FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Introdução

Considere os seguintes enunciados:

- O volume V de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, onde r é o raio e h é a altura.

- Um circuito tem cinco resistores. A corrente deste circuito é função das resistências $R_i \, (i = 1,2,...,5)$.

Analisando esses enunciados, verificamos que as funções envolvidas requerem o uso de duas ou mais variáveis independentes.

- O volume do cilindro denotado por V é uma função do raio r e da altura h. Assim:

$$V = V(r,h)$$
$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

- Sobre o circuito, podemos dizer que a corrente do circuito dado é uma função de cinco variáveis independentes. Temos:

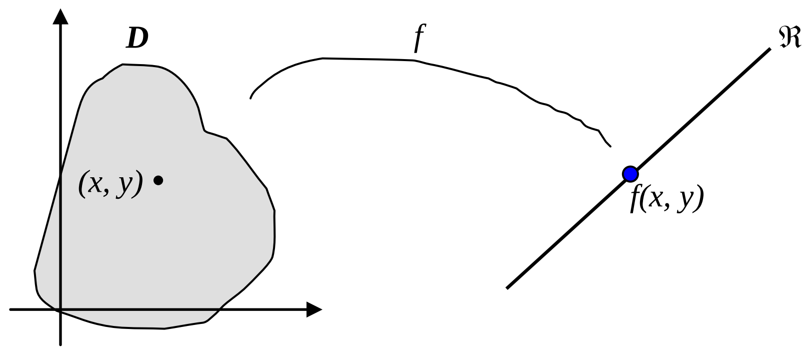
$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + ... + R_5}$$

onde E representa a tensão da fonte.

$$I(R_1 + R_2 + ... + R_5) = \frac{E}{R_1 + R_2 + ... + R_5}$$

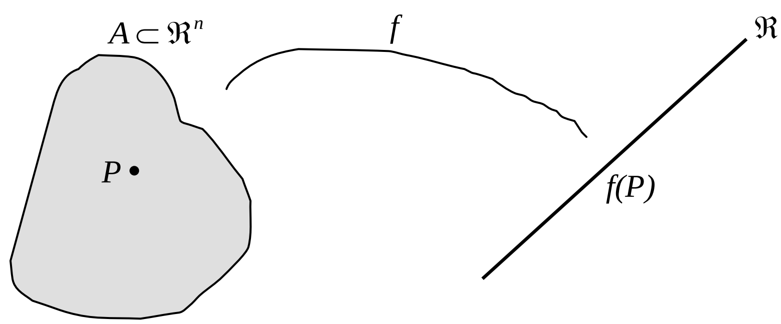
Funções de Várias Variáveis

Definição1: Seja *D* um conjunto de pares ordenados de números reais. **Uma função *f* de duas variáveis** é uma correspondência que associa a cada par *(x, y)* em *D* exatamente um número real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto ***D* é o domínio de *f*. O contradomínio de *f*** consiste em todos os números reais $f(x, y)$, com *(x, y)* em *D.*

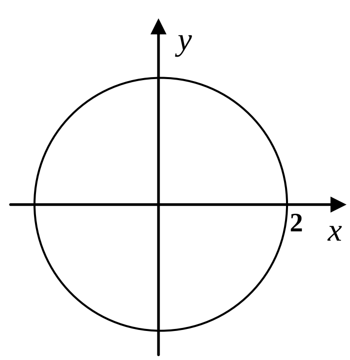


Definição2: Seja $A \subset \Re^n$. Uma função *f* definida em *A* com valores em $\Re$ é uma correspondência que associa a cada ponto de *A* um e um só número real. Os pontos de *A* são chamados variáveis independentes. O conjunto *A* é chamado **domínio de** f. O conjunto $B = \{f(P) / P \in A\}$ é chamado **imagem de *f*** e denotado por ***Im(f)***.

Notação: $f : A \subset \Re^n \to \Re$



Exemplos: Seja A o conjunto de pontos do $\Re^2$ representado na figura:



A cada ponto *(x, y)* pertencente a $A \subset \Re^2$, podemos fazer corresponder um número $z \in \Re$ dado por

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\ .$$

Neste caso, estamos diante de uma função de duas variáveis reais denotada por

$$f : A \subset \Re^2 \to \Re$$

O domínio dessa função é o conjunto $A \subset \Re^2$, isto é, o conjunto de pontos $(x, y) \in \Re^2$, tais que

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$
$$\therefore$$
$$x^2 + y^2 \leq 4$$

Logo: $D(z) = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

A imagem dessa função é o conjunto dos $z \in \Re$, tais que $0 \leq z \leq 2$:

$$\mathrm{Im}(z) = \{z \in \Re \,/\, 0 \leq z \leq 2\}$$

Exercícios: 1- Fazer uma representação gráfica do domínio das seguintes funções:

a- $f(x, y) = \ln(x - y)$

b- $g(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$

2- Seja $f(x,y)=\dfrac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$

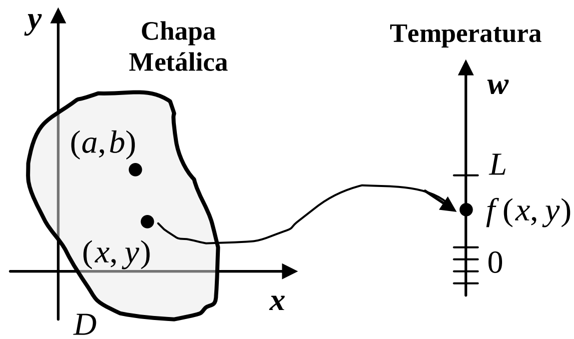
a- Esboce o domínio D de f
b- Represente os números $f(2,5)$ e $f(1,2)$ em um eixo-w

3- Seja f a função com domínio "D" dada por $f(x,y)=9-x^2-y^2$ e $D=\{(x,y)\in\Re^2 \,/\, x^2+y^2\leq 9\}$.
Esboce o gráfico de f e exiba os traços nos planos $z=0$, $z=2$, $z=4$, $z=6$ e $z=8$.

LIMITE E CONTINUIDADE EM FUNÇÕES DE DUAS OU MAIS VARIÁVEIS

Neste momento estenderemos os conceitos de limite e continuidade para as funções de duas variáveis. Esses conceitos auxiliam no desenvolvimento formal das idéias principais do cálculo diferencial das funções de várias variáveis.

Se f é uma função contínua de duas variáveis, podem interessar-nos as mudanças nos valores funcionais $f(x,y)$ quando (x,y) varia no domínio D e f. Como ilustração física, suponha que uma chapa metálica plana tenha a forma da região D da figura abaixo.



A cada ponto (x,y) da chapa corresponde uma temperatura $f(x,y)$, que é registrada em um termômetro representado pelo eixo-w. Quando o ponto (x,y) se move na chapa, a temperatura pode aumentar, diminuir ou constante, portanto, o ponto do eixo-w que corresponde a $f(x,y)$ se moverá numa direção positiva, ou numa direção negativa, ou permanecerá fixo, respectivamente. Se a temperatura $f(x,y)$ se aproxima de um valor fixo L quando (x,y) se aproxima de um ponto fixo (a,b) utilizamos a seguinte **notação**.

- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \qquad ou \qquad f(x,y) \to L \;\; quando \;\; (x,y) \to (a,b)$

Lê-se: O limite de $f(x,y)$, quando (x,y) tende para (a,b), é L.

Para dar precisão matemática procedamos como segue. Para $\in > 0$ arbitrário, consideramos o intervalo aberto $(L- \in, L+ \in)$ no eixo-w, conforme a figura abaixo. Se a notação é verdadeira, existe um $\delta > 0$ tal que para todo ponto (x,y) interior ao círculo de raio δ com centro em (a,b) exceto possivelmente o próprio (a,b) o valor funcional $f(x,y)$ está no intervalo $(L- \in, L+ \in)$.

Isto equivale a seguinte afirmação: Se $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ então $|f(x,y) - L| < \in$.

Definição de Limite: Se uma função de duas variáveis definida em todo o interior de um círculo de centro (a,b), exceto possivelmente no próprio (a,b). A afirmação

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

significa que, para todo $\in > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ então } |f(x,y) - L| < \in .$$

Exemplo1: Ache

a- $\lim_{(x,y)\to(2,-3)} (x^3 - 4xy^2 + 5y - 7)$

b- $\lim_{(x,y)\to(3,4)} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Regra dos dois caminhos: Se dois caminhos diferentes para um ponto (a,b) resulta em dois limites diferentes, então $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

Exemplo2: Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

Propriedades dos Limites de Funções de Duas Variáveis

As regras a seguir são verdadeiras se L, M, e k são números reais e

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

- Regra da Soma

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y) + g(x,y)\right] = L + M$$

- Regra da Diferença

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y) - g(x,y)\right] = L - M$$

- Regra do Produto

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \,.\, g(x,y) = L \,.\, M$$

- Regra da Multiplicação por Constante (para todo número real k)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k \,.\, f(x,y) = k \,.\, L$$

- Regra do Quociente

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \qquad se \quad M \neq 0$$

- Regra da Potência (se m e n forem inteiros, então)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y)\right]^{m/n} = L^{m/n}$$

desde que $L^{m/n}$ seja um número real.

Continuidade

A definição de continuidade de uma função *f* de duas variáveis é análoga à de uma função de uma variável.

Definição: Uma função f de duas variáveis é contínua em um ponto interior (a,b) de seu domínio se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Propriedades

- A soma de ***n*** funções contínuas em um ponto é uma função contínua no ponto.

- O produto de ***n*** funções contínuas em um ponto é uma função contínua no ponto (portanto, como conseqüência, toda função polinomial é contínua).

Exemplo:

Verificar se $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ é contínua em (0, 0)

Exercício: Mostre que $\displaystyle \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 . y}{x^4+y^2}$ não existe.

DERIVADAS PARCIAIS

Quando fixamos todas as variáveis independentes de uma função, exceto uma, e derivamos em relação a essa variável, obtemos uma **derivada parcial**.

Relembrando:
A derivada $f'(x)$ de uma função de uma variável é definida como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpretando:
Damos um acréscimo ***h*** à variável independente ***x***; em seguida, dividimos a variação correspondente de ***f***, que é ***f(x + h) – f(x)*** por ***h***; e finalmente fazemos ***h*** tender para ***0***.

Podemos então aplicar o conceito análogo às funções de diversas variáveis.

Definição: Seja f uma função de duas variáveis. As **derivadas parciais primeiras** de f em relação a x e y são as funções f_x e f_y tais que

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Podemos achar derivadas parciais sem utilizar limites, como segue:

- Para achar $f_x(x,y)$, consideramos y como constante e diferenciamos $f(x,y)$ em relação a x.
- Para achar $f_y(x,y)$, consideramos x como constante e diferenciamos $f(x,y)$ em relação a y.

Dão-se a seguir algumas notações comuns usadas para derivadas parciais.

Se $w = f(x,y)$, então

- $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou $f_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \dfrac{\partial w}{\partial x} = w_x$
- $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ou $f_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \dfrac{\partial w}{\partial y} = w_y$

Exemplo 1:

Se $f(x,y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x$, então ache

a-) $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$

b-) $f_x(2,-1)$ **e** $f_y(2,-1)$

Exemplo 2: Encontrar as derivadas parciais de 1ª ordem da seguinte função:

$g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2}$

Obs.: Valem para derivadas parciais fórmulas análogas às das funções de uma variável.

Exemplo 3: Ache $\frac{\partial w}{\partial y}$ dado $w = xy^2 . e^{xy}$

Exemplo 4: Verificar se a função $z = \ln(xy) + x + y$ satisfaz a equação $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$

Exercício: Encontrar as derivadas parciais de 1ª ordem da seguinte função:

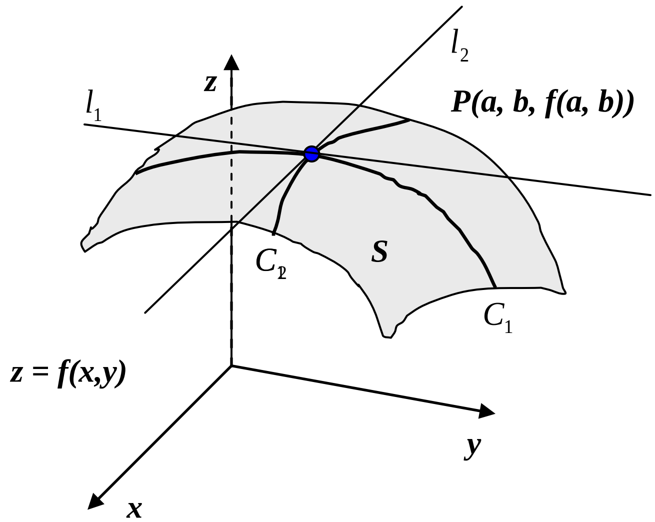
a-) $f(x, y) = 2x^2 y + 3xy^2 - 4x$

b-) $z = \text{sen}(2x + y)$

DERIVADAS PARCIAIS - Continuação

Teorema: Sejam S o gráfico de $z = f(x, y)$ e $P(a,b, f(a,b))$ um ponto de S onde f_x e f_y existem. Sejam C_1 e C_2 os traços de S nos planos $x = a$ e $y = b$, respectivamente, e sejam l_1 e l_2 as tangentes a C_1 e C_2 em P.

- O coeficiente angular de l_1 no plano-x = a é $f_y(a,b)$
- O coeficiente angular de l_2 no plano-y = b é $f_x(a,b)$



Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Quando derivamos uma função $f(x, y)$ duas vezes, produzimos suas derivadas de segunda ordem. Essas derivadas em geral são denotadas por

- $\dfrac{\partial}{\partial x} f_x \quad = \quad (f_x)_x \quad = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
- $\dfrac{\partial}{\partial y} f_x \quad = \quad (f_x)_y \quad = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
- $\dfrac{\partial}{\partial x} f_y \quad = \quad (f_y)_x \quad = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
- $\dfrac{\partial}{\partial y} f_y \quad = \quad (f_y)_y \quad = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Exemplo1: Ache as derivadas de segunda ordem para a seguinte função:

$$f(x, y) = 3x^2y^2 - 4xy + 3x$$

Exemplo2: Ache as derivadas de segunda ordem para a seguinte função:

$$f(x, y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x$$

Teorema (Schwartz): Seja f uma função de duas variáveis x e y. Se f, f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} são contínuas em uma região aberta R, então em toda R teremos:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Obs.: Definem-se de modo análogo derivadas parciais terceiras ou de ordens mais elevadas.

DIFERENCIAÇÃO PARCIAL – REGRA DA CADEIA

Se f e g são funções de uma variável tais que $w = f(u)$ e $u = g(x)$ então a função composta de f e g é dada por $w = f(g(x))$. Aplicando a regra da cadeia, podemos achar a derivada de w em relação a x como segue:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dx}$$

Agora aplicaremos está fórmula a funções de diversas variáveis.

Sejam f , g e h funções de duas variáveis tais que $w = f(u,v)$, com $u = g(x,y)$ e $v = h(x,y)$. Se para cada par (x,y) em um subconjunto D do $\Re^2$ o par correspondente (u,v) estiver no domínio de f, então

$$w = f(g(x,y), h(x,y))$$

define w como uma função composta de x e y com domínio D.

Teorema: Regras da Cadeia

Se $w = f(u,v)$, com $u = g(x,y)$ e $v = h(x,y)$, e se f , g e h são diferenciáveis, então

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Exemplo 1: Por meio de uma regra da cadeia, ache $\frac{\partial w}{\partial p}$ e $\frac{\partial w}{\partial q}$ se $w = r^3 + s^2$, com $r = pq^2$ e $s = p^2 \operatorname{sen} q$.

Obs.: Podemos aplicar regras da cadeia a funções compostas de um número arbitrário de variáveis.

Exemplo 2: Por meio de uma regra da cadeia, ache $\frac{\partial w}{\partial z}$ se $w = r^2 + sv + t^3$, com $r = x^2 + y^2 + z^2$, $s = xyz$ e $v = xe^y$ e $t = yz^2$.

Exemplo 3: Por meio de uma regra da cadeia, ache $\frac{\partial w}{\partial t}$ se $w = x^2 + yz$, com $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t - 4$ e $z = t^3$.

Exercícios:

1- Use a regra da cadeia e calcule $\frac{\partial w}{\partial x}$ **e** $\frac{\partial w}{\partial y}$

a- $w = u \operatorname{sen} v$; $u = x^2 + y^2$, $v = xy$

b- $w = uv + v^2$; $u = x \operatorname{sen} y$, $v = y \operatorname{sen} x$

2- Use a regra da cadeia e calcule $\frac{\partial w}{\partial r}$ **e** $\frac{\partial w}{\partial s}$

a- $w = u^2 + 2uv$; $u = r \ln s$, $v = 2r + s$

b- $w = e^{tv}$; $t = r + s$, $v = rs$

3- Use a regra da cadeia e calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ **e** $\frac{\partial z}{\partial y}$

a- $z = r^3 + s + v^2$; $r = xe^y$, $s = ye^x$, $v = x^2 y$

b- $z = pq + qw$; $p = 2x - y$, $q = x - 2y$, $w = -2x + 2y$

4- Certo gás obedece à lei dos gases ideais $PV = 8T$. Suponha que o gás esteja sendo aquecido à taxa de $2°/\min$ e a pressão esteja aumentando a taxa de $\frac{1}{2}(Kg/cm^2)/\min$. Se, em certo instante, a temperatura é de 200° e a pressão é de $10\ (Kg/cm^2)$, ache a taxa à qual o volume está variando.

5- A areia está vazando por um buraco em um recipiente à razão de $6cm^3/\min$. Ao vazar a areia vai formando uma pilha em forma de um cone circular reto cujo raio da base aumenta à razão de $\frac{1}{4}cm/\min$. Se no instante em que já vazaram $40cm^3$, o raio é de 5 centímetros, determine a taxa de aumento da altura da pilha.

EXTREMOS DE FUNÇÕES DE DIVERSAS VARIÁVEIS

Os extremos de funções de uma variável já são conhecidos. Para uma função de duas variáveis, os máximos locais correspondem aos pontos mais altos da superfície S gerada pelo gráfico da função f no espaço 3D. Analogamente, os mínimos locais correspondem aos pontos mais baixos. Os máximos e mínimos locais são ditos extremos locais. Todos os pares ordenados do plano que originam extremos locais em uma superfície devem ser soluções de equações específicas, por isso, recebem o nome particular de **pontos crítico**s.

Definição: Seja f uma função de duas variáveis. Um par (a,b) é ponto crítico de f se:

- $f_x(a,b)=0$ e $f_y(a,b)=0$, ou
- $f_x(a,b)$ ou $f_y(a,b)$ não existe.

Na pesquisa de extremos locais de uma função, começa-se por determinar os pontos críticos. Testamos então cada par para verificar se se trata de máximo ou mínimo local.

Exemplo 1: Seja $f(x,y)=1+x^2+y^2$, com $x^2+y^2\leq 4$. Ache os extremos de f.

Definição: Seja f uma função de duas variáveis dotadas de derivadas parciais segundas contínuas. O discriminante D de f é:

$$D(x,y)=f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y)-[f_{xy}(x,y)]^2$$

Uma forma de lembrar a expressão anterior é considerar a matriz que lhe dá origem, chamada matriz **hessiana** da função f:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Teste para extremos locais:

Seja f uma função de duas variáveis dotadas de derivadas parciais segundas contínuas. Se $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ e $D(a,b) > 0$, então $f(a,b)$ é:

- máximo local de f se $f_{xx}(a,b) < 0$
- mínimo local de f se $f_{xx}(a,b) > 0$

Teorema: Seja f dotada de derivadas parciais segundas contínuas em todo um disco aberto R que contém (a,b). Se $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ e $D(a,b) < 0$, então o ponto $P = (a,b,f(a,b))$ é o ponto de sela do gráfico de f.

Exemplo 2: Se $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$, ache os extremos locais e os pontos de sela de f.

Exemplo 3: Deve-se construir um depósito retangular sem tampa com volume $V = 12\ m^3$. O custo por metro quadrado do material a ser usado é de R$ 400,00 para o fundo, R$ 300,00 para dois dos lados opostos e R$ 200,00 para os lados opostos restantes. Determine as dimensões do depósito que minimizem o custo.

Exercícios:

1- Determinar os pontos críticos de $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$.

2- Classificar os pontos críticos da função $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$.

3- Mostrar que $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + 5$ tem mínimo local em $(1,1)$.