UFPR

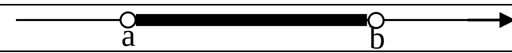
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PRÉ-CÁLCULO

Intervalos

Os intervalos, na reta real, classificam-se em: aberto, fechado, semi-abertos e infinitos. A solução de uma inequação (desigualdade) é um intervalo. Uma desigualdade pode envolver valores absolutos (módulo).

Represente graficamente os seguintes intervalos

Notação	Definição	Gráfico
$(a,\ b)$	$\{x \in \Re /\ a < x < b\}$	
$[a,\ b]$	$\{x \in \Re /\ a \le x \le b\}$	
$[a,\ b)$	$\{x \in \Re /\ a \le x < b\}$	
$(a,\ b]$	$\{x \in \Re / a < x \le b\}$	
$(a,\ \infty)$	$\{x \in \Re /\ x > a\}$	
$[a,\ \infty)$	$\{x \in \Re /\ x \ge a\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \in \Re / x < b\}$	
$(-\infty,\ b]$	$\{x \in \Re / x \le b\}$	
$(-\infty,\ \infty]$	$\Re$	

Valor Absoluto

Se $x \in \Re$ o valor absoluto $|x|$ de um número real x define-se como:

$$|x| = \begin{cases} x \ se \ x \ge 0 \\ -x \ se \ x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

1- $|3| =$ **2-** $|-8| =$ **3-** $|0| =$ **4-** $|3-\pi| =$

Propriedades do Valor Absoluto (b>0)

- $|a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b$
- $|a| > b \quad \Leftrightarrow \quad a > b \ \ ou \ \ a < -b$
- $|a| = b \quad \Leftrightarrow \quad a = b \ \ ou \ \ a = -b$

Resolução de Inequações

1) $3x-7>2x+5$

2) $x-8\geq 5x+3$

3) $\dfrac{x+1}{2x-3}\geq 2$

4) $(x+5).(x-3)>0$

5) $3\leq \dfrac{2x-3}{5}<7$

Ocorrem com freqüência no cálculo desigualdades que envolvem valores absolutos.

Exemplos:

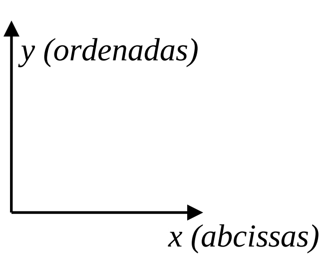
Resolva cada desigualdade e faça o gráfico da solução.

a- $|x-3| < 0,5$

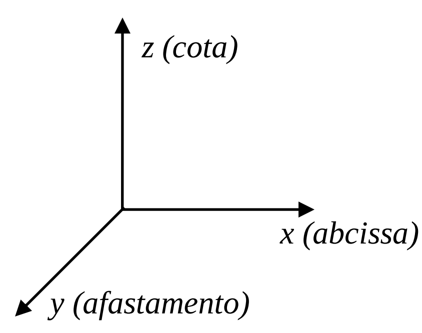
b- $|2x-7| > 3$

Coordenadas Retangulares

Um sistema de coordenadas retangulares é uma correspondência entre pares ordenados e pontos de um plano. Muitas vezes, chamamos o eixo das abcissas de eixo-x e o eixo das ordenadas, eixo-y (no espaço 3D os eixos x, y e z são chamados: abcissa, afastamento e cota, respectivamente).



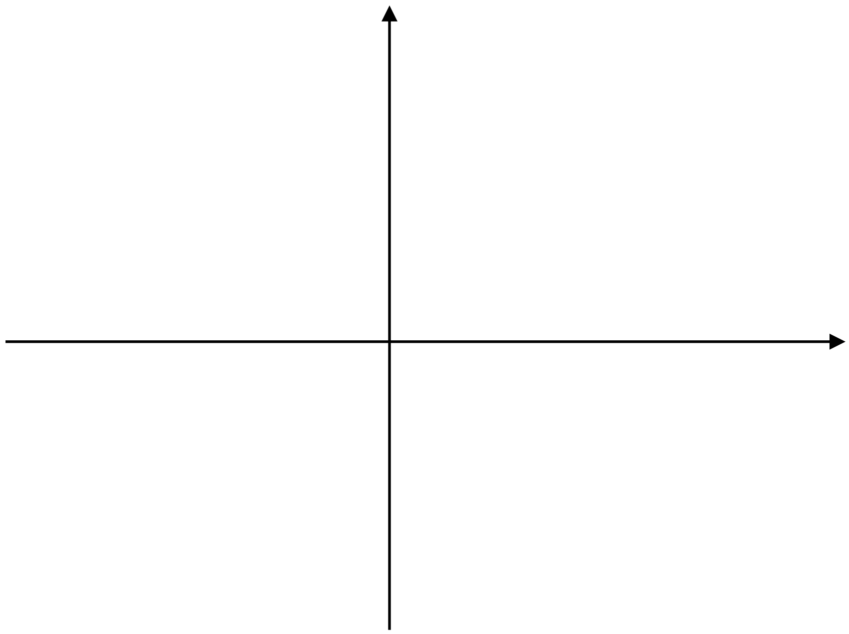
$\Re^2$



$\Re^3$

Represente no plano cartesiano os pontos abaixo

a- (-4, 2) b- (0, 4) c- (0, -2) d- (4, -2) e- (-3, -5)

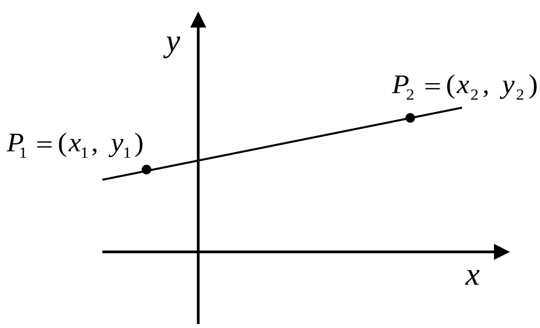


Distância entre Dois Pontos

Para calcular a distância entre dois pontos quaisquer de um plano usa-se a fórmula:

$$d(P_1,\ P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

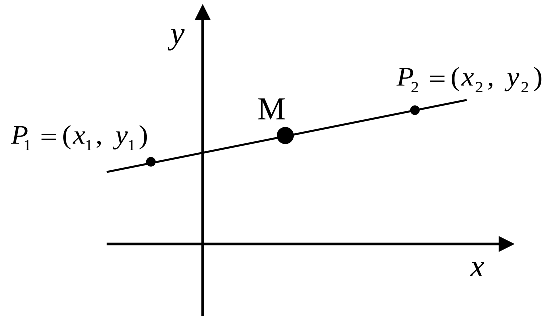
onde $P_1 = (x_1,\ y_1)$ e $P_2 = (x_2,\ y_2)$. Tente mostrar isso e estender o conceito para espaço 3D.



Ponto Médio

Dado um segmento AB, onde $A(x_1,\ y_1)$ e $B(x_2,\ y_2)$, o ponto médio desse segmento é dado por

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



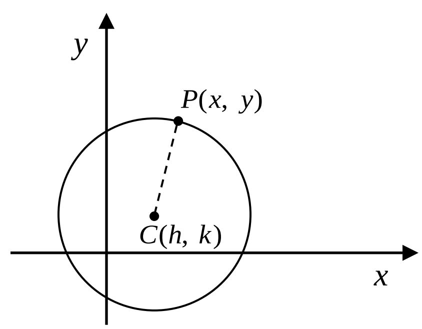
Exemplos:

Dados A(-2, 3) e B(4, -2), determine:

a- $d(A, B)$

b- O ponto médio do segmento AB

Equação de Circunferência



Uma circunferência de centro C (h, k) e raio r tem equação

$$d(P, C) = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Exemplo:

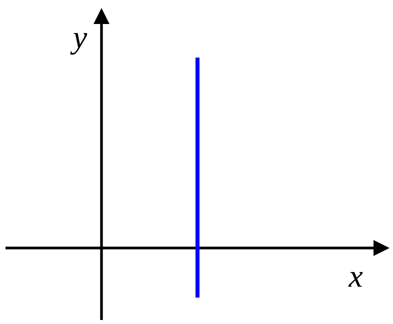
Determinar a equação do círculo de centro *C(-2,3)* e que passa pelo ponto *D(4, 5)*.

Retas

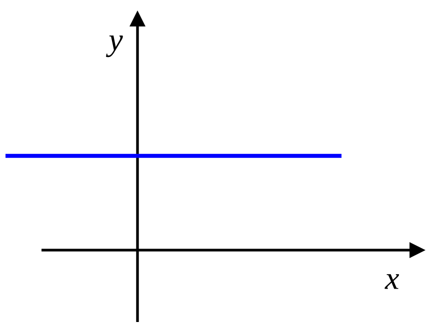
Uma reta não paralela ao eixo-x faz ângulo α com o mesmo. Esse ângulo é sempre considerado no sentido anti-horário, medido do eixo-x para a reta. Denomina-se **coeficiente angular** da reta r o número real **a** que expressa a tangente trigonométrica da inclinação (ângulo) α . Dados $A(x_1,\ y_1)$ e $B(x_2,\ y_2)$ pontos de uma reta, calcula-se seu coeficiente angular pela fórmula:

- Coeficiente angular a: $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Forma Ponto-Coeficiente angular: $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$
- Forma Coeficiente angular-Intercepto: $y = ax + b$

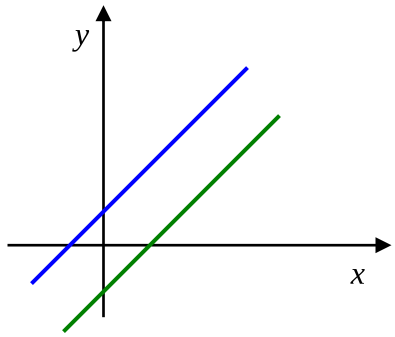
○ Caso o coeficiente angular de uma reta seja não definido, ela é vertical.



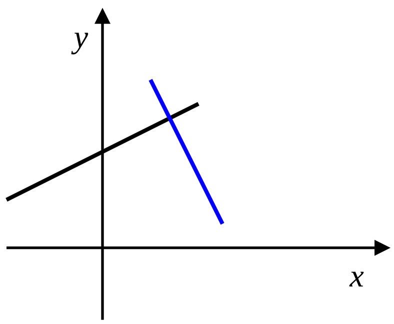
○ Se ele for nulo, a reta é horizontal.



- Retas paralelas têm coeficientes angulares iguais.



- Retas perpendiculares têm coeficientes angulares inversos e simétricos.



Exemplo:

Esboce a reta definida para cada par de pontos e determine seu coeficiente angular.

a- $A(-1, 4)$ *e* $B(3, 2)$

b- $A(2, 5)$ *e* $B(-2, -1)$

Equação Linear

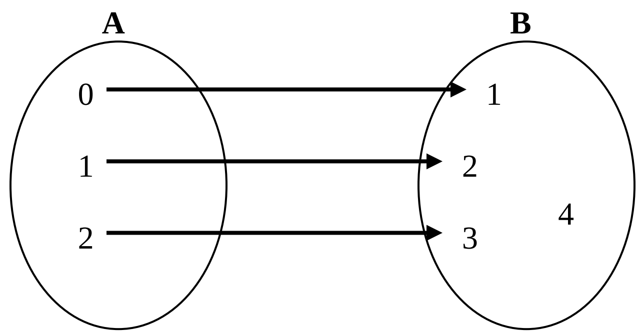
Uma equação linear em x e y é uma equação da forma $ax + by = c$, com a e b não simultaneamente nulo. O gráfico de uma equação linear é uma reta.

Exemplo 8:

Determine a equação linear da reta que passa por $A(1, 7)$ e $B(-3, 2)$.

NOÇÃO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DE CONJUNTOS

Sendo A e B dois conjuntos não vazios e uma relação f de A em B, essa relação f é um a função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e um só elemento y do conjunto B. O conjunto A é denominado domínio (D) da função, que é também chamado **campo de definição** ou **campo de existência** da função. O conjunto B é denominado contradomínio (CD) da função. Além destes, existe ainda o conjunto imagem de uma função. Tais conceitos ficam claros quando se observa o exemplo a seguir:



- $f : A \to B$ definida por $y = x + 1$ ou $f(x) = x + 1$
- **Domínio**: D = {0, 1, 2}
- **Contradomínio**: CD = {0, 1, 2, 3, 4}
- **Imagem**: Im = {1, 2, 3}
- Convém notar que: $\text{Im} \subset CD$

ESTUDO DO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

Quando o domínio de uma função não está explícito, devemos considerar para esse domínio todos os valores reais de x que tornam possíveis em R as operações indicadas na fórmula matemática que define a função. No caso de funções racionais, lembre-se que o **denominador nunca pode ser nulo**; no caso das irracionais, lembre-se que não se extrai, em R, raiz de números negativos.

EXERCÍCIOS

1- **Determine o domínio D da função definida por:**

a- $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$

b- $f(x) = \dfrac{x+2}{2x}$

c- $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

d- $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$

e- $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9x+20}$

f- $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x+3}$

g- $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-9}$

h- $f(x)=\sqrt{2x-1}$

i- $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^3}+\dfrac{2x}{\sqrt{x+4}}$

2- Construir os gráficos das funções:

a) $y = 2x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$

c) $f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 2 \\ 2, & se \quad x < 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \;\; se \quad x < 0 \\ x^2 se \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 \;\; se \quad x \geq 2 \end{cases}$

FUNÇÃO INVERSA

Denomina-se função inversa da função bijetora $f : A \to B$ a função $f^{-1} : B \to A$, que associa a cada x de B um elemento y de A tal que $y = f^{-1}(x)$.

- Para se obter a inversa troca-se x por y e y por x.
- O gráfico da função inversa é simétrico ao gráfico da função de origem, em relação à reta y=x.

Exemplos:

1) Determinar a função inversa de $f : R_+ \to R_+$ onde $f(x) = x^2$ com $x \geq 0$. Faça um esboço do gráfico.

2) Determinar a função inversa de $f : R \to R$ onde $f(x) = 2x$. Faça um esboço do gráfico.

FÓRMULAS PARA TRANSLAÇÃO DE GRÁFICOS

VERTICAL: $y = f(x) + K$ translada o gráfico K unidades para cima se K>0 e K unidades para baixo se K<0.

HORIZONTAL : $y = f(x + h)$ translada o gráfico h unidades para a esquerda se h>0 e h unidades para a direita se h<0.

Exemplos: Faça o gráfico das funções dadas abaixo:

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = |x + 2|$

c) $f(x) = |x - 3| + 2$

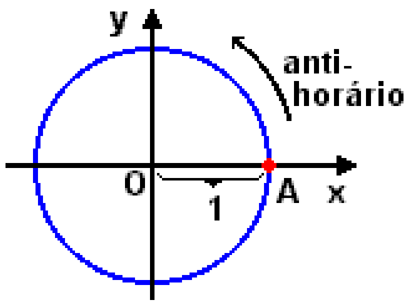
d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = x^2 + 2$

f) $f(x) = (x + 2)^2$

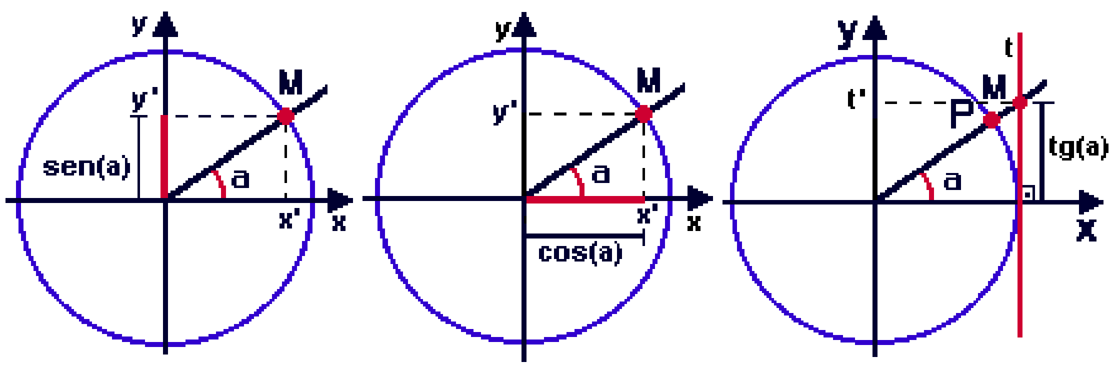
REVISÃO DE TRIGONOMETRIA

Considere uma circunferência de raio unitário com centro na origem de um sistema cartesiano ortogonal e o ponto A=(1,0). O ponto A será tomado como a origem dos arcos orientados nesta circunferência e o sentido positivo considerado será o anti-horário.



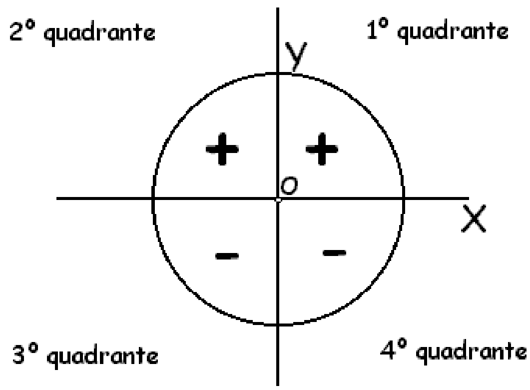
SENO, COSSENO E TANGENTE

As Funções trigonométricas básicas são relações entre as medidas dos lados do triângulo retângulo e seus ângulos. As três funções básicas mais importantes da trigonometria são: seno, cosseno e tangente. O ângulo é indicado pela letra grega.



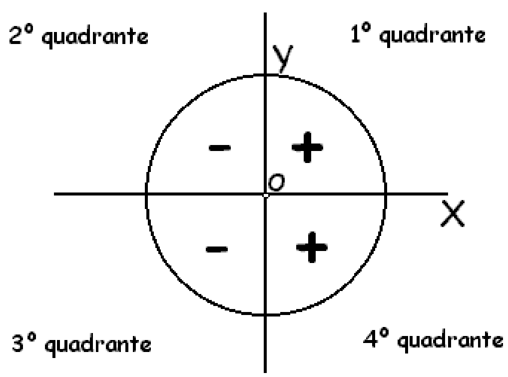
Para todo o α,

$-1 \leq \text{sen}\,\alpha \leq 1$



Para todo o α,

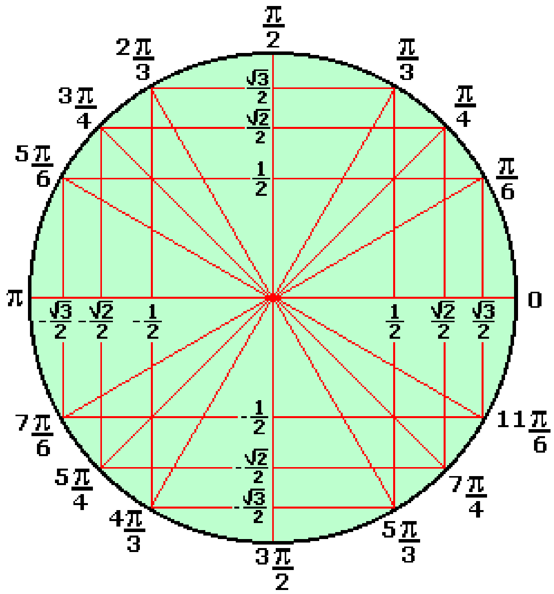
$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$



Valores de algumas razões trigonométricas:

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sen	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
cos	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
tg	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	∞
cotg	∞	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**

SENOS E COSSENOS DOS ÂNGULOS NOTÁVEIS



Fórmulas Trigonométricas

Fórmula Fundamental

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Fórmulas Secundárias

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$$

$$cossec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$$

$$cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}$$

Exercício: Faça o esboço do gráfico das funções:

a) $f(x) = \text{sen } x$

b) $f(x) = \cos x$

INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE LIMITE

O conceito de limite é uma das idéias que distinguem o cálculo da álgebra e da trigonometria. As regras para o cálculo são simples, e a maioria dos limites dos quais precisamos pode ser obtida por **substituição, análise gráfica, aproximação numérica, álgebra ou alguma combinação dessas**.

NOÇÃO INTUITIVA

Analisemos os seguintes exemplos de sucessões numéricas.

Notação:

1°)	$1,2,3,4,5,\ldots$	1°)	$x \to \infty$
2°)	$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\ldots$	2°)	$x \to 1$
3°)	$1,0,-1,-2,-3,\ldots$	3°)	$x \to -\infty$

Exemplo: 1

Seja a seguinte função $y = 1 - \frac{1}{x}$

x	***y***
1	0
2	0,5
3	0,66...
4	0,75...
$\vdots$	$\vdots$
500	0,998
$\vdots$	$\vdots$
1000	0,999
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$

Esta função tende para 1 quando x tende para o infinito. ($y \to 1$ quando $x \to \infty$).

Denota-se: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1$

Em geral:

x	***f(x)***
x_1	l_1
x_2	l_2
x_3	l_3
$\downarrow$	$\downarrow$
a	L

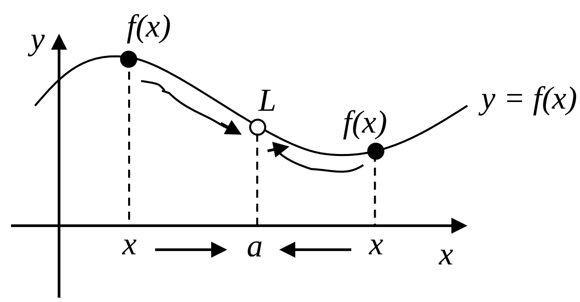
$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

Ilustração em um quadro para outras funções-exemplo2:

	f(x)	***g(x)***	***f(x) + g(x)***	***f(x) . g(x)***
x	$\frac{x^2-1}{x-1}$	$\frac{x^3-1}{x-1}$	$\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{x^3-1}{x-1}$	$\frac{x^2-1}{x-1}*\frac{x^3-1}{x-1}$
0,9	**1,9**	**2,71**		**5,149**
0,99	**1,99**	**2,9701**		**5,910499**
0,999	**1,999**	**2,99700099**		**5,991004979**
1,001	**2,001**	**3,00300099**		**6,009004961**
0,9999	**1,9999**	**2,9997**		**5,99910003**
1,0001	**2,0001**	**3,0003**		**6,00090003**
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
1	**2**	**3**	**5**	**6**

Teremos então:

1- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ 2- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$ ...

Notação	**Significação Intuitiva**	**Interpretação Gráfica**
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$	Podemos tornar ***f(x)*** tão próximo de ***L*** quanto quisermos, escolhendo ***x*** suficientemente próximo de ***a*** e $x \neq a$	

PROPRIEDADES DOS LIMITES

Suponhamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Então são válidas as propriedades a seguir:

- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \quad \lim\limits_{x\to a} f(x) \quad \pm \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \quad L \pm M$
- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\ .\ g(x)\right] = \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)\ .\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \quad L\ .\ M$
- $\lim\limits_{x\to a}\left[c.\,f(x)\right] = \quad c.\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \quad = \quad c.L$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \quad \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \quad \dfrac{L}{M} \quad com \quad g(x) \neq 0\ e\ \ M \neq 0$
- $\lim\limits_{x\to a} c = \quad c$ onde c é uma constante
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)^n = \quad \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n, \quad n \in N^*$
- $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \quad \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}\ , \quad n \in N^*, \quad f(x) > 0, \quad (se\ \ f(x) \leq 0,\ \ n\ é\ \ impar)$
- $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = \quad e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

<u>EXERCÍCIOS SOBRE LIMITES</u>

Encontre os seguintes limites:

a- $\lim\limits_{x\to a}(2x^4 - 5x^3 + 2x - 6)$

b- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 5}{x^2 + 1}$

c- $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x^2 + 1}$

d- $\lim_{x \to 1} \left[x^2 + 3\right]^2$

e- $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^3 + x^2 - 1}$

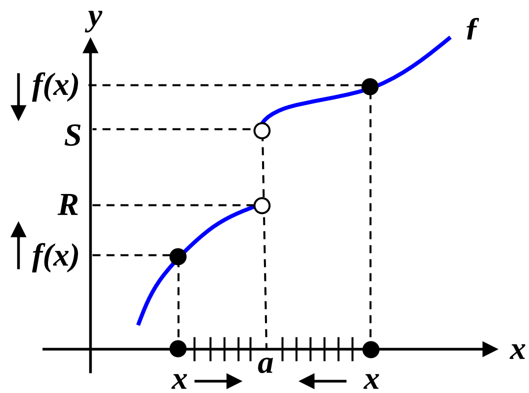
f- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

g- $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

h- $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 4x^2 - 6x + 1}{x^2 - 8x + 7}$$

i- $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Limites Laterais



- Se x se aproxima de ***a*** através de valores maiores que ***a*** ou pela sua direita:

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = S}$$

Esse limite é chamado de ***limite lateral à direita*** de a.

- Se x se aproxima de ***a*** através de valores menores que ***a*** ou pela sua esquerda:

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = R}$$

Esse limite é chamado de ***limite lateral à esquerda*** de a.

Existência de Limites

O limite de *f(x)* para $x \to a$ **existe** se, e somente se, os **limites laterais à direita e a esquerda são iguais**, ou seja:

- Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(x) = b$

- Se $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$, então **não existe** $\lim_{x \to a} f(x) = b$

Exemplo1:

Se $f(x) = \frac{|x|}{x}$, esboce o gráfico de f e ache, se possível:

a- $\lim_{z \to 0^-} f(x)$ b- $\lim_{z \to 0^+} f(x)$ c- $\lim_{z \to 0} f(x)$

Exemplo2:

Esboce o gráfico da função definida por:

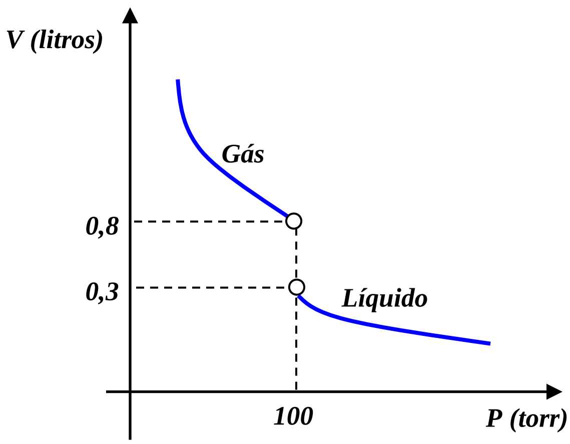
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & se \quad x < 1 \\ 4, & se \quad x = 1 \\ x^2 + 1, & se \quad x > 1 \end{cases}$$. Ache :

a- $\lim_{z \to 1^-} f(x)$ b- $\lim_{z \to 1^+} f(x)$ c- $\lim_{z \to 1} f(x)$

Para os alunos:

Um gás tal como vapor de água ou oxigênio é mantido a temperatura constante em um pistão. À medida que o gás é comprimido, o volume V decresce até que atinja uma certa pressão crítica. Além dessa pressão, o gás assume forma líquida. Use o gráfico abaixo para achar e interpretar.

a- $\lim\limits_{z \to 100^-} V$ **b-** $\lim\limits_{z \to 100^+} V$ **c-** $\lim\limits_{z \to 100} V$



Exercícios:

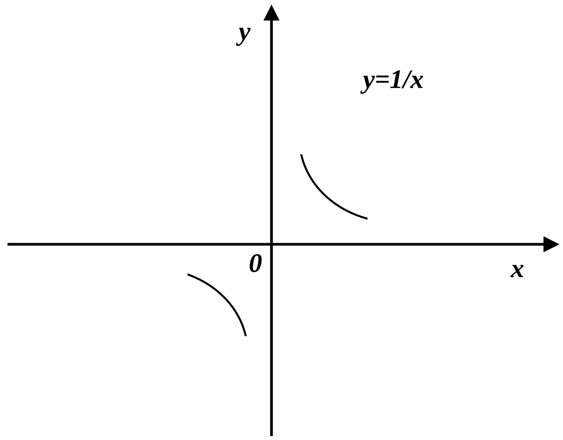
1- Dada a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & se \quad x < 2 \\ 2, & se \quad x = 2 \\ 9 - x^2, & se \quad x > 2 \end{cases}$, determinar se possível: a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

2- Seja $f(x) = |x|$, esboce o gráfico e determine: a-) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e b-) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. O limite existe?

LIMITES QUE ENVOLVEM O INFINITO

Sabe-se que a expressão $x \to \infty$ (*x* tende para infinito) significa que *x* assume valores superiores a qualquer número real e que $x \to -\infty$ (*x* tende para menos infinito), da mesma forma, indica que *x* assume valores menores que qualquer número real.

Exemplo:



1-) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, ou seja, à medida que *x* aumenta, *y* tende para zero e o limite é zero.

2-) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, ou seja, à medida que *x* diminui, *y* tende para zero e o limite é zero.

3-) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$, ou seja, quando *x* se aproxima de zero pela direita de zero $(x \to 0^+)$ ou por valores maiores que zero, *y* tende para o infinito e o limite é infinito.

4-) $$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \infty \text{ se n é par} \\ -\infty \text{ se n é par} \end{cases}$$

Exemplos:

1- Determine cada limite se existir:

a- $\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} =$

b- $\lim_{z \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) =$

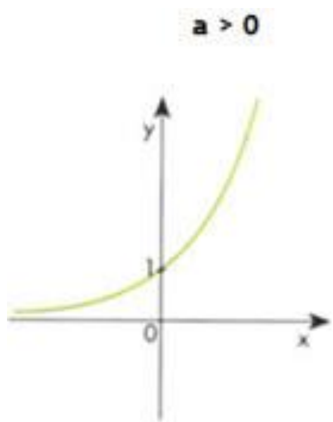
c- $\lim\limits_{z \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 5}{3x^2 + x + 2} =$

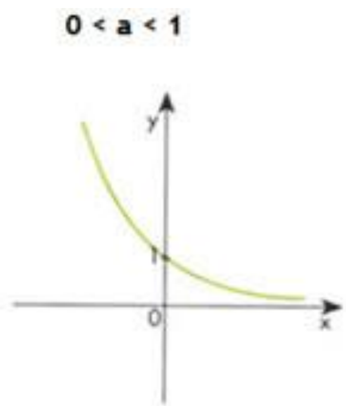
d) $\lim\limits_{z \to 0^+} \dfrac{1}{x^4} =$

e) $\lim\limits_{z \to 0^-} \dfrac{1}{x^7} =$

Função Exponencial

A função f, definida em R, e dada por $f(x) = a^x$, a >0 e a $a \neq 1$, denomina-se função exponencial de base a.





Exemplos: 1) Faça o gráfico das funções:

a) $f(x) = 2^x$

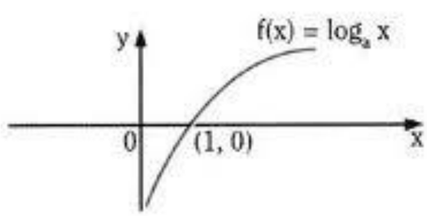
b) $f(x) = \frac{1}{2}^{x}$

c) $f(x) = e^x$

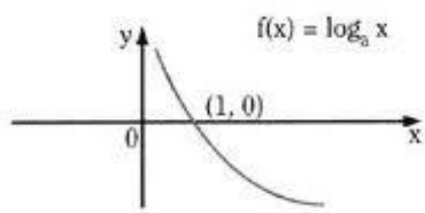
Função Logarítmica

Seja a>0, $a \neq 1$. A função f dada por $f(x) = \log_a^x$, x>0, denomina-se função logarítmica de base a.

a) Função crescente (a > 1)



b) Função decrescente (0 < a < 1)



- Se a >1 a função é crescente.
- Se 0 < a < 1 a função é decrescente.

Exemplos: 2) Faça o gráfico das funções:

a) $f(x) = \log_2^x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}^{x}$

Limites de funções exponenciais

Suponha a>1	Suponha 0<a<1
a) $\lim_{x \to +\infty} a^x =$	a) $\lim_{x \to +\infty} a^x =$
b) $\lim_{x \to -\infty} a^x =$	b) $\lim_{x \to -\infty} a^x =$

Limites de funções logarítmicas

Suponha a>1	Suponha 0<a<1
a) $\lim_{x \to +\infty} \log_a^x =$	a) $\lim_{x \to +\infty} \log_a^x =$
b) $\lim_{x \to 0^+} \log_a^x =$	b) $\lim_{x \to 0^+} \log_a^x =$

Calcule os limites:

a) $\lim_{x \to -\infty} 12^x =$

b) $\lim_{x \to +\infty} 3^x =$

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^x =$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}13)^x =$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{3}}^{x} =$

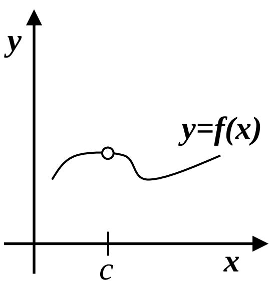
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{3}^{x} =$

g) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{2}^{x} =$

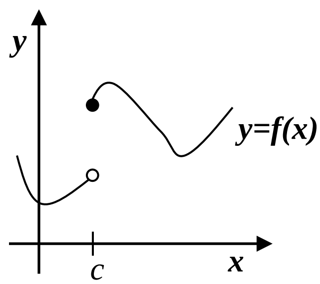
h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{5}}^{x} =$

CONTINUIDADE

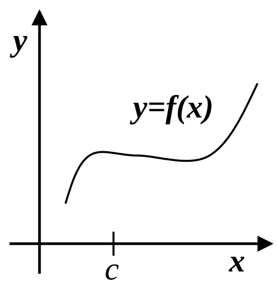
Exemplos de funções:



f(x) não é uma função contínua



f(x) não é uma função contínua



f(x) é uma função contínua

Definição: Dizemos que uma função ***f(x)*** é contínua num ponto ***a*** do seu domínio se as seguintes condições são satisfeitas:

- $f(c)$ é definida.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Propriedade das Funções contínuas

Se ***f(x)*** e ***g(x)*** são contínuas em ***x = a***, então:

- $f(x) \pm g(x)$ é contínua em ***a***
- $f(x).g(x)$ é contínua em ***a***
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em ***a*** onde $g(x) \neq 0$.

Exemplo:

1- A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & se \quad x \neq 1 \\ 1, & se \quad x = 1 \end{cases}$ é contínua em $c = 1$.

2- Considere a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & se \quad x \neq 2 \\ 5, & se \quad x = 2 \end{cases}$

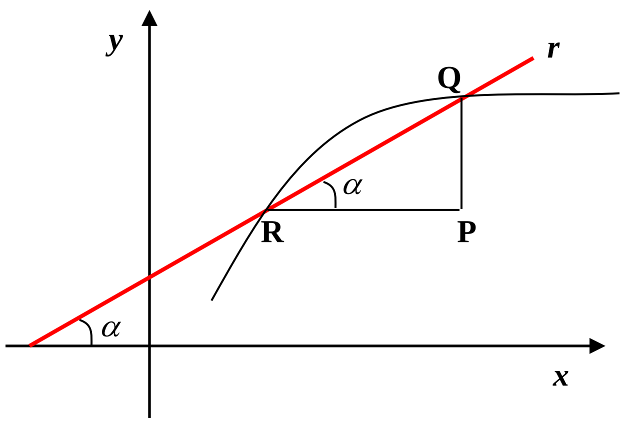
Esta função é contínua em $x = 2$? Caso contrário, como você redefiniria a função em $x = 2$ para que ela fosse contínua?

DERIVADAS

Iniciaremos o estudo das derivadas considerando dois problemas aplicados. O primeiro consiste em determinar o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente em um ponto do gráfico de uma função, e o segundo, em definir a velocidade de um objeto em movimento retilíneo.

Retas Tangentes

Relembrando:



Coeficiente angular de r (inclinação da reta r) $= tg\alpha = \dfrac{PQ}{RP}$

> **Definição:** O coeficiente angular m_a da tangente ao gráfico de uma função f em $P(a, f(a))$ é
>
> $$m_a = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
>
> Desde que o limite exista.

Exemplo 1: Seja $f(x) = x^2$ determine (utilizando a definição) :

a) $f'(x)$

b) $f'(1)$

c) $f^{'}(-3)$

d) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (1,f(1)).

Exemplo 2: Seja f(x) = k uma função constante. Mostre que $f^{'}(x)=0$ para todo x.

Exemplo 3: Seja f(x) = x. Mostre que $f^{'}(x)=1$ para todo x.

Exemplo 4: Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule $f^{'}(2)$.

Exemplo 5: Mostre que $f(x) = |x|$ não é derivável em p=0.

Algumas Fórmulas:

1) Derivada de uma constante

$$f(x) = k \Rightarrow f^{'}(x) = 0$$

2) Derivada da potência

$$f(x) = x^n \Rightarrow f^{'}(x) = nx^{n-1}, \ x \neq 0$$

$$f(x) = x^{-n} \Rightarrow f^{'}(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}, x > 0$$

Exemplos:

1- Calcule $f^{'}(x)$ sendo:

a) $f(x) = 4x^{-3}$. Calcule $f'(1)$

b- $f(x) = \dfrac{7}{x^5}$.

c- $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$. Calcule $f'(16)$

2) Seja $f(x) = x^3$.

a) Calcule $f'(x)$.

b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

3) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto de abscissa 8.

Regras de Derivação

1- Soma ou Subtração

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

2- Derivada do produto

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

3- Derivada da divisão

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Ou seja:

1- $h(x) = f(x) \pm g(x)$ então $h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Exemplo: Se $h(x) = 3x^2 + 4x^5$. Calcule $h'(x)$.

2- $h(x) = f(x).g(x)$

$h'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$

1- **Exemplo:** Se $y = (x^3 + 1).(2x^2 + 8x - 5)$. Calcule y'.

3- $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$h'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$

Exemplo: Se $h(t) = \dfrac{5t}{t^2 + 1}$. Calcule $h'(t)$.

Exercícios:

2- Se $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1$. Calcule $f'(x)$.

3- Se $f(x) = x^{-3} + 5x + x^4 - 2x^{-4} + 12$. Calcule $f'(x)$.

4- Se $h(x) = x^2 . x^3$. Calcule $h'(x)$.

5- Se $f(x) = x^{\frac{1}{3}} .(x^2 - 3x + 2)$. Calcule $f'(x)$.

6- Se $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 2}{4x^2 + 5}$. Calcule $f'(x)$.

7- Se $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^3} . \dfrac{1}{x^4}}{\sqrt[5]{x^2}}$. Calcule $f'(x)$.

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Fórmulas:

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
tgx	$\sec^2 x$
$\cot gx$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x\, tgx$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$

DERIVADAS DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$

Exemplo1: Determine $f'(x)$ se $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

Exemplo2: Determine $g'(x)$ se $g(x) = \sec x.tgx$

Exemplo3: Determine $\frac{dy}{d\theta}$ se $y = \sec\theta.\cot\theta$

Obs.: O coeficiente angular da reta normal a reta tangente a uma função f em um ponto $P(a, f(a))$ é

$$C_N = -\frac{1}{f'(a)}.$$

Exercícios

1- (a) Determine o coeficiente angular das tangentes ao gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ nos pontos de coordenadas-x 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$ e π. (b) Esboce o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ e das tangentes da parte (a). (c) para quais valores de x a tangente é horizontal?

DERIVADAS DE FUNÇÕES COMPOSTAS - REGRA DA CADEIA

Várias aplicações do cálculo na engenharia envolvem a busca de uma função com alguma derivada. Em muitas situações encontraremos funções compostas. A determinação da derivada de funções compostas seguirá uma determinada regra denominada Regra da Cadeia**.**

Proposição: **Regra da Cadeia** – Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem ambas, então a função composta definida por $y = f(g(x))$ tem derivada dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u).g'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Então se $f(x) = h(u(x))$ então $f'(x) = h'(u(x)).u'(x)$

Exemplo 1: Sejam $h(x) = x^3$ e $u(x) = 2x - 5$, então $f(x) = h(u(x))$ e portanto $f(x) = (2x-5)^3$. Calcule $f'(x)$.

Exemplo 2: Seja $f(x) = \text{sen}(x^3 - 3x^2)$. Calcule $f'(x)$.

Exemplo 3: Seja $f(x) = e^{\text{sen}(x^2)}$. Calcule $f'(x)$.

Exemplo 4: Sejam $y = \sqrt{u}$ e $u = x^2 + 1$. Calcule y'.

Exemplo 5: Seja $f(x) = \dfrac{\text{sen}(2x^2 - 3)}{\cos(2x^2 - 3)}$. Calcule $f'(x)$.

Exemplo 6: Calcule a derivada da função $y = x^2.e^{3x}$

Exemplo 7: Calcule a derivada da função $y = ln(x^2 + 3)$

Fórmulas: Regra da Cadeia (utilizadas com maior freqüência)

$f(x)$	$f'(x)$
$c.u(x)^n$	$n.c.u(x)^{n-1} \; . \; u'(x)$
$\text{sen}(u(x))$	$\cos(u(x)).u'(x)$
$\cos(u(x))$	$-\text{sen}(u(x)) \; .u'(x)$
$tg(u(x))$	$\sec^2(u(x)).u'(x)$
$e^{u(x)}$	$e^{u(x)} \, . \, u'(x)$
$\ln(u(x))$	$\dfrac{1}{u(x)} \; . \; u'(x)$

Exercícios:

Dadas as funções $f(x)$, determinar $f'(x)$.

a- $f(x) = 3x^4 + (5x^2 + 8)^2$

b- $f(x) = (x^2 + 5x + 2)^7$

c- $f(x) = 5\sqrt{x^2 + 3}$

d- $f(x) = x^8 + (2x + 4)^3 + \sqrt{x}$

e- $f(x) = (x^2 + 1) \, . \, (3x - 7)^3$

TAXAS RELACIONADAS

Velocidade e Aceleração – Taxa de Variação

Suponhamos que uma partícula desloca-se sobre o eixo OX com função de posição $x = f(t)$, f fornece a cada instante a posição ocupada pela partícula na reta.

A velocidade da partícula no instante t é definida como sendo a derivada de f em t.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

A aceleração no instante t é definida como sendo a derivada em t da função $v = v(t)$.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

Exemplo 1: Uma partícula move-se sobre o eixo OX de modo que no instante t a posição x é dada por $x = t^2, t \geq 0$, onde x é dado em metros e t em segundos.

a) Determine as posições ocupadas pela partícula nos instantes *t=0, t=1 e t=2.*
b) Qual a velocidade no instante t?
c) Qual a aceleração no instante t?
d) Esboce o gráfico da função de posição.

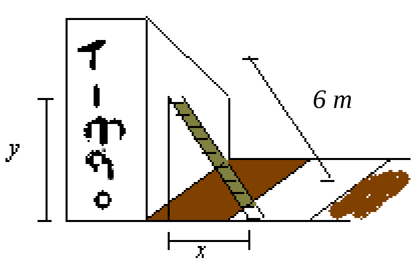
Exemplo 2: Uma partícula move-se sobre o eixo OX de modo que no instante t a posição x é dada por $x = \cos 3t, t \geq 0$, onde x é dado em metros e t em segundos.

a) Determine as posições ocupadas pela partícula nos instantes $t = 0, t = \frac{\pi}{6}, t = \frac{\pi}{3}, t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{2\pi}{3}$.
b) Qual a velocidade no instante t?
c) Qual a aceleração no instante t?
d) Esboce o gráfico da função de posição.

Exemplo 3: Um ponto move-se ao longo do gráfico de $y = x^2 + 1$ de tal modo que a sua abscissa x varia a uma velocidade constante de 3cm/s. Qual é, quando x= 4 cm a velocidade da ordenada y?

Exemplo 4: O raio de uma esfera está variando com o tempo, a uma taxa constante de 5 m/s. com que taxa estará variando o volume da esfera no instante em que $r = 2m$?

Exemplo 5: Uma escada de 6m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente, à razão de $0{,}6\, m/s$, com que velocidade o topo da escada percorre a parede, quando está a $4\ m$ do solo?



Exemplo 6: A que taxa o nível do líquido diminui dentro de um tanque cilíndrico vertical se bombearmos o líquido para fora a uma taxa de 3000L/min? (raio r do cilindro igual a 1m).

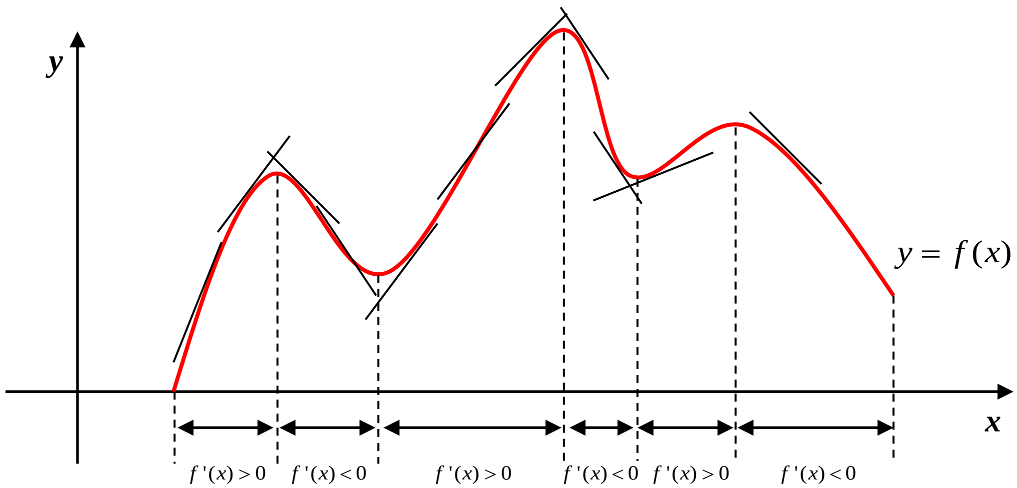
Exemplo 7: Enche-se um reservatório, cuja forma é a de um cone circular reto invertido, de água a uma taxa de $0{,}1\ m^3/s$. O vértice está a 15 m do topo e o raio do topo é de 10m . Com que velocidade o nível h da água está subindo no instante em que h = 5m?

O TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA

Mostraremos neste momento como o sinal da derivada primeira (f') pode ser usado para determinar onde (intervalo) uma função f é crescente ou decrescente. Informação que poderá ser útil na classificação dos extremos locais de uma função.

Seja f contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

- Se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b),então f é **crescente** em $[a, b]$.
- Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b),então f é **decrescente** em $[a, b]$.



Exemplo 1: Seja f definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$. (a) Determinar os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente. (b) Esboçar o gráfico de f.

Teste da derivada Primeira

Seja c um número crítico de f, e suponhamos f contínua em c e diferenciável em um intervalo aberto I contendo c, exceto possivelmente no próprio c

- Se f' passa de positiva para negativa em c, então $f(c)$ é **máximo local** de f.
- Se f' passa de negativa para positiva em c, então $f(c)$ é **mínimo local** de f.
- Se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo x em I exceto $x = c$, então $f(c)$ não é extremo local de f.

Exemplo 2: Seja f definida por $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$. (a) Determinar os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente. (b) Esboçar o gráfico de f.

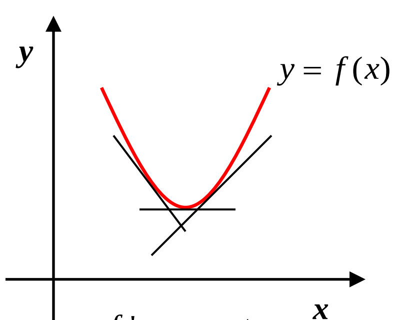
Exemplo 3: Seja f definida por $f(x)=\dfrac{x^2-x}{1+3x^2}$. (a) Determinar os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente. (b) Esboçar o gráfico de f.

CONCAVIDADE E O TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

Usaremos o sinal da derivada segunda (f'') para determinar onde a derivada f' é crescente e onde ela é decrescente.

Se f for diferenciável em um intervalo aberto I. O gráfico de f é

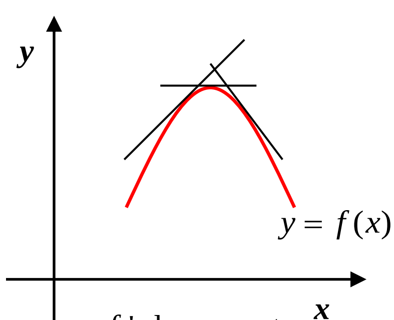
- **Côncavo para cima** em I se f' é crescente em I.
- **Côncavo para baixo** em I se f' é decrescente em I.



f' crescente

$f''(x) > 0$

Gráfico côncavo para cima



f' decrescente

$f''(x) < 0$

Gráfico côncavo para baixo

Teste da Concavidade

Se a derivada segunda f'' de f existe em um intervalo aberto I, então o gráfico de f é

- **Côncavo para cima** em I se $f''(x) > 0$ em I.
- **Côncavo para baixo** em I se $f''(x) < 0$ em I.

Exemplo 1: Se $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$. Determine os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para cima ou côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico de f.

Um ponto $(c, f(c))$ do gráfico de f é um **ponto de inflexão** se são verificadas as duas condições:

- f é contínua em c.
- Existe um intervalo aberto (a,b) contendo c tal que o gráfico é côncavo para cima em (a,c) e côncavo para baixo em (c,b), ou vice versa.

Teste da Derivada Segunda

Seja f diferenciável em um intervalo aberto contendo c, e $f'(c)=0$.

- Se $f''(c)<0$, então f tem máximo local em c.
- Se $f''(c)>0$, então f tem mínimo local em c.

Exemplo 2: Se $f(x)=-x^4+2x^2+12$, use o teste da derivada segunda para determinar os extremos locais de f. Discuta a concavidade, ache os pontos de inflexão e esboce o gráfico de f.

Exemplo 3: Estude f com relação a concavidade e determine os pontos de inflexão se existirem.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

INTEGRAIS

Os dois mais importantes instrumentos do cálculo são a derivada, já estudada anteriormente e a integral, motivação de nossos próximos estudos. A reunião dos cálculos diferencial e integral (ligação chamada de teorema fundamental do cálculo) tornou-se a ferramenta mais poderosa que os matemáticos já obtiveram para entender o universo.

Antiderivadas e Integração Indefinida

Definição: Uma função F é uma antiderivada de f em um intervalo I se $F'(x) = f(x)\ \forall x$ em I

Ilustração: $F(x) = x^2$ é uma antiderivada de $f(x) = 2x$. Notemos que há uma família de antiderivadas de $f(x) = 2x$.

Função	Antiderivadas da Função
$f(x) = 2x$	$F(x) = x^2 + 2$
$f(x) = 2x$	$F(x) = x^2 - 5/2$
$f(x) = 2x$	$F(x) = x^2 + \sqrt{5}$
$\vdots$	$\vdots$
$f(x) = 2x$	$F(x) = x^2 + C$

C = constante

Teorema: Seja F uma antiderivada de f em um intervalo I. Se G é uma outra antiderivada de f em I, então

$$G(x) = F(x) + C$$

Para alguma constante C e todo x em I.

Mais Ilustrações:

$f(x) =$	**Exemplos de Antiderivadas de** $f(x)$
x^2	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$
$8x^3$	$F(x) = 2x^4 + C$
$\cos x$	$F(x) = \operatorname{sen} x + C$

Definição: A notação $\int f(x)dx = F(x) + C$, onde $F'(x) = f(x)$ e C é uma constante arbitrária, denota a família de todas as antiderivadas de $f(x)$ em um intervalo I.

- $\int$ = sinal de integral
- $f(x) =$ integrando
- $dx =$ símbolo que especifica a variável independente x - variável de integração

Exemplo:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\textit{derivando}} & \\ F(x) = x^3 + 2x^2 + C & & f(x) = 3x^2 + 4x \\ & \xleftarrow{\textit{integrando}} & \end{array}$$

Tabela Sumária de Integrais Indefinidas

Integral Indefinida $\int D_x[f(x)]dx = F(x) + C$
$\int 1dx = x + C$
$\int x^r\, dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$
$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$
$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$
$\int \sec^2 x\, dx = tgx + C$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln x + C$
$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = arc\ tg\ x + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\ \operatorname{sen} x + C$
$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \dfrac{x}{2}.\sqrt{r^2 - x^2} + \dfrac{r^2}{2}.arc\operatorname{sen}\dfrac{x}{r} + C$

Exemplos:

1- $\int x^3 . x^5 dx =$

2- $\int \frac{1}{x^3} dx =$

3- $\int \sqrt[4]{x^3} dx =$

Teorema:

- $\int c\, f(x) dx = c \int f(x)\, dx$ para qualquer constante c
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

1- Calcule $\int (5x^3 + 2\cos x)\, dx$

2- Calcule $\int \left(8t^3 - 6\sqrt{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$

3- Calcule $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^2} dx$

MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS INDEFINIDAS

Veremos neste momento uma técnica de integração muito útil na resolução de integrais indefinidas não triviais. Veremos um método de mudança de variável de integração de modo que essas integrais e muitas outras possam ser calculadas por meio de fórmulas conhecidas.

Se F é uma antiderivada de f, então $\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$ **. Se** $u = g(x)$ **e**

$du = g'(x)\,dx$ **, então** $\int f(u)\,du = F(u) + C$

Integração por Substituição

Exemplo 1: Calcular $\int \sqrt{5x+7}\,dx$

Exemplo 2: Calcular $\int \cos 4x\,dx$

Exemplo 3: Calcular $\int (2x^3 + 1)^7 \; x^2 \, dx$

Exemplo 4: Calcular $\int (2x^3 + 2x)^2 \, (6x^2 + 2) \; dx$

Exercícios:

1- Calcular $\int x\,.\sqrt[3]{7-6x^2}\,dx$

2- Calcular $\int 3x^2\ .\text{sen}\,x^3\,dx$

3- Calcular $\int x\,.(2x^2+3)^{10}\,dx$

4- Calcular $\int \frac{x^2-1}{(x^3-3x+1)^6}\,dx$

5- Calcular $\int \frac{senx}{\cos^3 x}\,dx$

6- Calcular $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

7- Calcular $\int sen^5 x \cos x\,dx$

8- Calcular $\int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$

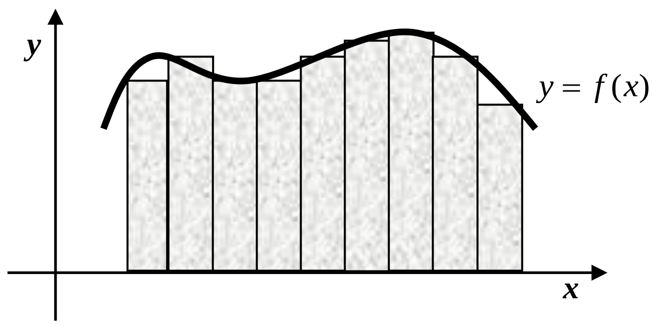
9- Calcular $\int sen^3 x \cos x\,dx$

10- Calcular $\int x\ e^{-x^2}\,dx$

A INTEGRAL DEFINIDA

Área

Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.



A soma da área dos n retângulos pode ser representada por $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i$

Seja $y = f(x)$ uma função contínua, não negativa em [a, b]. A **área** sob a curva $y = f(x)$, de a até b, é definida por $A = \lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i$

Integral Definida

A integral definida está associada ao limite da definição anterior. Nasceu com a formalização matemática dos problemas de áreas.

Seja f uma função definida no intervalo [a, b] e seja P uma partição qualquer de [a, b]. A integral definida com f de a até b, denotado por $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i$ desde que o limite exista.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O teorema fundamental do cálculo além de ser útil no cálculo das integrais definidas, ele evidencia a relação entre o estudo das derivadas e das integrais definidas.

Teorema Fundamental do Cálculo

Suponhamos f contínua em um intervalo fechado [a, b].

- Se a função G é definida por $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ para todo x em [a, b], então G é uma antiderivada de f em [a, b]
- Se F é qualquer antiderivada de f em [a, b], então $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

Exemplo 1: Calcular $\int_{-2}^{3} 3dx$

Exemplo 2: Calcular $\int_{-1}^{2} (x+2)dx$

Exemplo 3: Calcular $\int_{-1}^{2}(x^3+3x-1)dx$

Exemplo 4: Calcular $\int_{-2}^{4}(\frac{1}{2}x+3)\,dx$

Exemplo 5: Calcular $\int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\, dx$

PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

Veremos neste momento algumas propriedades fundamentais da integral definida.

Se c é um número real, então $\int_{a}^{b} c\, dx = c\,(b-a)$

Se f é integrável em [a, b] e c é um número real arbitrário, então $c\,f$ é integrável em [a, b] então $\int_{a}^{b} c\ f(x)dx = c\int_{a}^{b} f(x)\,dx$

Se f e g são integráveis em [a, b], então $f+g$ e $f-g$ são integráveis em [a, b] então $\int_{a}^{b} [\,f(x) \pm g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \ \pm \int_{a}^{b} g(x)\,dx$

Se f é integrável em [a, b] e $f(x) \geq 0$ para todo x em [a, b] então $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq 0$

Se f e g são integráveis em [a, b] e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em [a, b], então $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq \int_{a}^{b} g(x)\,dx$

Integrais definidas – Método da Substituição

O método de substituição de variáveis trabalhado anteriormente para as integrais indefinidas, pode ser estendido as integrais definidas.

Exemplo 1: Calcular $\int_{2}^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx$

Exemplo 2: Calcular $\int_{0}^{\pi/4} (1+\operatorname{sen} 2x)^3 .\cos 2x\,dx$

Exercícios: Calcule a integral:

1- $\int_{1}^{4} (x^2 - 4x - 3)\, dx$

2- $\int_{1}^{4} (8z^3 + 3z - 1)\, dz$

3- $\int_{-8}^{8} (\sqrt[3]{x^2} + 2)\, dx$

4- $\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^3 \; .x\, dx$

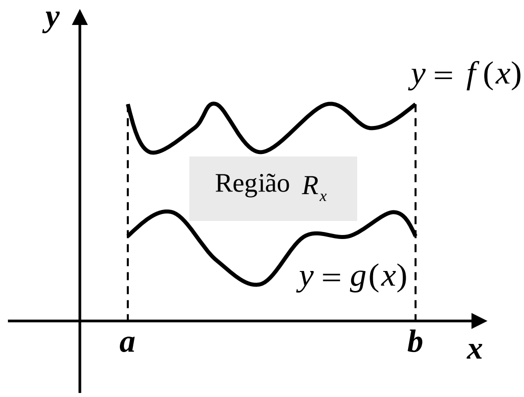
5- $\int_{0}^{1} \frac{1}{(3 - 2x^2)^2}\, dx$

6- $\int_{0}^{1} (3 - x^4)^3 .x^3 \; dx$

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

Abordaremos que grande parcela de situações pode ser calculada com integrais: o volume de sólidos, o comprimento das curvas, a quantidade de trabalho necessária para bombear líquidos do subsolo, as forças exercidas contra comportas, as coordenadas de pontos onde objetos sólidos terão equilíbrio (centro de massa), áreas. Definiremos todos esses cálculos através de limites das somas de Riemann de funções contínuas em intervalos fechados.

ÁREA



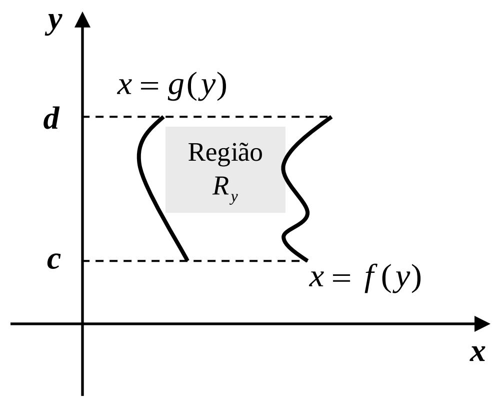
Teorema: Se f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a,b]$, então a área A da região delimitada pelos gráficos de f, g, $x = a$ e $x = b$ é

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

Exemplo 1: Achar a área da região delimitada pelos gráficos das equações $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Exemplo 2: Achar a área da região R delimitada pelos gráficos das equações $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$.

Calculando a área para uma região R_y



Exemplo 3: Achar a área da região delimitada pelos gráficos das equações $2y^2 = x + 4$ e $y^2 = x$.

Cálculo de Áreas: Problemas

Exemplo 1: Calcule a área do conjunto do plano limitado pelas retas $x=0$, $x=1$, $y=0$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$.

Exemplo 2: Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^3$, pelo eixo x e pelas retas x=-1 e x=1.

Exemplo 3: Calcule a área da região limitada pelas retas $x= 0$, $x= 1$, $y= 2$ e pelo gráfico de $y= x^2$.

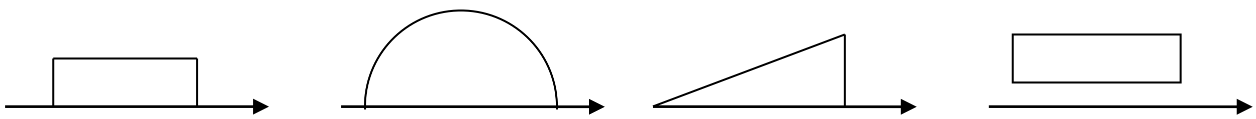
Exemplo 4: Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x,y) tais que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

Exemplo 5: Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de y=x e y= x^2 com $0 \le x \le 2$..

Exemplo 6: Achar a área da região R delimitada pelos gráficos das equações $y + x^2 = 6$ e $y + 2x - 3 = 0$.

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

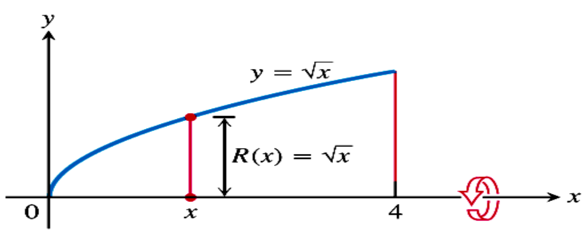
Um sólido de revolução é um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de uma reta, a reta é chamada de eixo de revolução.



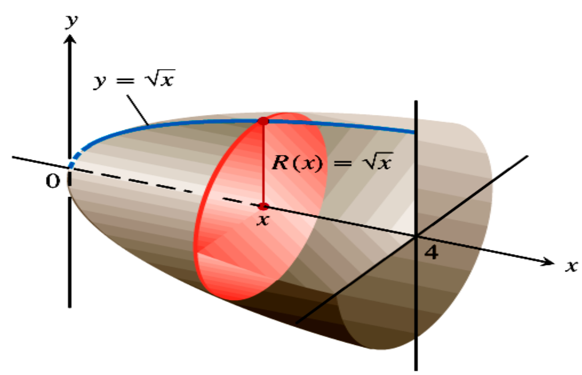
Definição: Seja f contínua em [a,b], e seja R a região delimitada pelo gráfico de f pelo eixo-x e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. O volume V do sólido de revolução gerado pela revolução de R em torno do eixo-x é

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x) \right]^2 dx$$

Exemplo 1: Seja a região formada por $y = \sqrt{x}$ e $0 \le x \le 4$. A função gira em torno do eixo x para gerar um sólido. Determine o seu volume.

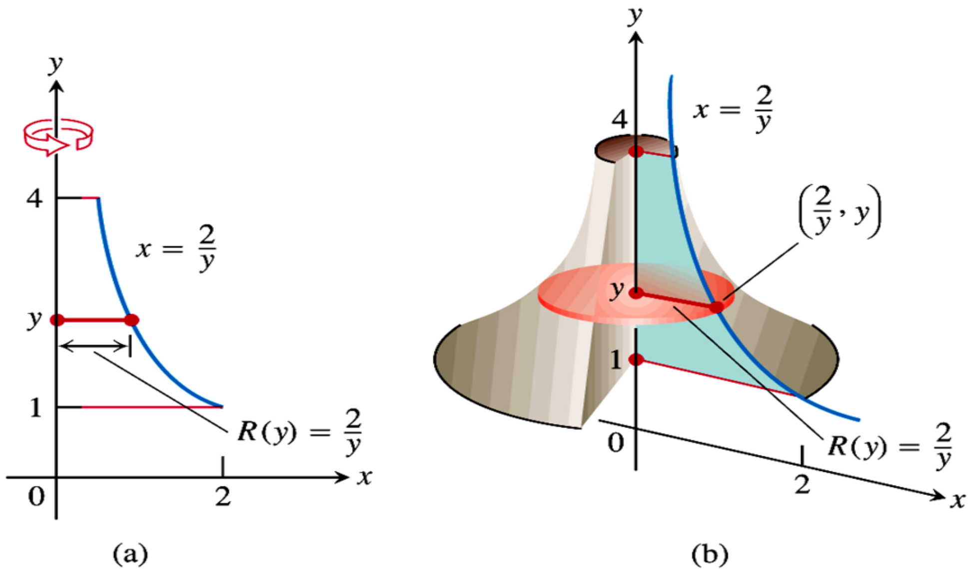


(a)

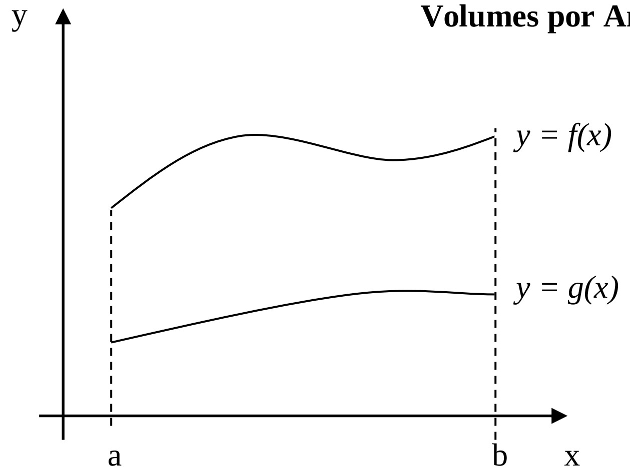


(b)

Exemplo 2: Determine o volume do sólido obtido com a rotação, em torno do eixo y, da região compreendida entre o eixo y e a curva $x = \dfrac{2}{y}$ **com** $1 \le y \le 4$.



Volumes por Anéis Cilindricos



$$V=\int_a^b \pi\left(\left[f(x)\right]^2-[g(x)]^2\right)dx$$

Exemplo1: Ache o volume do sólido gerado quando a região entre os gráficos das equações $f(x)=\frac{1}{2}+x^2$ e $g(x)=x$ sobre o intervalo [0,2] é girada em torno do eixo x.

Exemplo2: Ache o volume do sólido gerado quando a região limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e $x = 0$ e *g(x)=x* é girada em torno do eixo y.