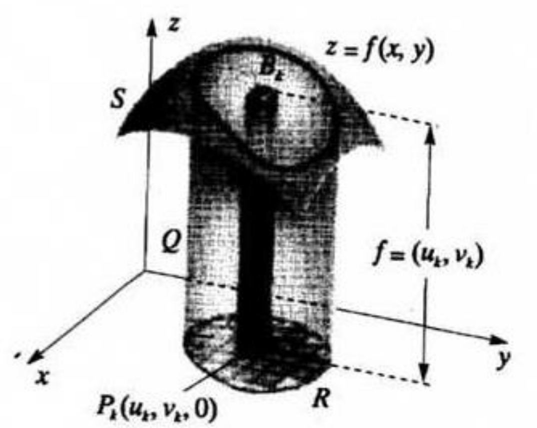
INTEGRAIS DUPLAS

Podemos considerar integrais de funções de diversas variáveis, chamadas integrais duplas, integrais tríplices, integrais de superfície e integrais curvilíneas. Essas integrais podem ser consideradas as extensões naturais do conceito de integral definida.

Dada uma função f de duas variáveis tal que $f(x, y)$ exista em toda uma região R do plano-xy. Definiremos a integral dupla $\iint_R f(x, y)dA$ por meio de um processo análogo ao utilizado para $\int_a^b f(x)dx$. R denotará uma região que pode ser subdividida em um número finito de regiões R_x e R_y.

Interpretação Geométrica da Integral Dupla

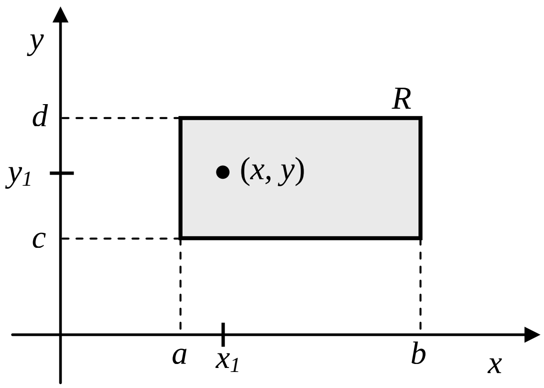


Fonte: **SWOKOWSKI**, E. W. **Cálculo com geometria analítica**: v.2. São Paulo: Makron Books, 1994.

Definição: Seja uma função de duas variáveis tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) em uma região R. O volume V do sólido compreendido entre o gráfico de $z = f(x, y)$ e acima de R é

$$V = \iint_R f(x, y)dA$$

Seja uma função f contínua em uma região retangular fechada R do tipo ilustrada a seguir.



Então a integral dupla pode ser representada pela integral iterada

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

Exemplo 1: Calcule $\int_1^3 \int_2^5 4\,dx\; dy$. Faça um esboço do gráfico e interprete o resultado.

Exemplo 2: Calcule $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2 y)\; dy\; dx$

Exemplo 2: Calcule $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)\ dy\ dx$

Exemplo 3: Calcule $\int_1^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y.\cos x\ dx\ dy$

Exercícios:

Calcule a integral iterada.

a- $\int_{1}^{2}\int_{-1}^{2}(12xy^2 - 8x^3)\ dy\ dx$

b- $\int_{1}^{2}\int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2 y\ dy\ dx$

INTEGRAIS DUPLAS - Continuação

Definição1: Uma região será do tipo R_x se for limitada lateralmente por retas $x=a$ e $x=b$, inferiormente por uma curva $y=g_1(x)$ e superiormente por uma curva $y=g_2(x)$.

Definição2: Uma região será do tipo R_y se for limitada superior e inferiormente pelas retas $y=d$ e $y=c$, e lateralmente por curvas $y=h_1(x)$ e $y=h_2(x)$.

Teorema para o cálculo de integrais duplas

- Seja R a região do tipo R_x. Se f é contínua em R, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy\ dx$$

- Seja R a região do tipo R_y. Se f é contínua em R, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\ dx\ dy$$

Exemplo 1: Seja R a região do plano-xy delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 2x$. Calcule $\iint_R (x^3 + 4y)\, dA$.

Exemplo 2: Seja R a região delimitada pelos gráficos das equações $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{3x - 18}$ e $y = 0$. Se f é uma função contínua arbitrária em R, expresse a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ em termos de integrais iteradas.

Exemplo 3: Dada $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 \, dx \, dy$ inverta a ordem de integração e calcule a integral resultante.

INTEGRAIS TRIPLAS

No estudo das integrais triplas a função integrando é uma função de três variáveis $w = f(x, y, z)$ definida sobre uma região T do espaço tridimensional. As integrais triplas podem ser calculadas através de integrações sucessivas de forma análoga as integrais duplas.

Analisando as regiões de integração:

Caso: 1 A região T é delimitada inferiormente pelo gráfico da função $z = h_1(x, y)$ e superiormente por $z = h_2(x, y)$, onde h_1 e h_2 são funções contínuas sobre a região R do plano-xy.

onde

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Caso: 2 A região T é delimitada à esquerda pelo gráfico da função $y = k_1(x, z)$ e a direita por $y = k_2(x, z)$, onde k_1 e k_2 são funções contínuas sobre a região R' do plano-xz.

onde $$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x,y,z)\; dy\; dz\; dx$$

Caso: 3 A região T é delimitada na parte de trás pelo gráfico da função $x = p_1(y,z)$ e a direita por $x = p_2(y,z)$, onde p_1 e p_2 são funções contínuas sobre a região R'' do plano-yz.

onde $$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_{m_1(x)}^{m_2(x)} \int_{p_1(y,z)}^{p_2(y,z)} f(x,y,z)\; dx\; dy\; dz$$

Exemplo 1: Calcule a $\iiint_T (xy^2 + yz^3)\,dV$ dado $T = \{(x,y,z): -1 \le x \le 1,\ 3 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 2\}$.

Exemplo 2: Ache o volume V do sólido delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0$.

Exercícios:

1- Calcule a $\iiint_T x\,dV$ onde T é o sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 25$, pelo plano $x + y + z = 8$ e pelo plano xy.

2- Expresse $\iiint_T f(x, y, z)\,dV$ como uma integral iterada se T é a região do primeiro octante delimitada pelos planos coordenados, pelo parabolóide $z = 2 + x^2 + (1/4)y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

3- Ache o volume da região T delimitada pelos gráficos de $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$ e $z + y = 6$.

4- Calcule a $\iiint_T y\,dV$ onde T é a região delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} + z = 1$.