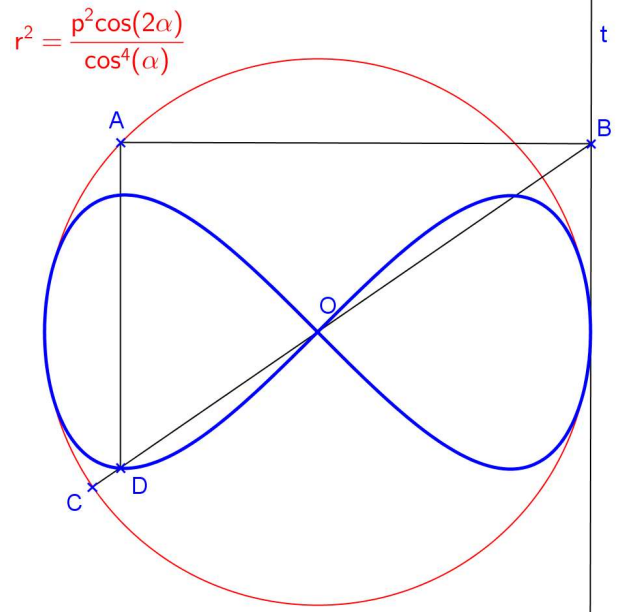
Exercício proposto:

Construa 3 curvas bicorne usando cada uma das definições. Nas curvas das definições 2 e 3 verifique as relações das medidas de AB com o raio OE.

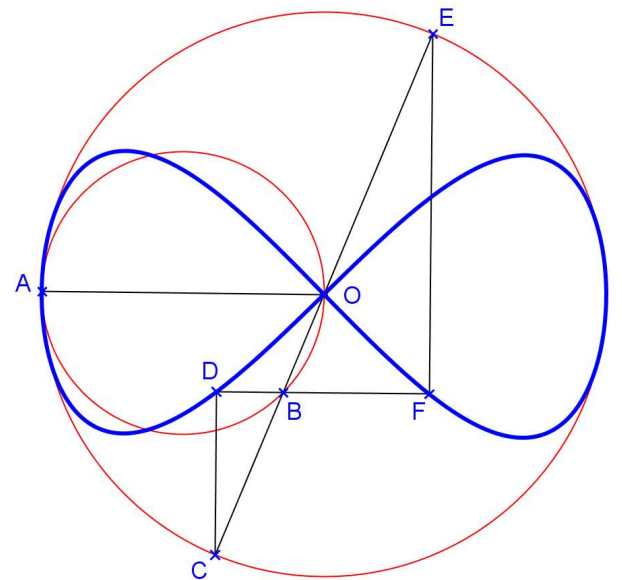
Lemniscata de Geron

A curva similar ao símbolo de infinito, pode ser construída como três lugares geométricos:

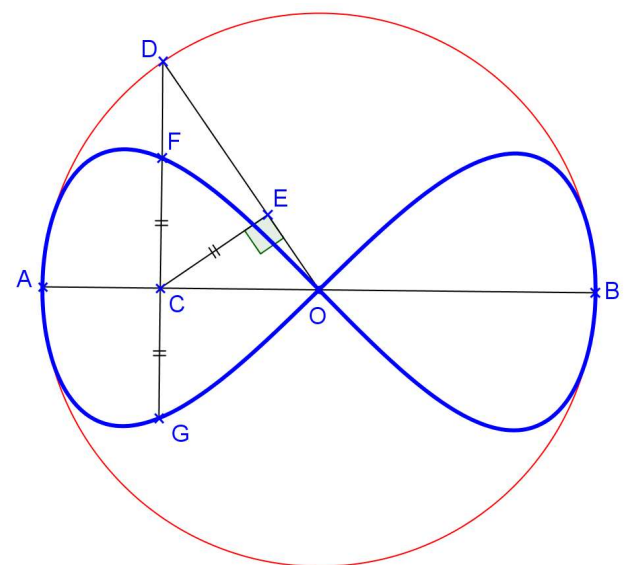
Definição 1: Dadas uma circunferência, uma reta tangente à circunferência t e um ponto A da circunferência, determine AB perpendicular a t e BC passando por O . A interseção de AD paralelo a t com BC é o lugar geométrico definido como lemniscata de Geron.



Definição 2: Dadas as circunferências tangentes, uma de raio AO e outra de diâmetro AO , e um ponto B pertencente à menor, determine o diâmetro da maior que passa por B . As interseções de $DF \parallel AO$ com $CD \perp AO$ e $EF \perp AO$ é a lemniscata de Geron.



Definição 3: Sejam a circunferência de diâmetro AB , o ponto C em AB e $CD \perp AB$. Considerando $CE \perp OD$ e $CF = CG = CE$, o lugar geométrico de F e G é a lemniscata de Geron.

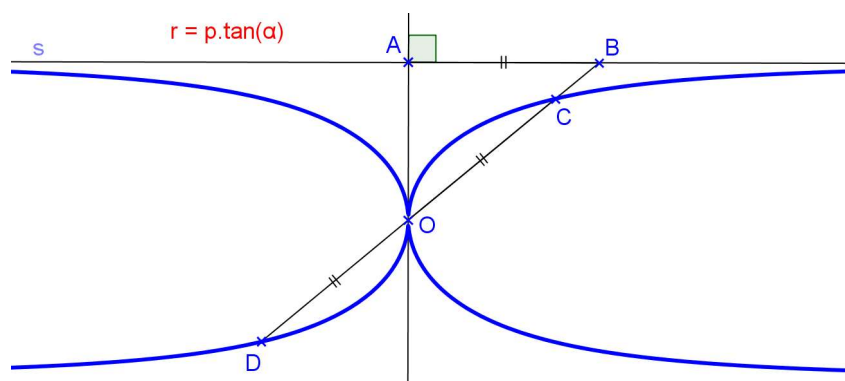


Exercício proposto:

Construa 3 lemniscatas de Geron usando cada uma das definições.

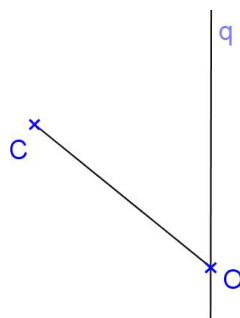
Kappa

Definição: kappa ou curva Gutschoven é uma curva algébrica bidimensional semelhante à letra κ do alfabeto grego. Dados um ponto O e uma reta s , considere $AO \perp s$ e $B \in s$. Unindo B com O e determinando $OC = AB$, onde $C \in OB$, o lugar geométrico de C é a curva kappa.



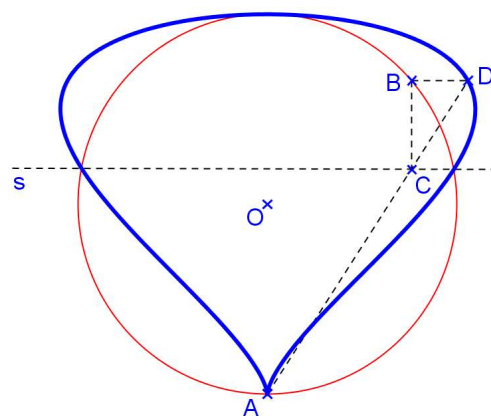
Exercícios propostos:

1. Construir uma curva kappa dados o ponto O e a reta s .
2. Dados os pontos O e C , onde C pertence à curva kappa, e a reta q que passa por A , determine a reta s da curva kappa. Determine mais 2 pontos da curva.



Quártica piriforme

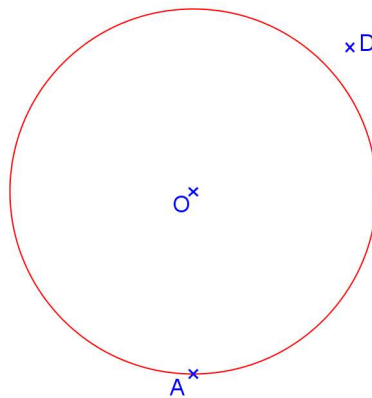
Definição: Dados uma circunferência de centro O e raio OA , uma reta s e um ponto B da circunferência. Considere $BC \perp s$, e o ponto A fixo. Unindo A e C , o ponto D será a interseção de $BD \parallel s$ com AC , e seu lugar geométrico será a quártica piriforme (forma de pêra ou lágrima).



Exercícios propostos:

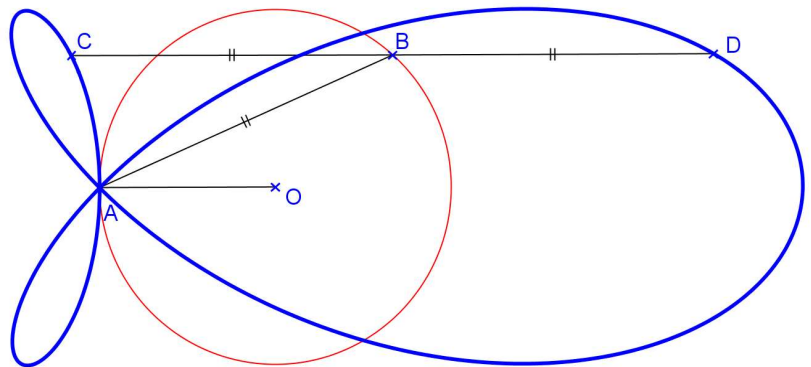
1. Construir uma quártica piriforme dados: a circunferência, o ponto A e a reta s .

2. Dados a circunferência, o ponto fixo A e o ponto D da curva, determine a reta s da curva piriforme. Determine mais dois pontos da curva.



Torpedo

Definição: Dados uma circunferência de raio AO, com ponto A fixo, e um ponto B na circunferência, determine CD passando por B tal que $AB = BC = BD$ e $CD \parallel AO$. O lugar geométrico de C e D é a curva torpedo.

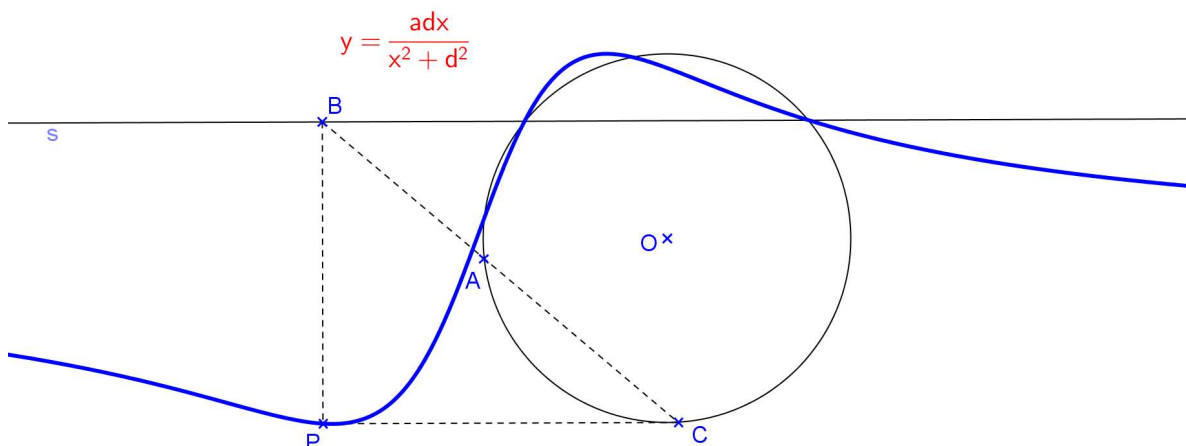


Exercício proposto:

1. Construir uma curva torpedo dados: a circunferência, o ponto A e a reta s.
2. Construa três circunferências com raios iguais. Determine um A ponto de uma delas com rotação de ângulo α em relação a um ponto P, na segunda determine um ponto B com rotação de $-\alpha$ e na terceira um ponto C com rotação 2α . Encontre o lugar geométrico do baricentro do triângulo ABC.

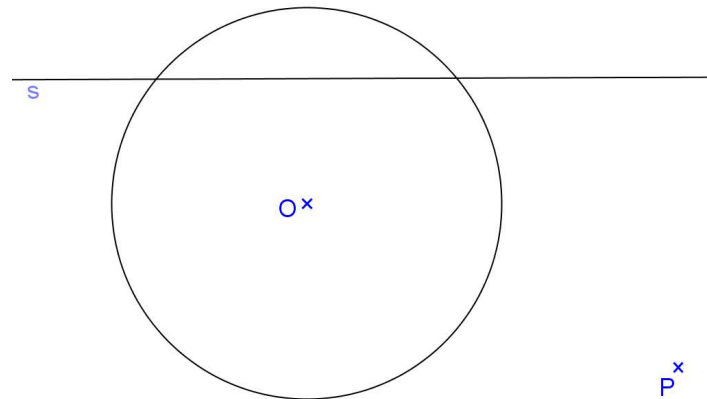
Serpentina

Definição: Dadas uma circunferência de raio AO, sendo A fixo, e uma reta s, considere um ponto $B \in s$ tal que $BP \perp s$. Unindo A e B encontramos C na circunferência. A interseção de BP com $CP \parallel s$ é um dos pontos da curva chamada serpentina.

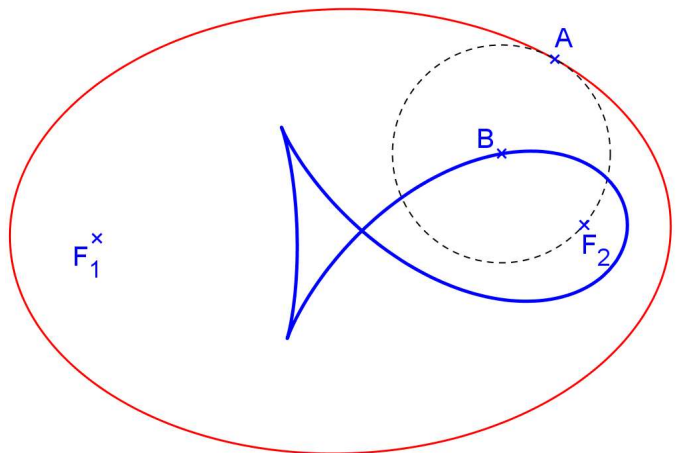


Exercícios propostos:

1. Construir uma serpentina dados: a circunferência, o ponto A e a reta s.
2. Dados a circunferência, a reta s e o ponto P da serpentina, determinar o ponto fixo A. Encontre mais dois pontos da curva.

**Curva de Talbot**

Definição: é o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a uma elipse que passam por um dos focos ou pelo centro da elipse. No exemplo ao lado, a curva é definida pelo foco F_2 .

**Exercício proposto:**

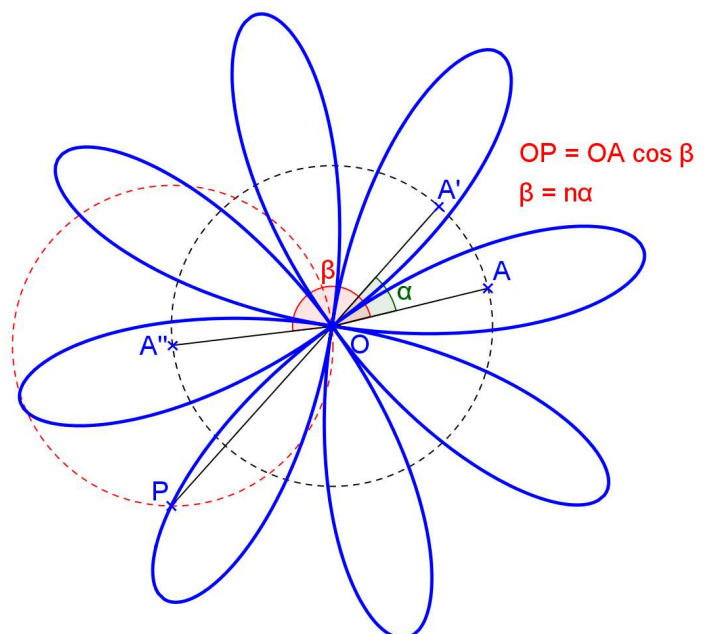
Construir a curva de Talbot com as circunferências tangentes à elipse passando pelo centro.

Rosácea

Definição: As rosáceas são obtidas através da trajetória da interseção de uma reta, que forma ângulo α com AO ($A'P$), e uma circunferência, que forma ângulo β com AO. A relação entre os ângulos é $\beta = n\alpha$.

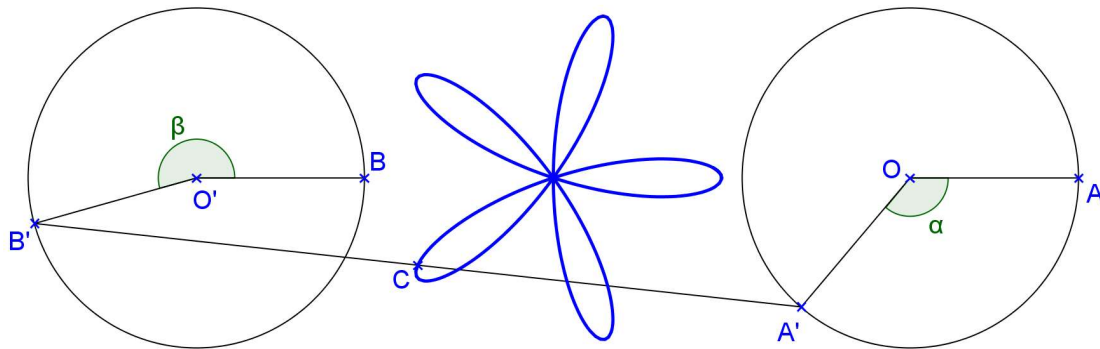
Exercício proposto:

Construir rosáceas com $n = 2, 3, 4, 5$ e 6 .



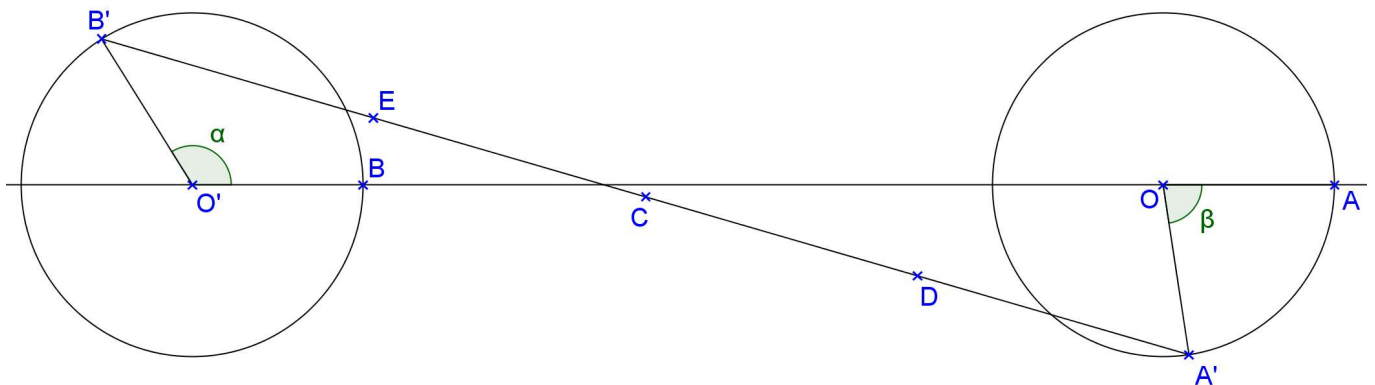
Ciclóide centrada

Definição: Considere as circunferências de centros O e O' com raios iguais, um ângulo θ , e os raios OA e OB alinhados. Defina os ângulos α e β nas circunferências, tais que $\alpha = \widehat{AOA'} = n \cdot \theta$ e $\beta = \widehat{BOB'} = -m \cdot \theta$, onde m e n são números naturais. O lugar geométrico dos pontos médios de $A'B'$ é a ciclóide centrada.



Exercício proposto:

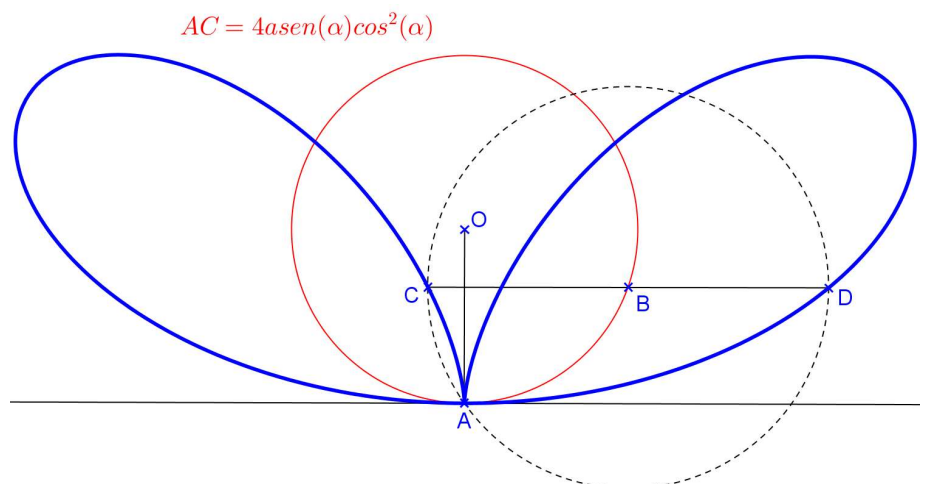
Construir as ciclóides centradas usando os pontos médios de $A'B'$, $B'C$ e CA' , conforme mostra a figura a seguir.



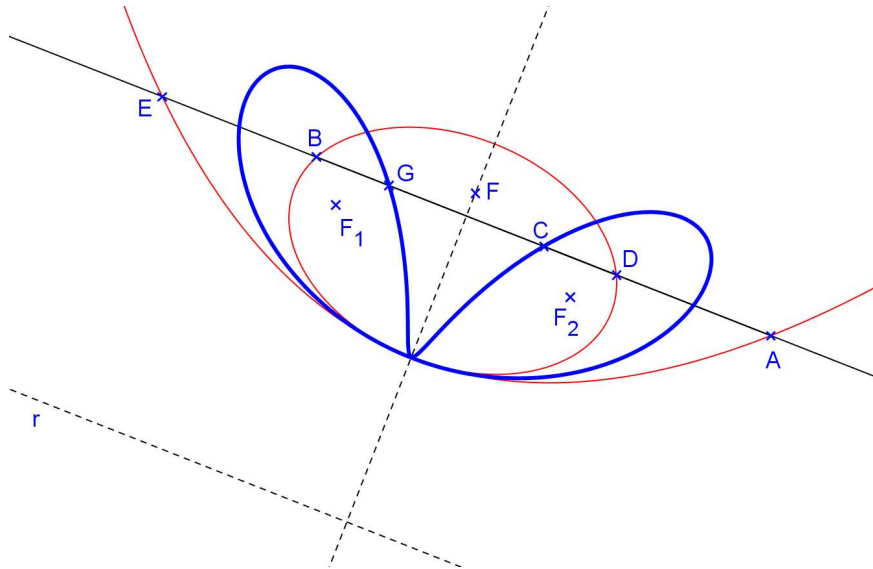
Bifolium

Existem três construções para a curva bifolium:

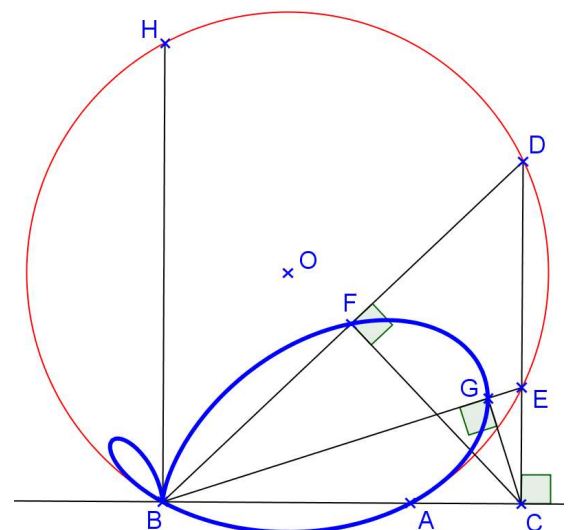
Definição 1: Dadas a circunferência de raio AO , onde A é fixo e a reta tangente t . Considere a circunferência de centro B e raio BA . As extremidades dos diâmetros paralelos à reta t determinam a curva bifolium.



Definição 2: Considere uma elipse e uma parábola, tangentes no vértice principal da parábola coincidente com o vértice do eixo menor da elipse. Seja uma reta $BD \parallel r$, onde r é a diretriz da parábola. O lugar geométrico dos pontos médios de AB e ED , onde A e E pertencem à parábola e B e D determinam a curva bifolium.



Definição 3: Considere uma circunferência com os pontos A e B fixos e um ponto C sobre a reta AB . Sejam $CD \perp BC$, $CF \perp BD$ e $CG \perp BE$. O lugar geométrico de F e G é a curva bifolium irregular.

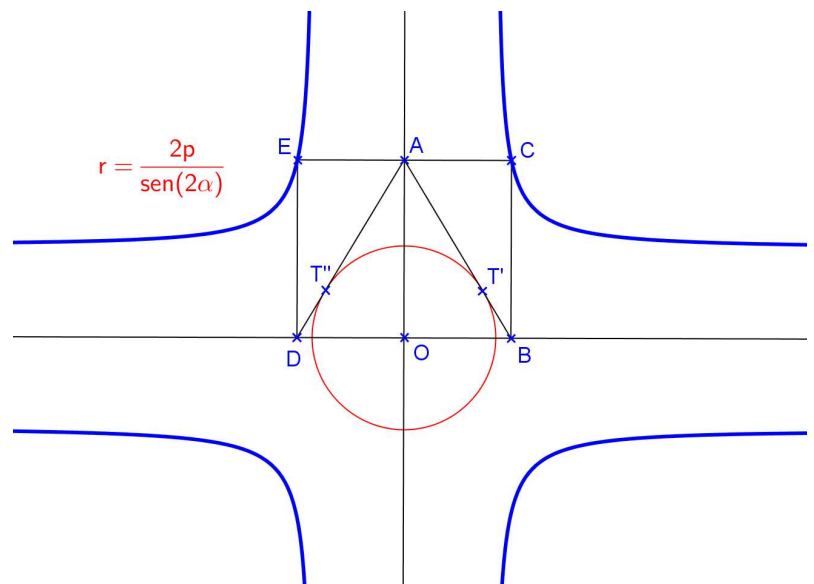


Exercício proposto:

Construa 3 curvas bifolium usando cada uma das definições. Utilize posições diferentes da elipse e da parábola na definição 2 para obter curvas diferentes.

Crosscurve

Definição: Dados uma circunferência e dois diâmetros perpendiculares, determine um ponto A pertencente a uma reta suporte de um destes diâmetros. Construa as retas tangentes à circunferência que passam por A , determinando os pontos B e D no outro diâmetro. Se $BC \parallel AO$ e $AC \parallel OB$, então C pertence à crosscurve (curva em forma de cruz).

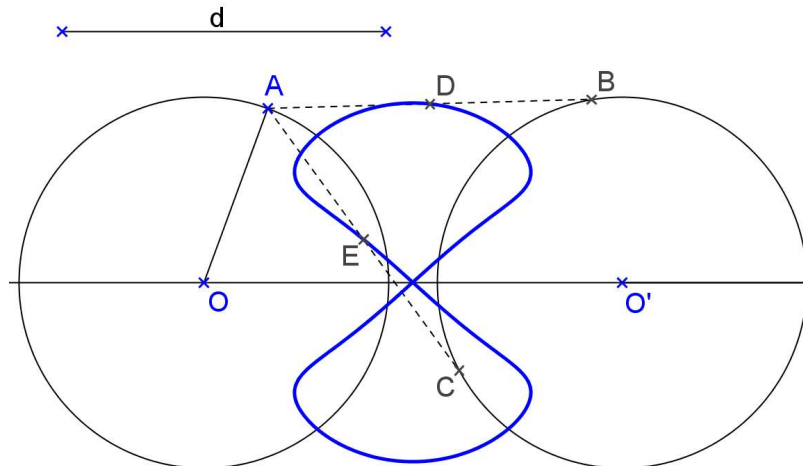


Exercício proposto:

Construa uma crosscurve, dada uma circunferência de raio 2cm.

Curva de Watt

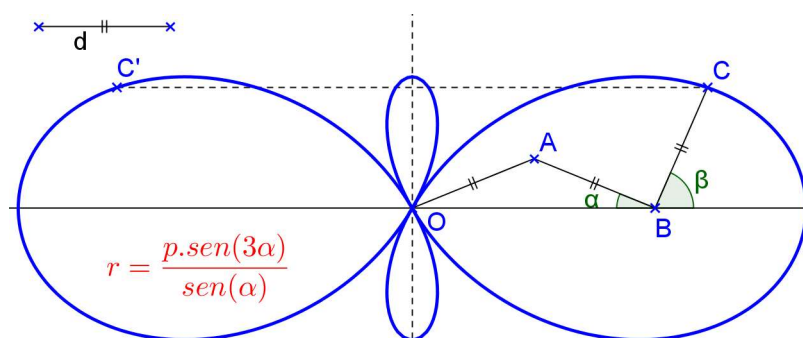
Definição: Dadas as circunferências de centros O e O' , com raios iguais a AO , um segmento d e o ponto móvel A , determine na circunferência de centro O' os pontos: B tal que $AB = d$ e C tal que $AC = d$. O lugar geométrico de D e E , pontos médios de AB e AC , é a curva de Watt, ou lemniscóide.

**Exercício proposto:**

Construa uma curva de Watt dadas as circunferências e a distância d .

Trissetriz de Ceva

Definição: Dados uma reta e uma distância fixa d , determine: B tal que $AO = AB = d$ e $AOB = ABO = \alpha$; C tal que $BC = AB = d$ e $\beta = 3\alpha$. O lugar geométrico de C é a trissetriz de Ceva.

**Exercícios propostos:**

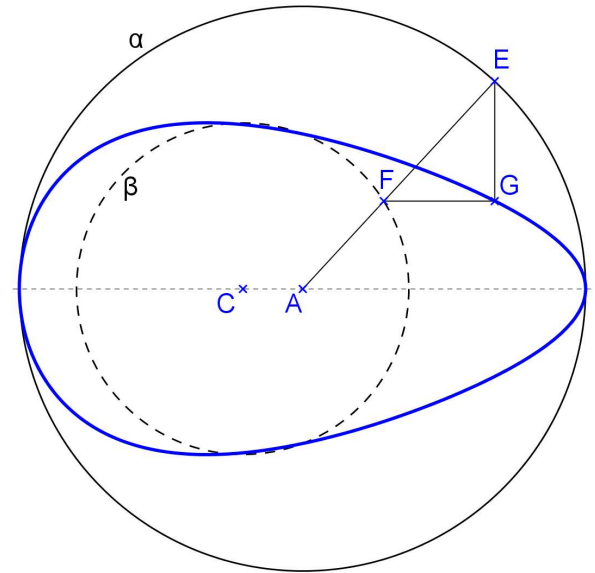
1. Construa uma trissetriz de Ceva, dado $d = 2,5\text{cm}$.
2. Construa três circunferências com raios iguais. Determine um A ponto de uma delas com rotação de ângulo α em relação a um ponto P , na segunda determine um ponto B com rotação de $-\alpha$ e na terceira um ponto C com rotação 3α . Encontre o lugar geométrico do baricentro do triângulo ABC .

Oval de Hügelschäffer

Definição: Dadas as circunferências α e β , determine um ponto qualquer E de α e o ponto F de interseção da reta AE com β . Construa FG paralelo a AC e EG perpendicular a AC. O lugar geométrico de G é a oval de Hügelschäffer.

Exercício proposto:

Construa uma oval de Hügelschäffer com circunferências α e β dadas.

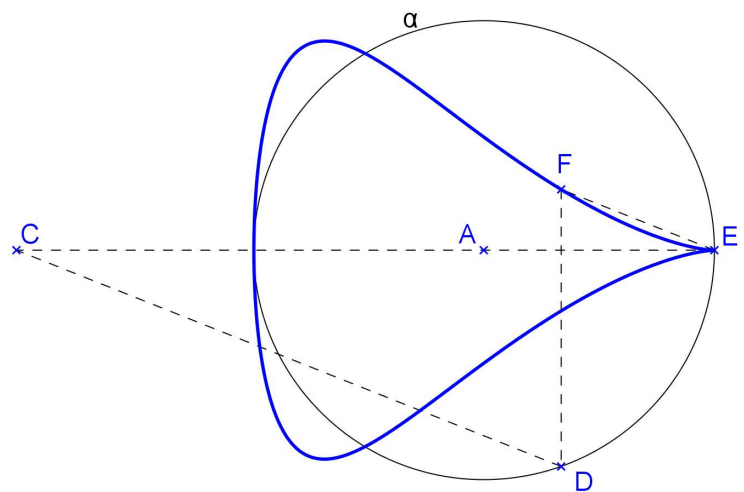


Curva de Rosillo

Definição: Dados a circunferência α de centro A, e o ponto C, determine o ponto E de interseção da reta AC com α . Determine um ponto D de α e construa as retas DF perpendicular a AC e EF paralela a CD. O lugar geométrico de F é a curva de Rosillo.

Exercício proposto:

Construa uma curva de Rosillo, dados um ponto C e uma circunferência α .

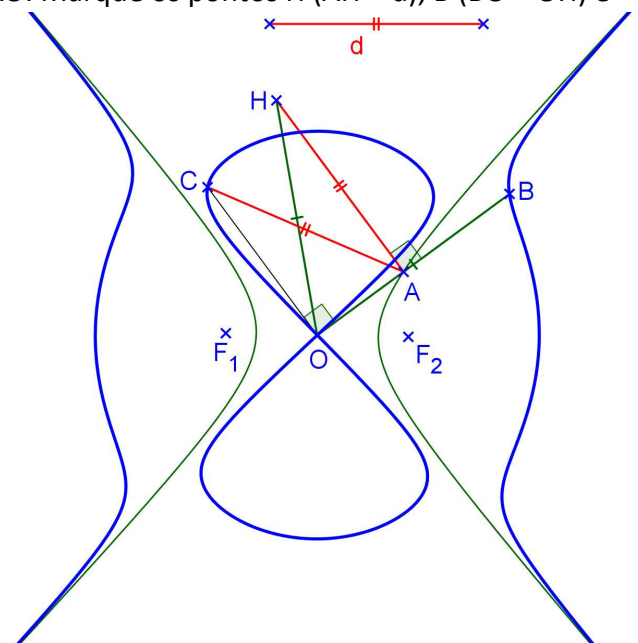


Curva de Cramer-Lacroix

Definição: Também chamada de “curva do diabo”, esta curva tem como elementos iniciais uma hipérbole de focos F_1 e F_2 e um segmento d. Determine um ponto A da hipérbole e trace as retas AO, AH e OC, onde OC e AH são perpendiculares a AO. Marque os pontos H ($AH = d$), B ($BO = OH$) e C ($AC = d$). O lugar geométrico dos pontos B e C é a curva de Cramer-Lacroix.

Exercícios propostos:

1. Construa uma curva de Cramer-Lacroix, dadas uma distância d e uma hipérbole.
2. Construa uma curva de Cramer-Lacroix em uma elipse, com uma distância dada d.

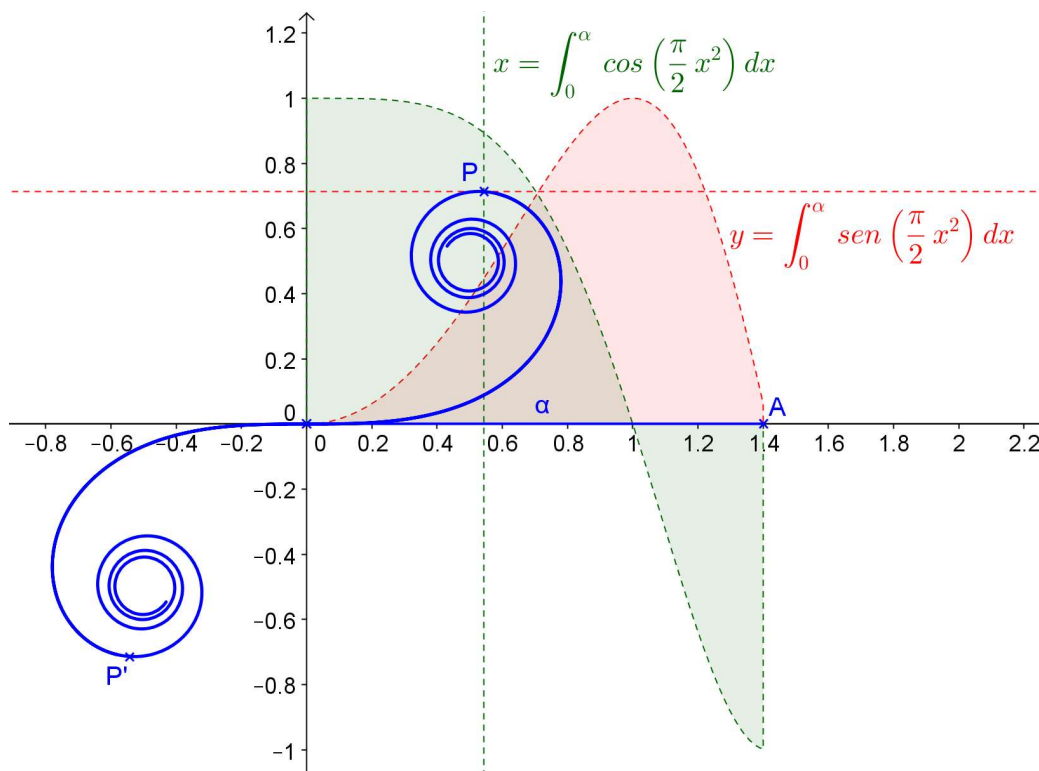


1.5. CURVAS PARAMÉTRICAS

Algumas curvas que vimos como lugares geométricos também podem ser representadas na forma paramétrica, ou seja, usando-se uma equação com parâmetros que envolvem ângulos ou segmentos.

Espiral de Cornu ou espiral de Euler

Definição: A espiral de Cornu, também conhecida como clotóide e como espiral de Euler, é uma curva cujo raio de curvatura varia linearmente ao longo de seu comprimento. Esta curva assegura um decrescimento linear do raio de curvatura com o caminho percorrido ao longo do seu desenvolvimento, proporcionando assim uma variação gradual da curvatura.



Exercício proposto:

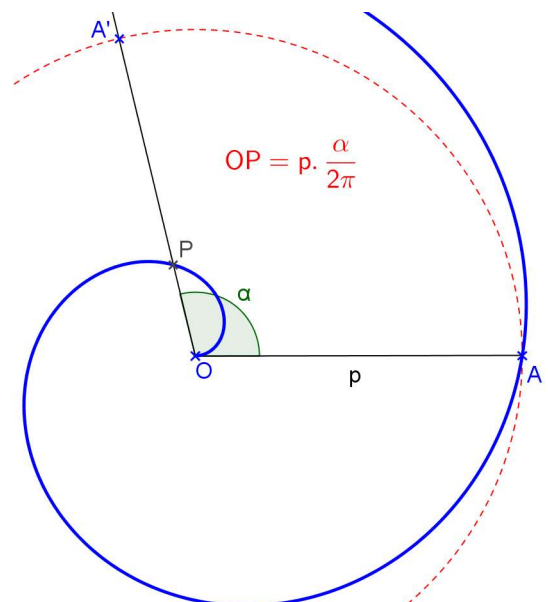
Encontrar um dos pontos da espiral com a equação e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.

Espiral de Arquimedes

Definição: um ponto P da espiral de Arquimedes satisfaz a equação polar $OP = p \cdot \alpha / (2\pi)$, onde O é o centro e p o parâmetro da curva.

Exercício proposto:

Encontrar um dos pontos da espiral com a equação e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.



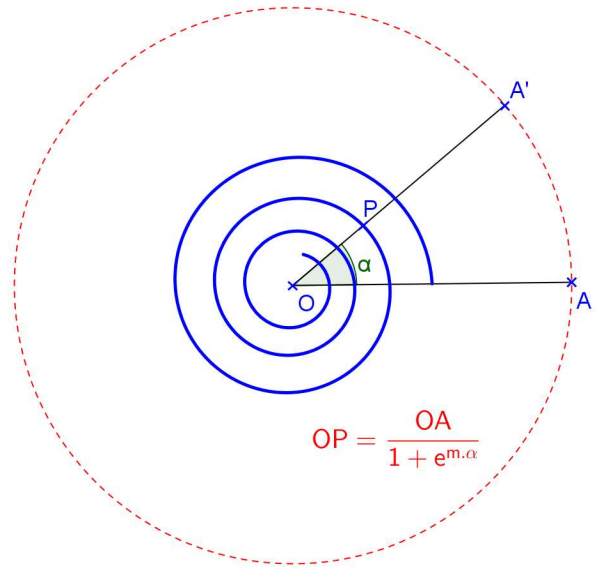
Espiral curva

Definição: um ponto P da espiral curva, similar à mola de bobina de relógio, satisfaz a equação polar $OP =$

$\frac{OA}{1 + e^{m \cdot \alpha}}$, onde O é o centro, OA e m são parâmetros da curva.

Exercício proposto:

Encontrar um dos pontos da espiral com a equação e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.



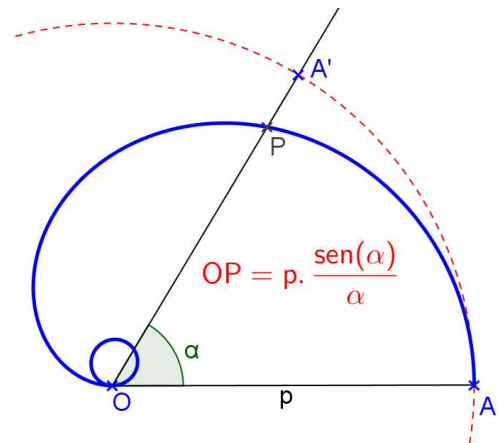
Espiral cóclea (caracol)

Definição: um ponto P da espiral cóclea (caracol) satisfaz a

equação polar $OP = \frac{p \cdot \sin(\alpha)}{\alpha}$, onde O é o centro e p o parâmetro da curva.

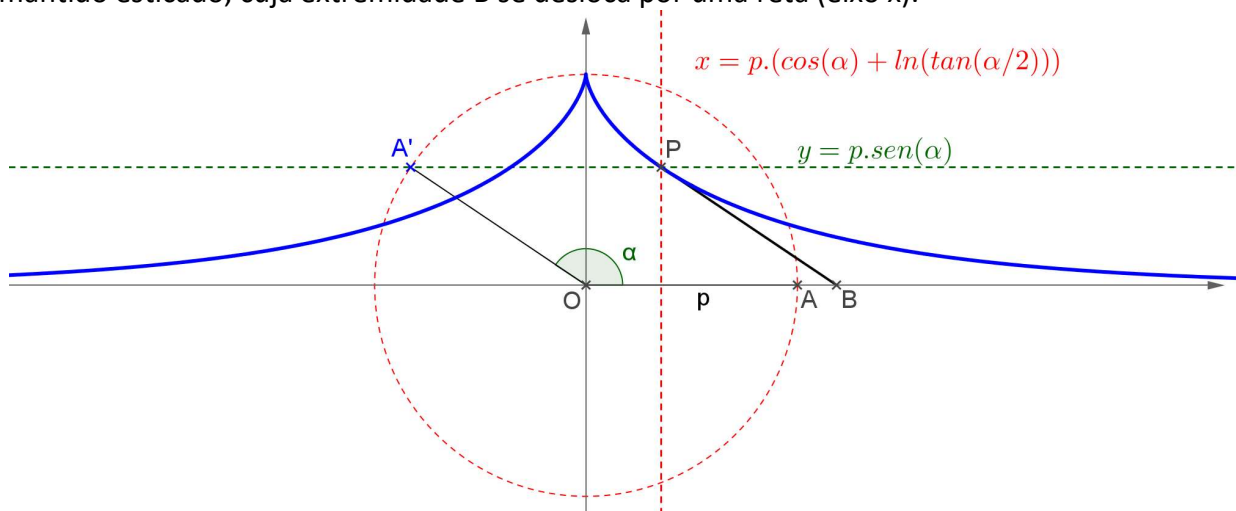
Exercício proposto:

Encontrar um dos pontos da espiral com a equação e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.



Tratriz

Definição: É a curva da trajetória de uma extremidade P de um fio inextensível de comprimento $AO=p$ mantido esticado, cuja extremidade B se desloca por uma reta (eixo x).

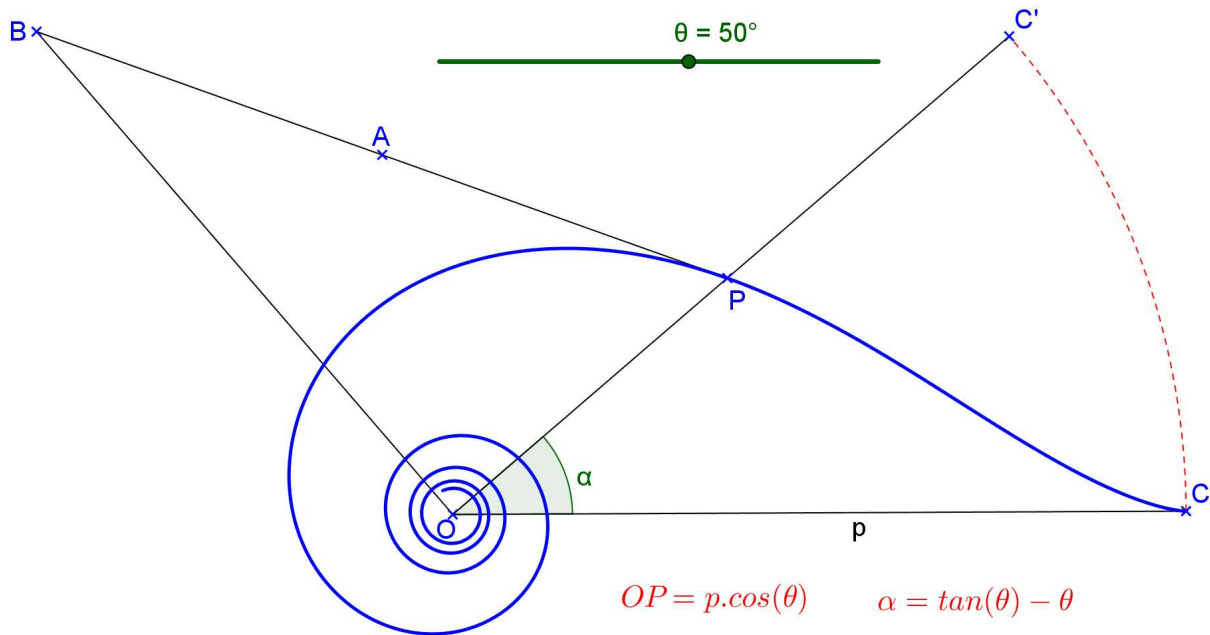


Exercício proposto:

Encontrar um ponto P da tratriz com as equações e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva. Encontre um ponto B do eixo x tal que $BP = p$. Defina o lugar geométrico dos pontos de interseção da perpendicular ao eixo x que passa por B com a perpendicular a BP que passa por P.

Espiral tratriz

Definição: É a curva da trajetória de uma extremidade P de um fio inextensível de comprimento $p/2$ mantido esticado, cuja extremidade A se desloca por uma circunferência de raio $p/2$.

**Exercício proposto:**

Encontrar um ponto P da espiral tratriz com as equações e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.

Encontre um ponto A da circunferência tal que $AP = p/2$.

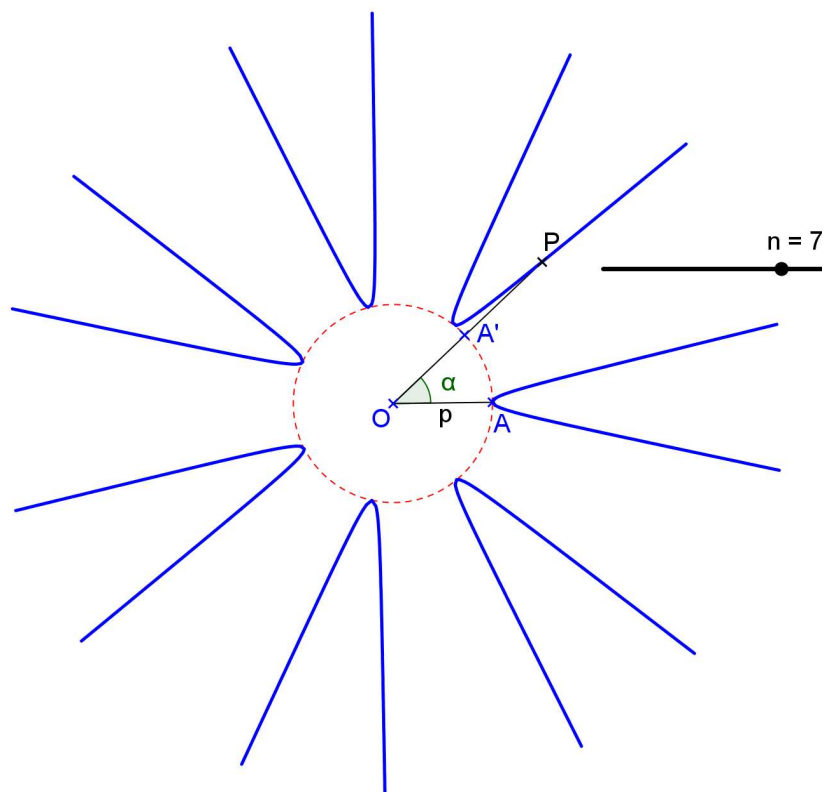
Defina a interseção de AP com a perpendicular a OP que passa por O. Ao movimentar o ponto P a distância AB é modificada?

Epi

Definição: Dados o número n e a circunferência de centro O e raio $AO = p$, o ponto P da curva EPI satisfaz a equação: $OP = \frac{p}{\cos(n \cdot \alpha)}$.

Exercício proposto:

Encontrar um dos pontos da espiral com a equação e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.

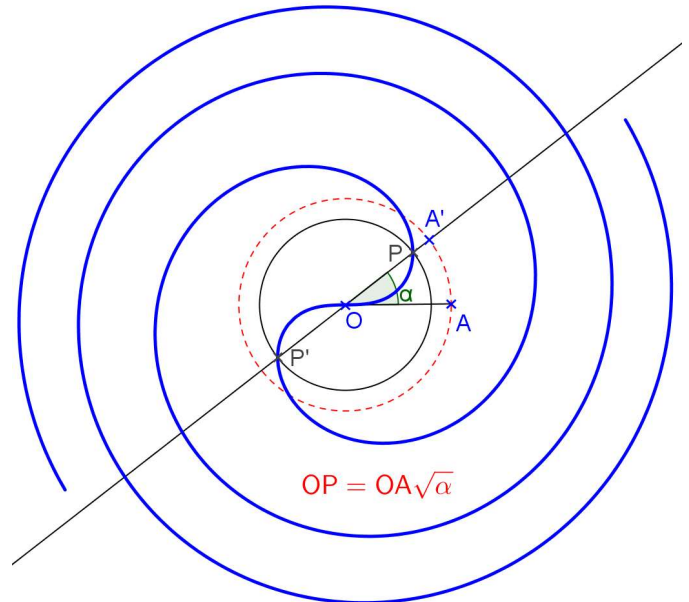


Espiral de Fermat

Definição: um ponto P da espiral de Fermat satisfaz a equação $OP = p\sqrt{\alpha}$, onde O é o centro e p = OA o parâmetro da curva.

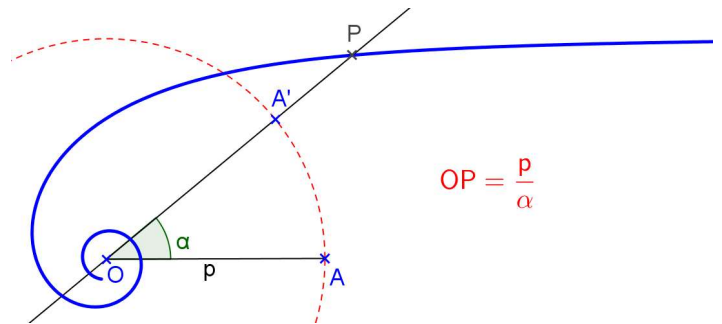
Exercício proposto:

Encontrar um dos pontos da espiral com a equação e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.



Espiral hiperbólica

Definição: um ponto P da espiral Hiperbólica satisfaz a equação $OP = \frac{p}{\alpha}$, onde O é o centro e p o parâmetro da curva. Começa em uma distância infinita do ponto central (para α próximo de zero), e se enrola cada vez mais rapidamente à medida que α se aproxima de 2π .

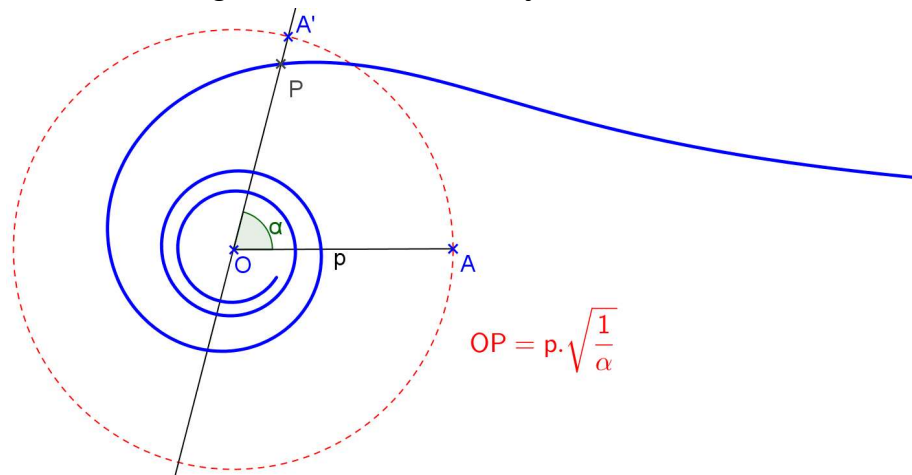


Exercício proposto:

Encontrar um dos pontos da espiral com a equação e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.

Espiral Lituus

Definição: é a curva plana na qual o ângulo é inversamente proporcional ao quadrado do raio. Esta espiral se aproxima cada vez mais da origem, mas nunca a alcança.

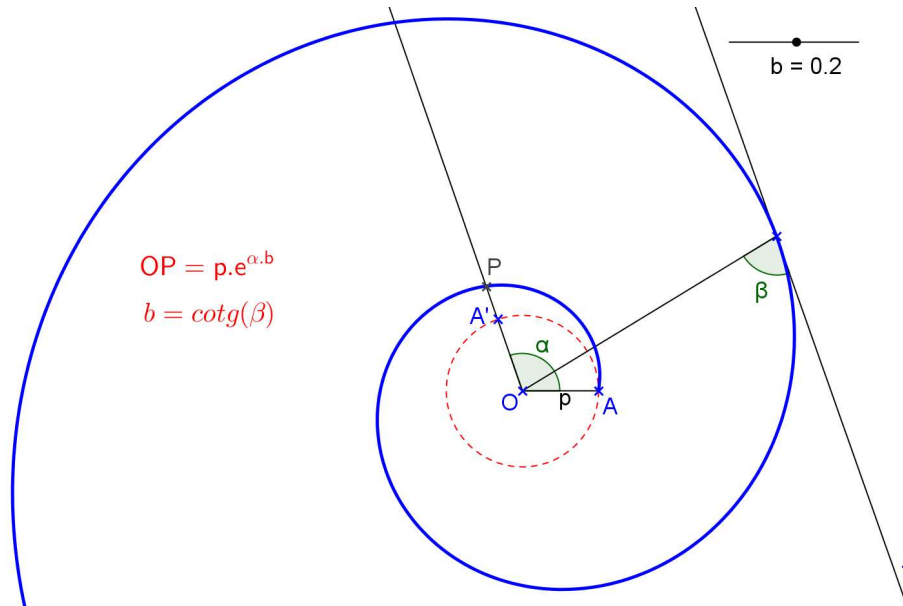


Exercício proposto:

Encontrar um ponto da espiral com a equação e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.

Espiral logarítmica

Definição: um ponto P da espiral logarítmica satisfaz a equação $OP = p \cdot e^{\alpha \cdot b}$, onde $b = \cotg(\beta)$, β é o ângulo polar tangencial, O é o centro e p o parâmetro da curva. Esta curva forma com todas as retas situadas no seu plano e passando por um ponto fixo desse plano um ângulo polar tangencial β constante.



Exercício proposto:

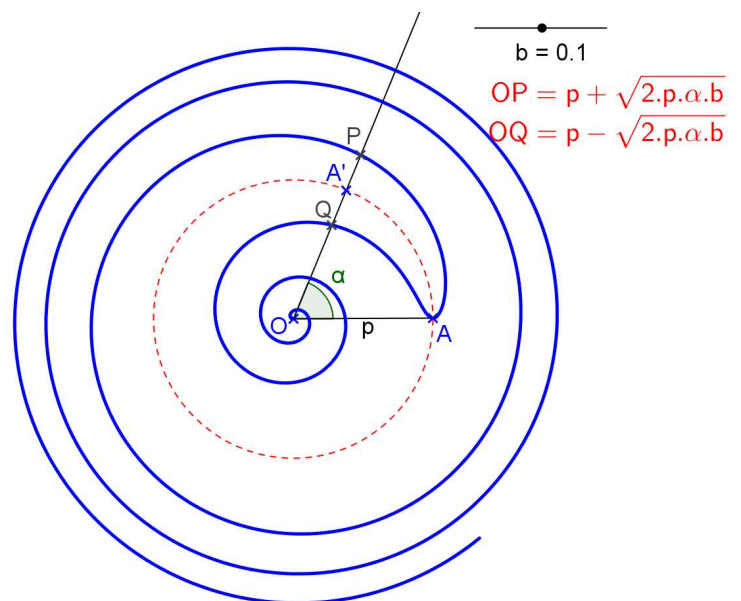
Encontrar um dos pontos da espiral com a equação e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.

Espiral parabólica

Definição: um ponto P da espiral parabólica satisfaz a equação $OP = p \pm \sqrt{2 \cdot b \cdot p \cdot \alpha}$, onde O é o centro, p e b são os parâmetros da curva.

Exercício proposto:

Encontrar um dos pontos da espiral com a equação e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.

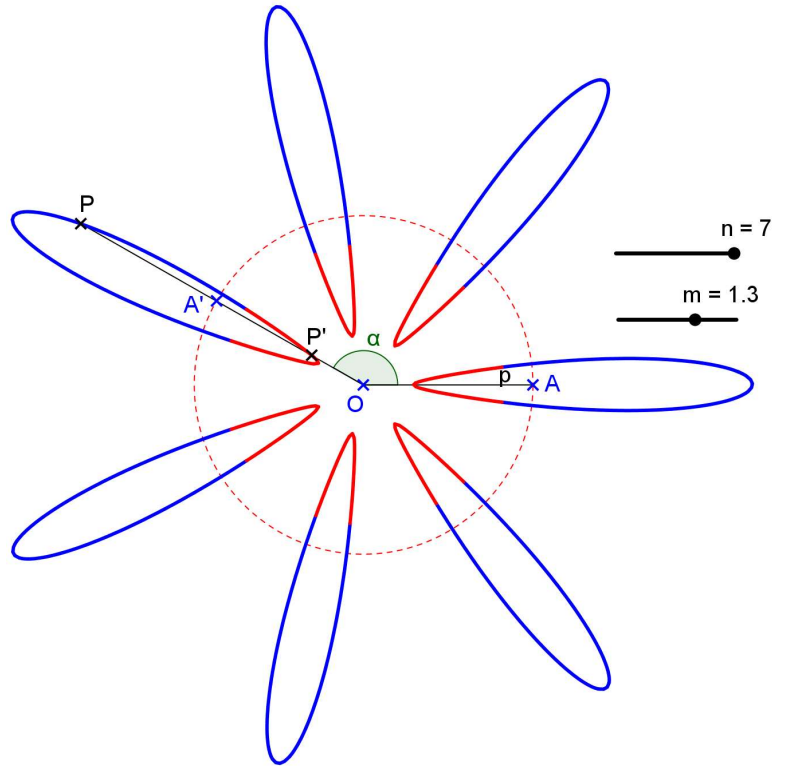


Folióide

Definição: Dados os números m e n e a circunferência de centro O e raio $AO = p$, os pontos P e P' da foliáide satisfazem as equações:

$$OP = p \left(m \cdot \cos(n \cdot \alpha) + \sqrt{1 - (m \cdot \sin(n \cdot \alpha))^2} \right)$$

$$OP' = p \left(m \cdot \cos(n \cdot \alpha) - \sqrt{1 - (m \cdot \sin(n \cdot \alpha))^2} \right)$$



Exercício proposto:

Encontrar um dos pontos da curva com a equação e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.

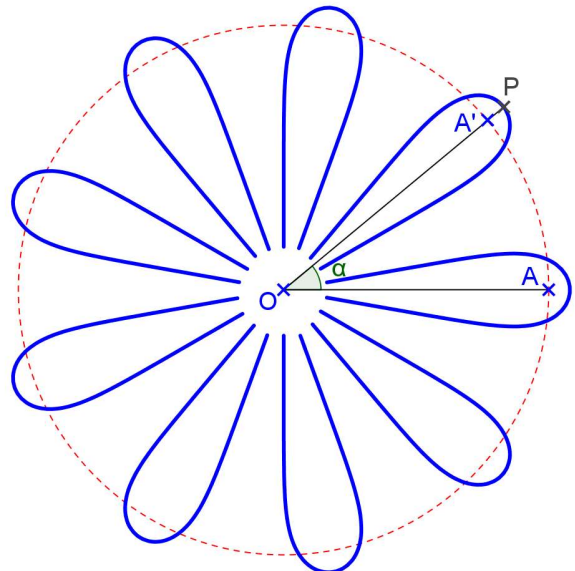
Espiral Sinusoidal

Definição: Dados o número n e a circunferência de centro O e raio $AO = p$, o ponto P da espiral sinusoidal satisfaz a equação $OP = p \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(n \cdot \alpha)$.

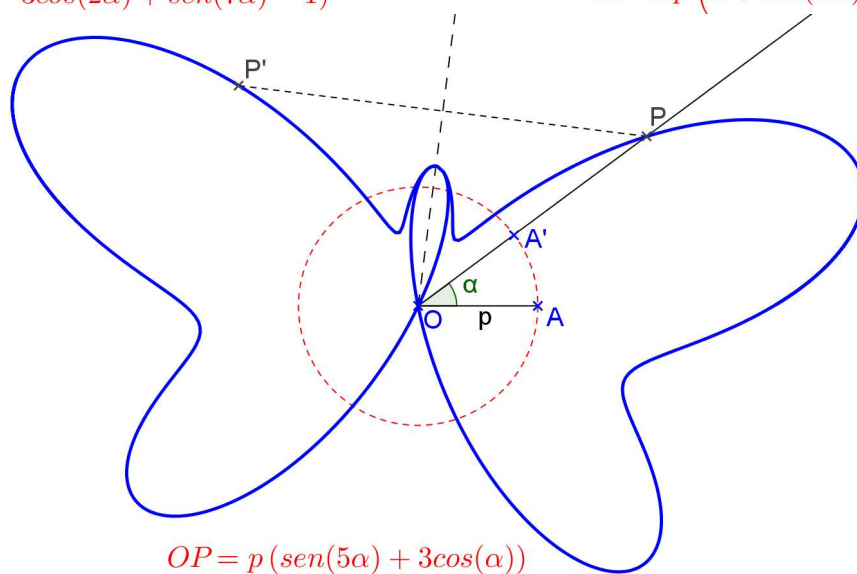
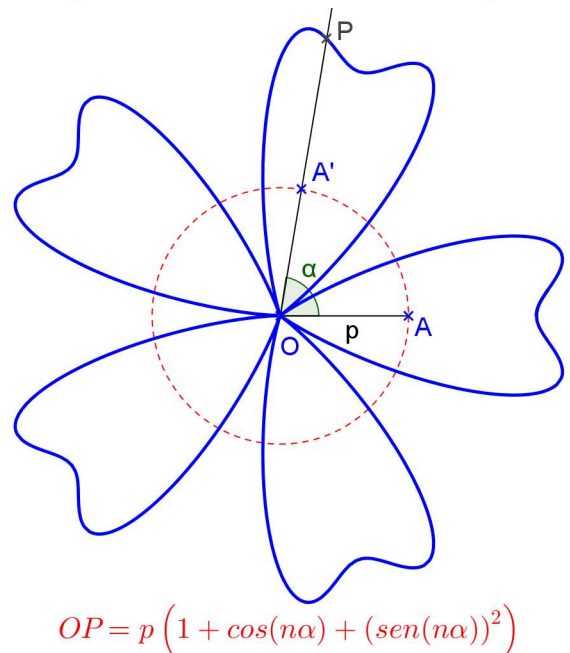
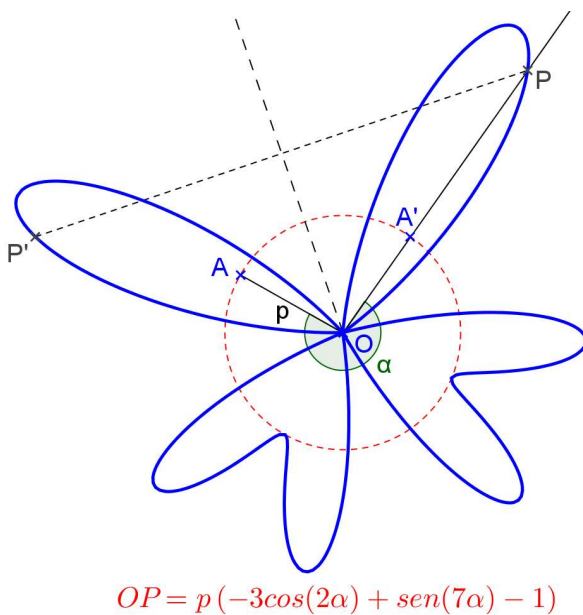
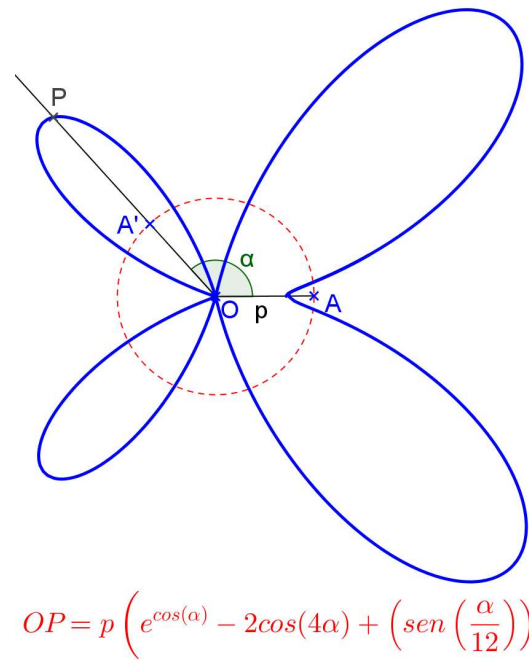
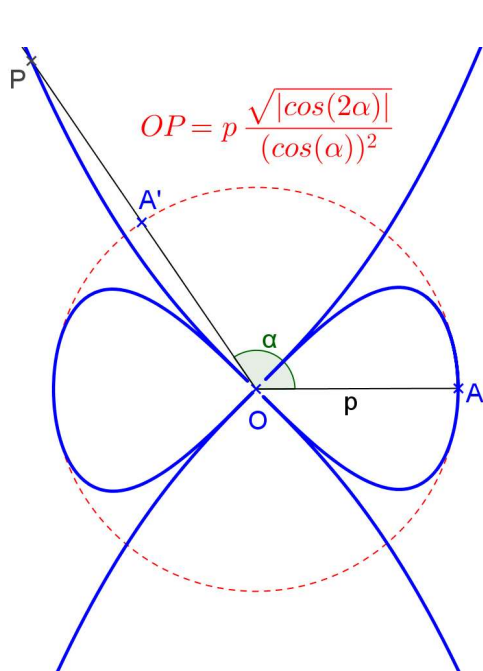
$$n = 9$$

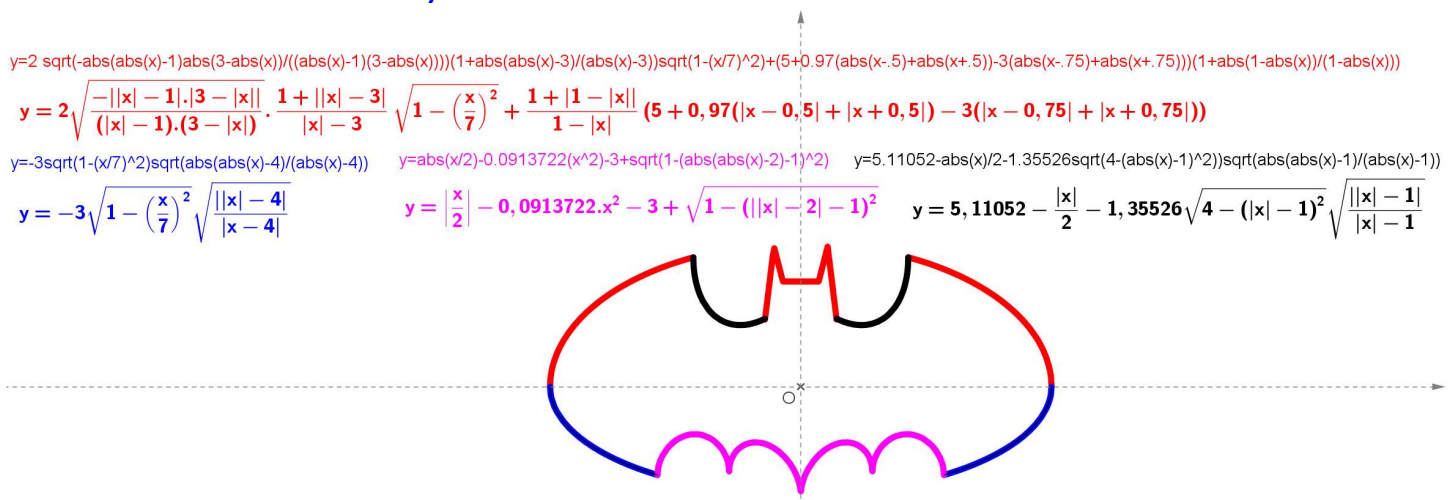
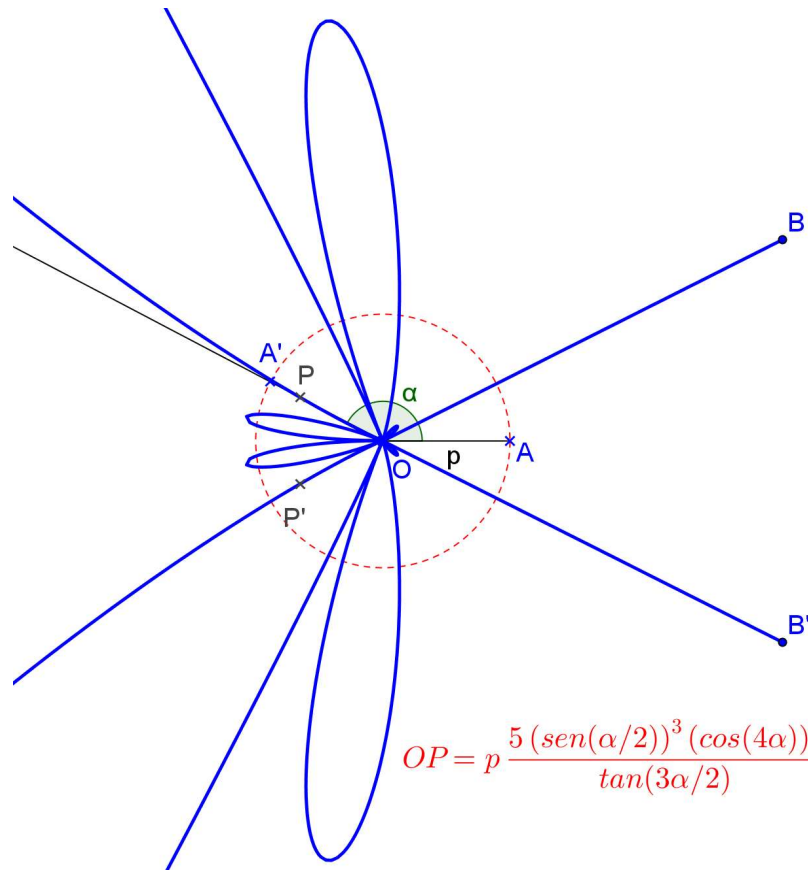
Exercício proposto:

Encontrar um dos pontos da espiral com a equação e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar a curva.



Curvas ornamentais





Exercícios propostos:

Encontrar um dos pontos das curvas com equações dadas abaixo e usar a ferramenta *lugar geométrico* para determinar as curvas:

1. $OC = 1 + \cos(n \cdot \alpha) + (\operatorname{sen}(n \cdot \alpha))^2$. Faça $n = 3, 4$ e 5 .

2. $OC = \frac{p \cdot \cos(2\alpha)}{(\cos(\alpha))^2}$.

3. $OC = p \cdot |\tan(\alpha)|^{\frac{1}{|\tan(\alpha)|}}$.

4. $OC^2 = p \cdot \tan(2\alpha)$.

$$5. OC^2 = p. |\cotg(2\alpha)|.$$

$$6. OC^2 = p.\alpha(2\beta - \alpha), \text{ onde } 0 \leq \alpha \leq \beta.$$

$$7. OC^2 = \frac{p.\alpha}{\alpha + \beta}.$$

$$8. OC = p.\cos(\alpha).\cos(2\alpha)$$