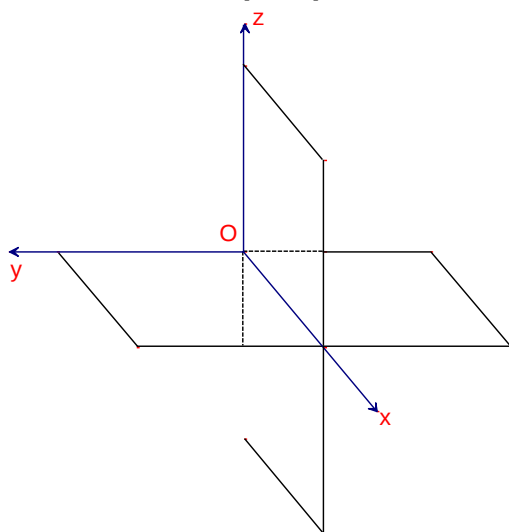




O MÉTODO DAS DUPLAS PROJEÇÕES ORTOGONAIS

PARTE I – REPRESENTAÇÃO DO PONTO

1. Planos fundamentais de referência (PFR)



Consideremos π' e π'' dois planos perpendiculares entre si, denominados *Planos Fundamentais de Referência* (PFR) ou *Planos de Fundamentais de Projeção* (PFP).

Denominamos:

π' - 1º PFR ou 1º PFP ou Plano Horizontal de Projeção.

π'' - 2º PFR ou 2º PFP ou Plano Vertical de Projeção.

A interseção de π' e π'' chama-se *Linha de Terra*. Esta divide π' nas partes: anterior e posterior e π'' em superior e inferior.

Estes dois planos dividem o espaço em 4 porções, chamadas de *diedros*:

1º diedro – entre a parte anterior de π' e a superior de π''

2º diedro – entre a parte posterior de π' e a superior de π''

3º diedro – entre a parte posterior de π' e a inferior de π''

4º diedro – entre a parte anterior de π' e a inferior de π''

Considerando uma origem O sobre a Linha de Terra temos os eixos x, y e z.

No 1º diedro temos os valores para x ____ y ____ e z ____

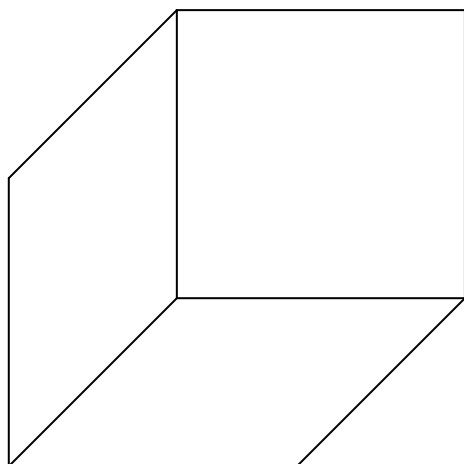
No 2º diedro temos os valores para x ____ y ____ e z ____

No 3º diedro temos os valores para x ____ y ____ e z ____

No 4º diedro temos os valores para x ____ y ____ e z ____

Consideremos um 3º PFR (ou 3º PFP ou 3º PDP ou Plano Lateral de Projeção) π''' que contém os eixos y e z. Estes 3 planos dividem o espaço em octantes.

2. Representação do ponto



Seja A um ponto. Consideremos as 3 projeções cilíndricas ortogonais: A' , A'' e A''' sobre os planos π' , π'' e π''' , respectivamente.

Temos as distâncias de A até os 3PFR:

Cota – distância de A até π' = segmento AA'

Afastamento – distância de A até π'' = segmento AA''

Abscissa – distância de A até π''' = segmento AA'''

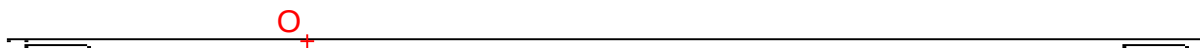
Estas distâncias também nos fornecem as coordenadas (x,y,z) do ponto A :

x = abscissa

y = afastamento

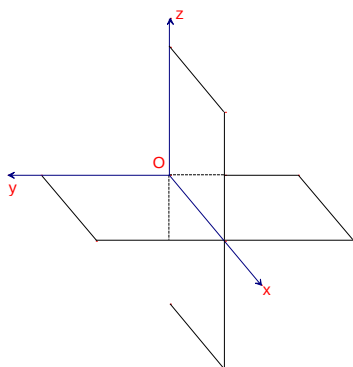
z = cota

Fixamos um dos PFR e rebatemos os outros sobre o primeiro escolhido, temos a representação plana do ponto, chamada de *épura do ponto A*:



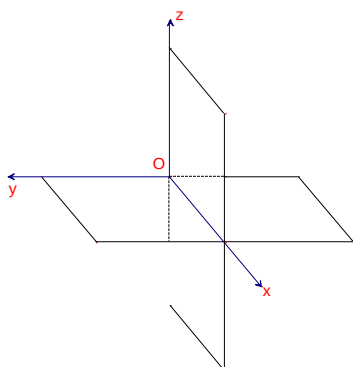
Um ponto pode pertencer a qualquer diedro:

a) A pertence ao 1º diedro



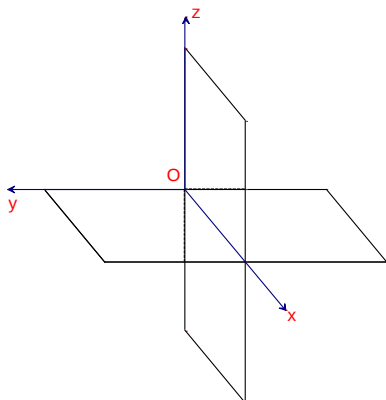
=====

b) B pertence ao 2º diedro



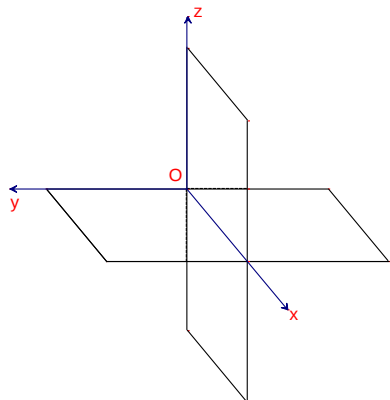
=====

c) C pertence ao 3º diedro



=====

d) D pertence ao 4º diedro



=====

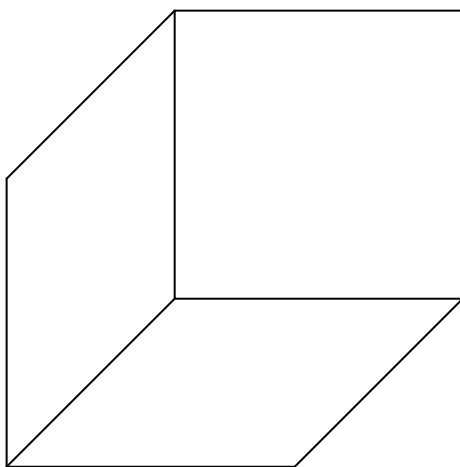
5. Obtenção da 3ª projeção

Para obtermos a representação do ponto na 3ª projeção, podemos rebater o 3º PFP sobre o 1º ou 2º PFP.

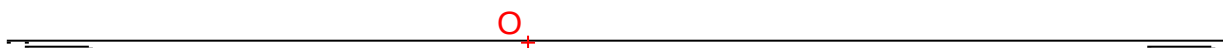
Rebatimento sobre π'' :

Consideremos o 2º PFP fixo. Ao rebatermos o 3º plano sobre o 2º, a 3ª projeção do ponto descreverá um arco de circunferência com centro no eixo z e raio o seu afastamento. Este arco está contido num plano paralelo a π' e, portanto está em VG na 1ª projeção. A 3ª projeção rebatida do ponto pertence a uma reta que passa pela segunda projeção do ponto e é paralela a linha de terra.

Espaço



Épura



Exercícios

A unidade utilizada é o milímetro.

1. Representar a 1ª, 2ª e a 3ª projeções dos pontos dados.

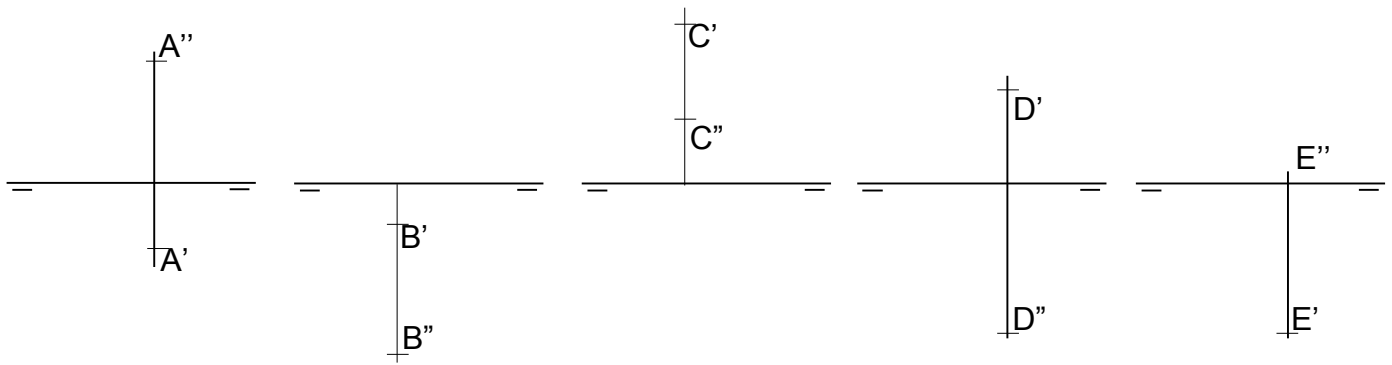
a) A(20,30,40)

b) B(50,-20,40)

c) C(30,-40,-20)

d) D(40,50,-20)

2. Localizar os pontos dados nos diedros.



A ∈ _____ B ∈ _____ C ∈ _____ D ∈ _____ E ∈ _____

3. Representar os pontos dados. Identificar a posição do ponto em relação aos diedros ou aos planos de projeção.

A(20,30,10) ∈ _____

B(50,-20,40) ∈ _____

C(30,-40,-20) ∈ _____

D(40,50,-10) ∈ _____

E(10,0,30) ∈ _____

F(60,20,0) ∈ _____

G(15,0,-40) ∈ _____

4. Representar os pontos dados e obter as terceiras projeções.

A(20,50,20)

B(40,-10,-20)

C(50,-20,10)

D(60,30,-40)

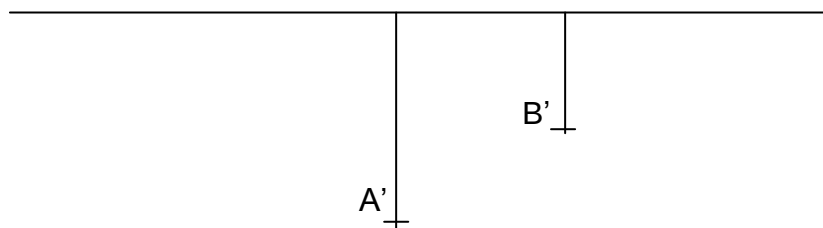
E(10,40,?) $\in \pi'$

F(-10,-20,-30)

G(-40,30,-10)

H(-10,-20,0)

5. Representar um quadrado contido em π' sendo dados A e B.



6. Representar um quadrado contido num plano α paralelo a π' sendo dados A e B.
A(20,20,10) B(40,30,?)
7. Representar o paralelogramo ABCD, sendo dados os vértices A e B, e o ponto M de interseção das diagonais.
a) A(10,30,30) B(30,10,10) M(40,15,20)
b) A(10,20,-30), B(-20,30,-10) e M(20,10,30)
8. Representar um hexágono regular ABCDEF, contido em π'' sendo dados dois vértices.
a) A(20,?,20) e B(40,?,10)
b) A(30,?,50) e C(60,?,30)
9. Representar o triângulo ABC sendo dados M, N e P, pontos médios dos lados.
a) M(20,35,50) N(40,60,40) P(60,50,30)
b) M(-25,30,30) N(10,60,50) P(30,25,20)
10. Representar o triângulo ABC sendo dados os vértices A e B e o baricentro G.
A(30,10,20) B(20,50,40) G(50,30,30).
11. Representar um quadrado contido em π' sendo dados A(20,40,?) e sabendo-se que o lado AB mede 30 e é paralelo à LT.
12. Representar os pontos A e B de π' conhecendo A(10,30,?) e B(x,50,?) sabendo-se que AB=30.
13. Representar um triângulo equilátero ABC contido em π' de lado l=30, com o vértice A pertencente a π'' e um lado perpendicular a π'' .
a) $AB \perp \pi''$ A(40,?,?)
b) $BC \perp \pi''$ A(30,?,?)

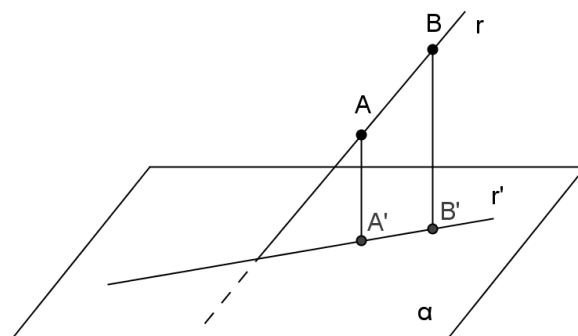
PARTE II – REPRESENTAÇÃO DA RETA

1. Representação da reta

Propriedade já vista: Se r é uma reta então r' ou é uma reta (se r não for paralela a direção das projetantes d) ou um ponto (se r for paralela a direção das projetantes d).

Para obtemos a projeção de uma reta consideramos:

- ou dois pontos A e B pertencentes a r
- ou o seu plano projetante

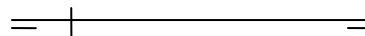
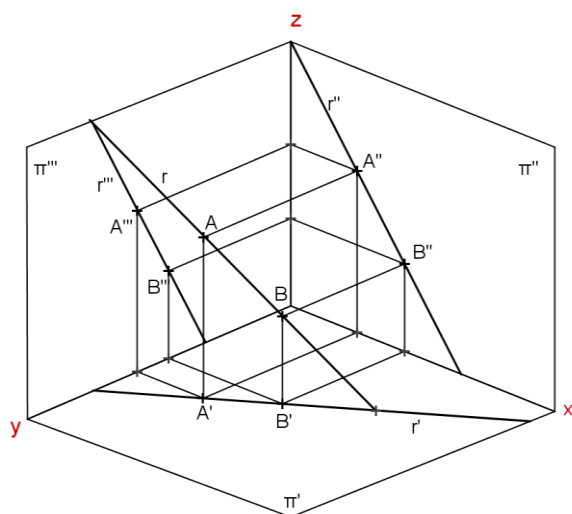


Como temos 3 PFR então há 3 projeções e portanto 3 planos projetantes.

Normalmente, consideramos apenas a 1ª e a 2ª projeções da reta, pois são suficientes para determinar a 3ª projeção (exceto para a reta de perfil que veremos mais tarde).

Espaço

Épura



2. Ponto pertencente à reta

Propriedade: $P \in r \Leftrightarrow P' \in r' \text{ e } P'' \in r''$

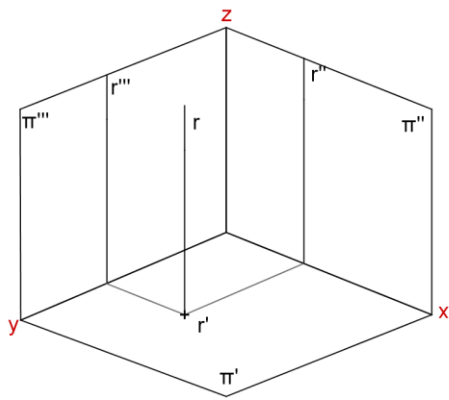
Mas se $r // \pi'''$ e $r \perp \pi'$ então também deve ser verificado se $P''' \in r'''$.

Exemplos:

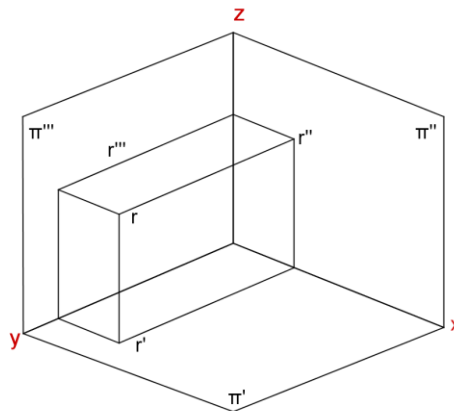
3. Posições da reta em relação aos PFR

A reta pode ocupar posições distintas em relação aos 3 PFR, podendo ser:

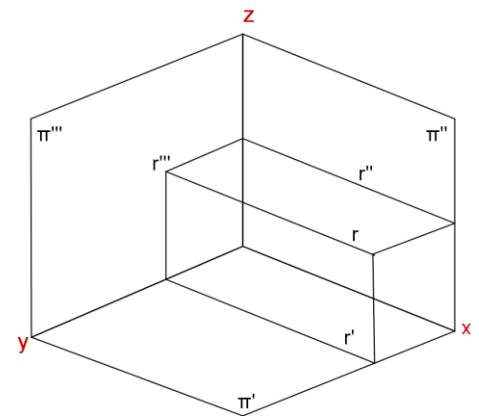
- r perpendicular a um dos PFR:



reta vertical

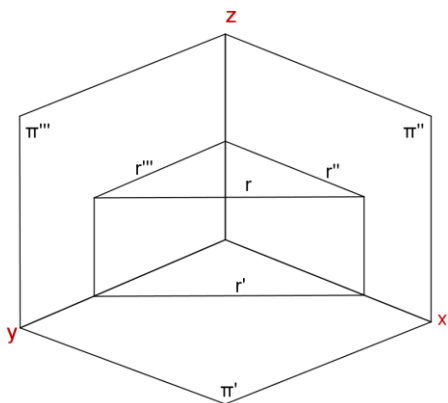


reta de topo

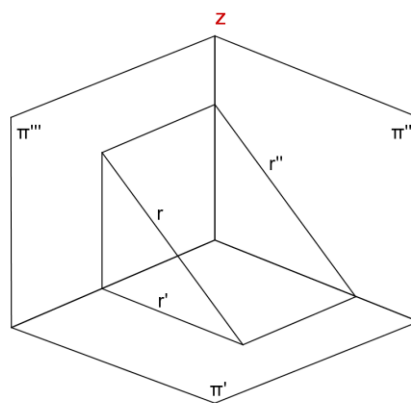


reta fronto-horizontal

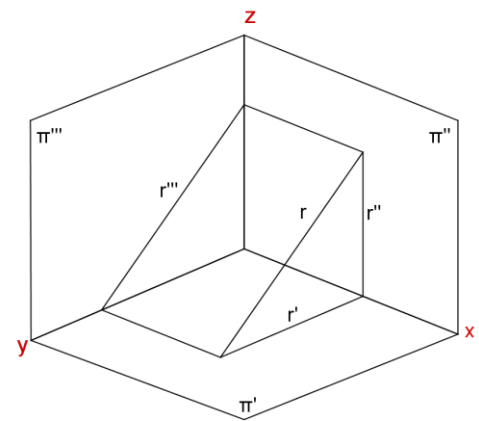
- r paralela a um dos PFR e oblíqua em relação aos outros dois PFR:



reta horizontal

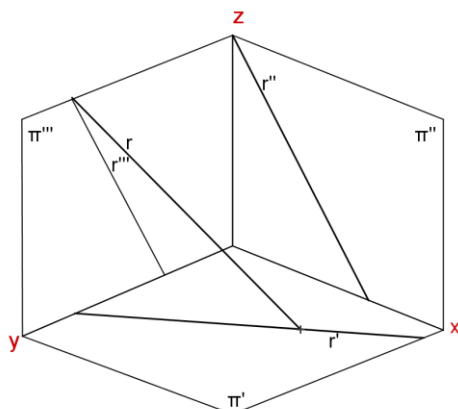


reta frontal



reta de perfil

- r oblíqua em relação a todos os 3 PFR:



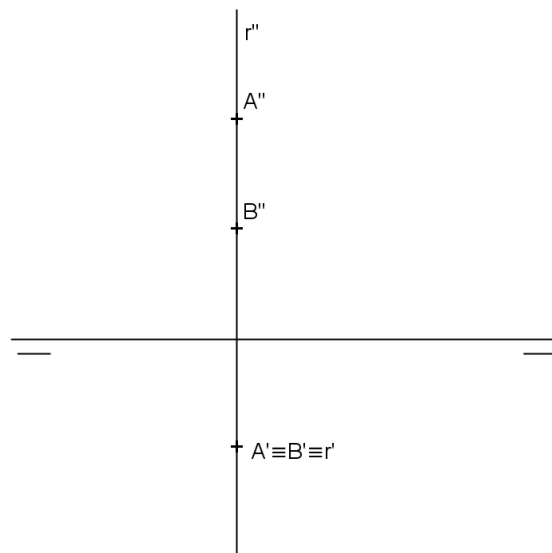
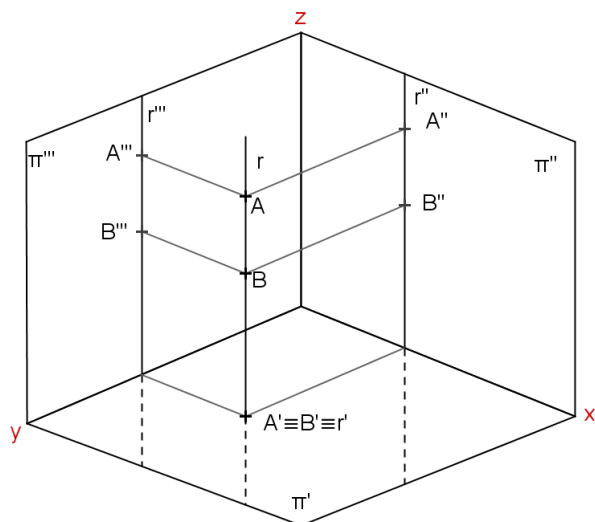
reta qualquer

3.1. Reta vertical

Essa reta é perpendicular ao Plano Horizontal de Projeção e paralela em relação ao Plano Vertical de Projeção.

a) Característica espacial: _____

b) Épura:



c) Diedros: _____

d) Ângulos:

com π' _____

com π'' _____

com π''' _____

e) Tem alguma projeção em VG? _____

f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: _____

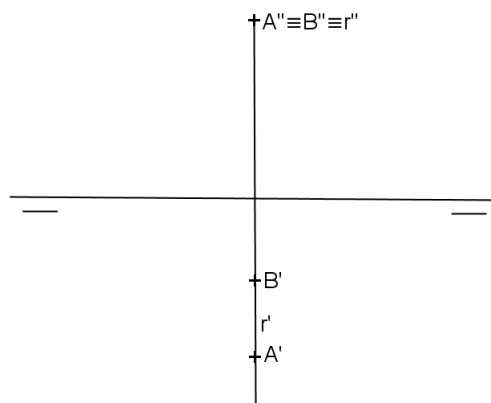
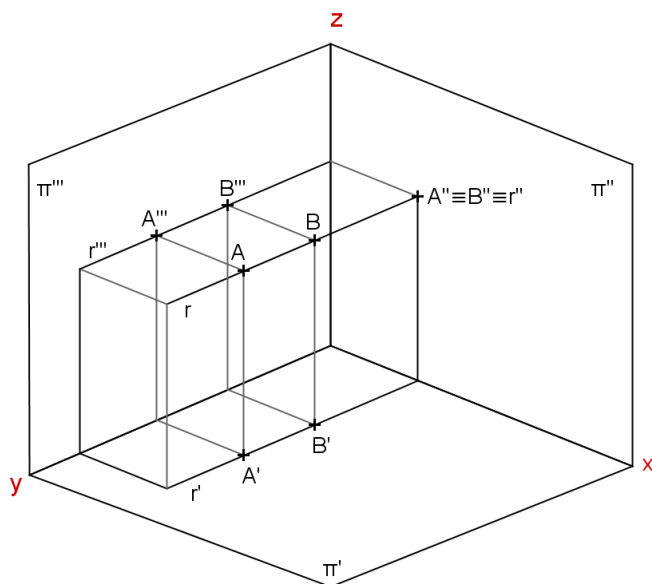
Exemplo: Representar a reta vertical r que passa pelo ponto $A(50,30,40)$. Encontre o ponto B desta reta tal que $AB=20$.

3.2. Reta de topo

Essa reta é paralela ao Plano Horizontal de Projeção e perpendicular em relação ao Plano Vertical de Projeção.

a) Característica espacial: _____

b) Épura



c) Diedros: _____

d) Ângulos:

com π' _____

com π'' _____

com π''' _____

e) Tem alguma projeção em VG? _____

f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: _____

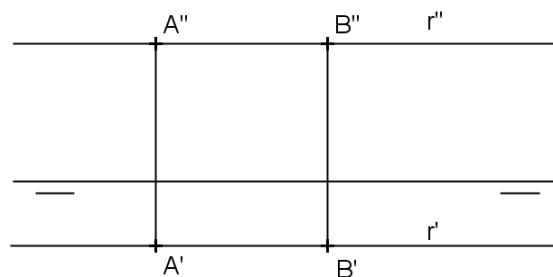
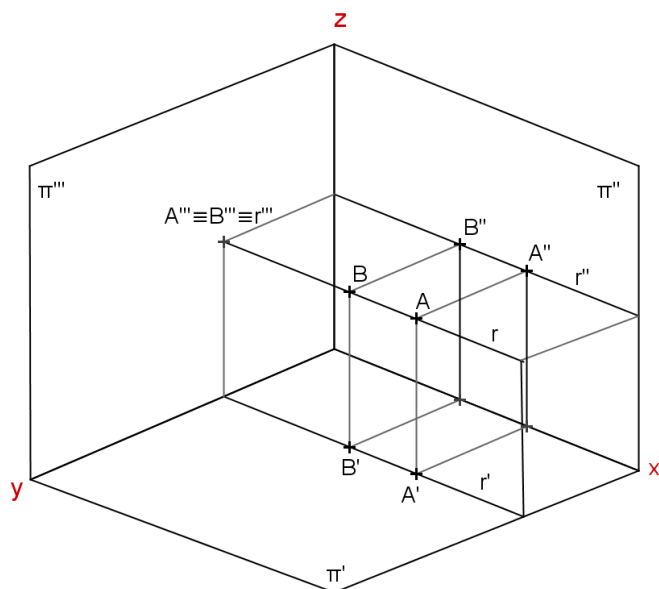
Exemplo: Representar a reta de topo r que passa pelo ponto $A(40,40,30)$. Encontre o ponto B desta reta tal que $AB=15$.

3.3. Reta fronto-horizontal

Essa reta é paralela ao Plano Horizontal de Projeção e paralela em relação ao Plano Vertical de Projeção.

a) Característica espacial: _____

b) Épura:



c) Diedros: _____

d) Ângulos:

com π' _____

com π'' _____

com π''' _____

e) Tem alguma projeção em VG? _____

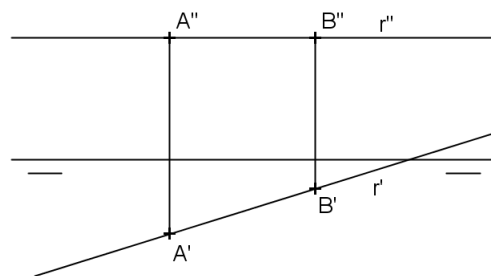
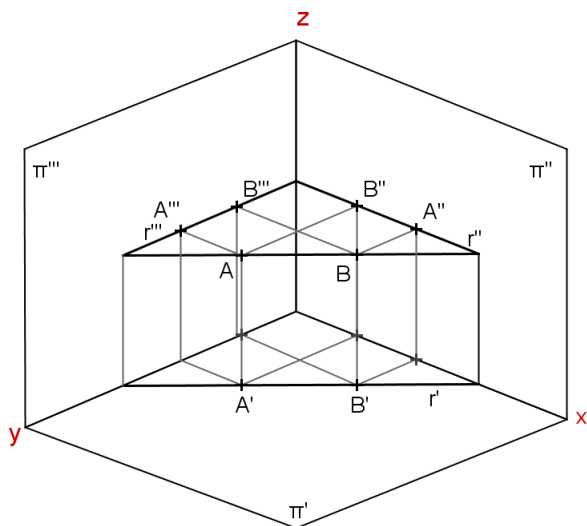
f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: _____

Exemplo: Representar a reta fronto-horizontal r que passa pelo ponto $A(30,20,40)$. Encontre o ponto B desta reta tal que $AB=20$.

3.4. Reta horizontal

Essa reta é paralela ao Plano Horizontal de Projeção e inclinada em relação ao Plano Vertical de Projeção.

a) Característica espacial: _____ b) é pura _____



c) Diedros: _____

d) Ângulos:
 com π' _____
 com π'' _____
 com π''' _____

e) Tem alguma projeção em VG? _____

f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: _____

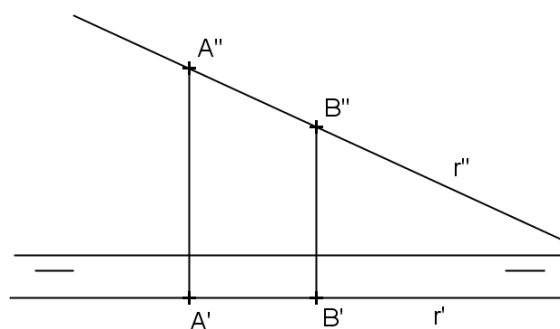
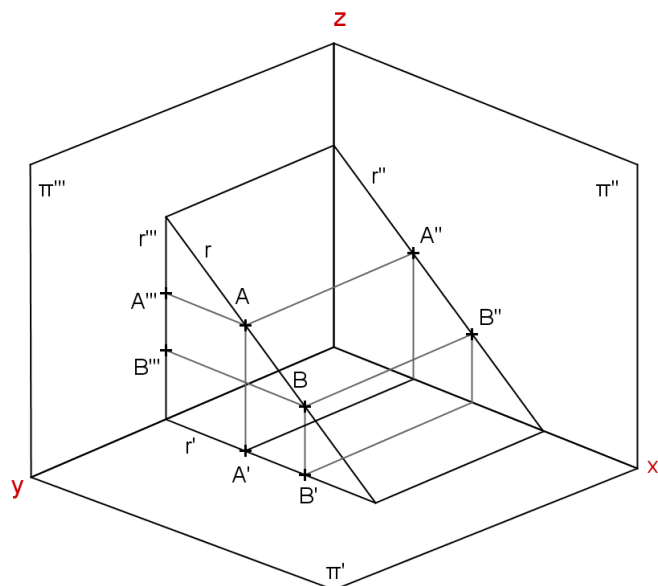
Exemplo: Representar a reta horizontal r que passa pelo ponto $A (10,30,40)$ e forma 30° com π'' .

3.5. Reta frontal

Essa reta é inclinada em relação ao Plano Horizontal de Projeção e paralela em relação ao Plano Vertical de Projeção.

a) Característica espacial: _____

b) Épura:



c) Diedros: _____

d) Ângulos:

com π' _____

com π'' _____

com π''' _____

e) Tem alguma projeção em VG? _____

f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: _____

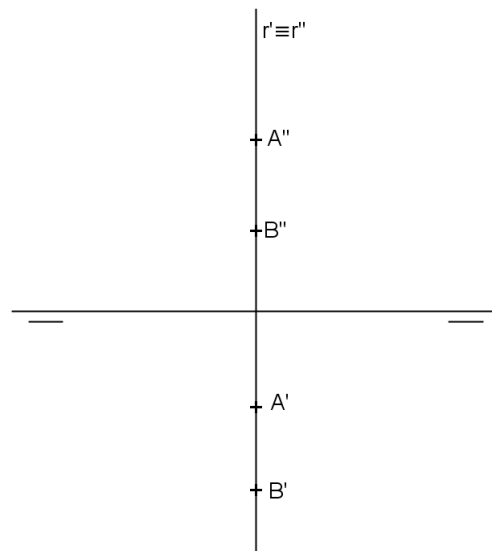
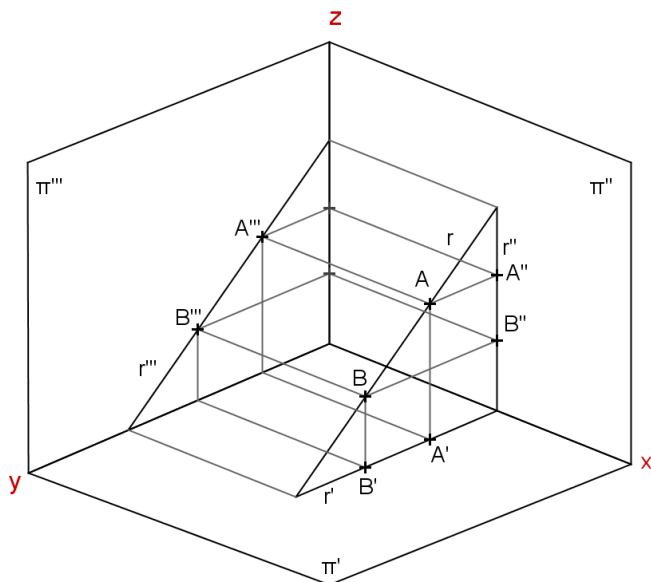
Exemplo: Representar a reta frontal r que passa pelo ponto $A(10,20,30)$ e) e forma 60° com π' .

3.6. Reta de perfil

Essa reta é inclinada em relação ao Plano Horizontal de Projeção e ao Plano Vertical de Projeção e paralela ao Plano Lateral de Projeção.

a) Característica espacial: _____

b) Épura:



c) Diedros: _____

d) Ângulos:

com π' _____

com π'' _____

com π''' _____

e) Tem alguma projeção em VG? _____

f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: _____

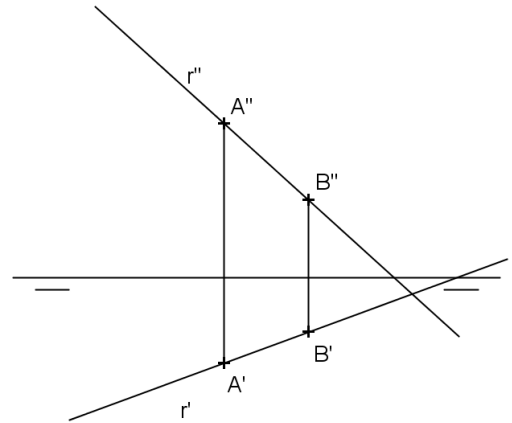
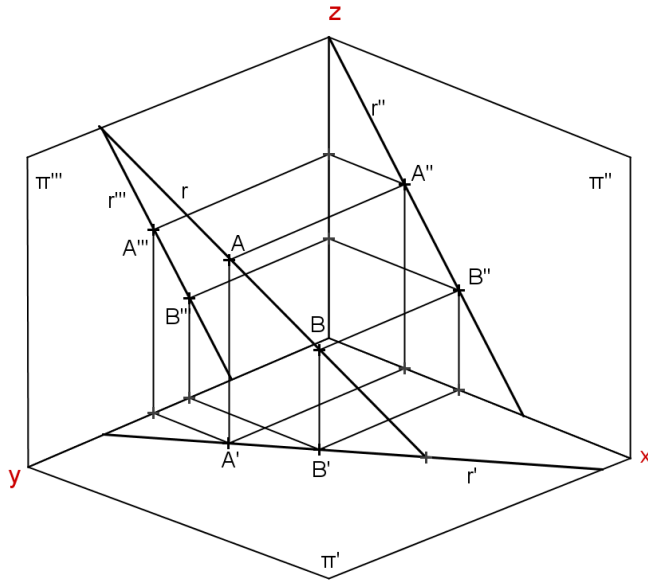
Exemplo: Representar a reta de perfil r que passa pelo ponto $A(20,10,40)$ e forma 45° com π''

3.7. Reta qualquer

Essa reta é inclinada em relação ao Plano Horizontal de Projeção, ao Plano Vertical de Projeção e ao Plano Lateral de Projeção.

a) Característica espacial: _____

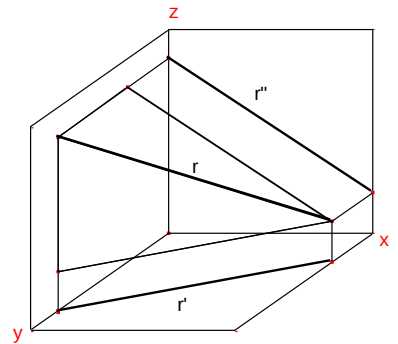
b) Épura



c) Diedros: _____

d) Ângulos:

com π' _____
 com π'' _____
 com π''' _____



e) Tem alguma projeção em VG? _____

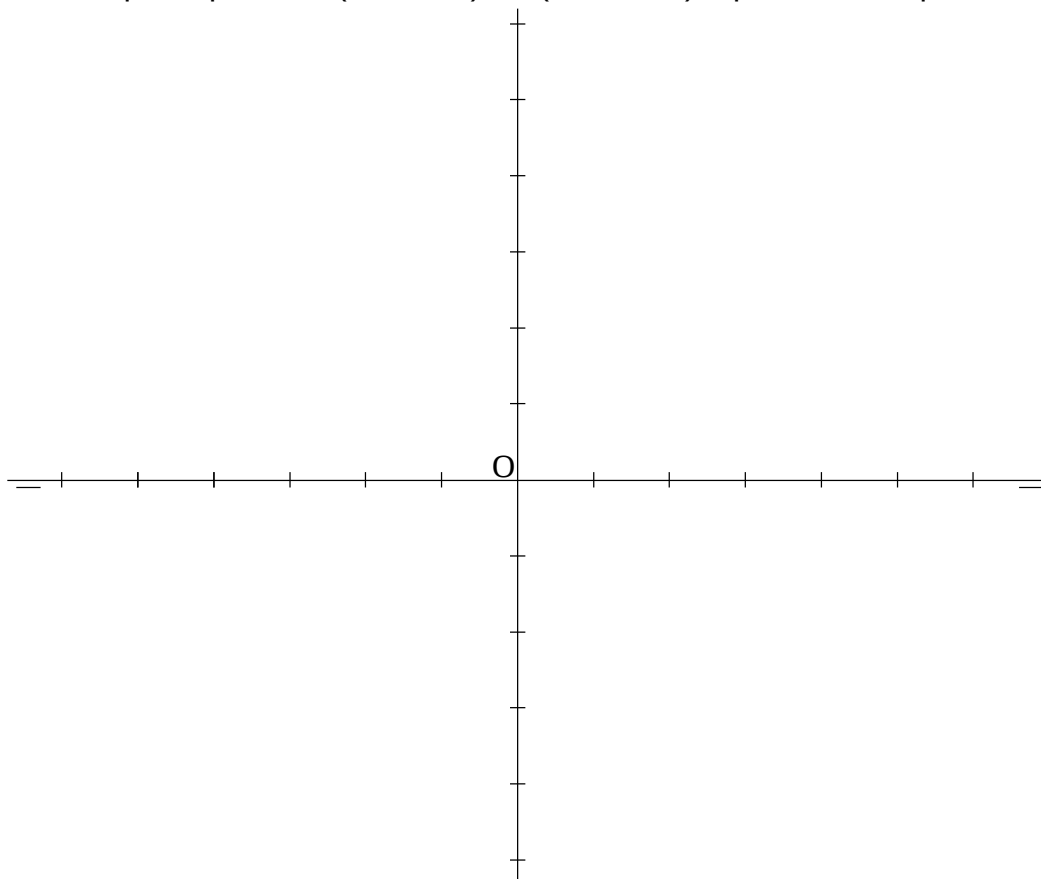
f) Quantidade de pontos necessários para representá-la: _____

Exemplo: Representar a reta de qualquer r que passa pelos pontos $A(10,20,30)$ e $B(50,-20,40)$. Obter a verdadeira grandeza do segmento AB e os ângulos que r forma com e forma com π' e π'' .

Exercícios

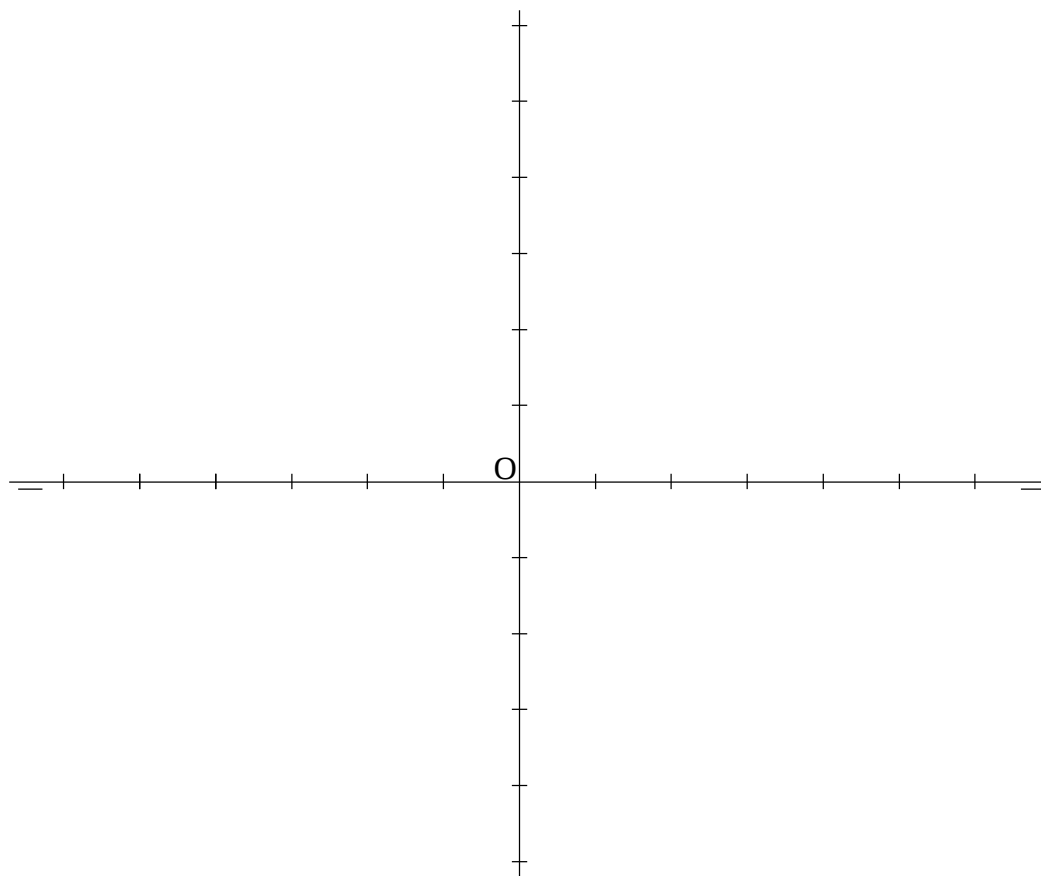
1. Na reta r , definida pelos pontos $A(20,40,10)$ e $B(60,10,-40)$ representar os pontos:

$C(40,?,?)$
 $D(?,50,?)$
 $E(?,?, -10)$
 $F(?, -10,?)$
 $G(?,?,0)$
 $H(-10,?,?,)$
 $I(0,?,?,)$



2. Na reta r , definida pelos pontos $A(40,30,10)$ e $B(40,10,30)$ representar os pontos:

$C(?,35,?)$
 $D(?,?,20)$
 $E(?,?, -10)$
 $F(?, -10,?)$
 $G(?,?,0)$
 $H(?,0,?)$



3. Seja a reta r definida pelos pontos A e B. Representá-la, identificar o nome da reta e sua posição em relação aos PFR (paralela, oblíqua ou perpendicular).
 - a) A(30,15,10), B(60,50,-15)
 - b) A(20,30,20), B(20,45,20)
 - c) A(20,20,30), B(20,20,45)
 - d) A(10,20,-30), B(50,20,20)
 - e) A(40,50,10), B(40,20,30)
4. Seja a reta r definida pelos pontos A e B. Representar os traços H, V e L sobre os PFR (π' , π'' e π'''). Identificar os diedros pelos quais a reta atravessa. Destacar sua visibilidade.
 - a) A(30,20,30), B(50,10,60)
 - b) A(20,30,10), B(40,20,10)
 - c) A(30,20,-40), B(60,20,-40)
 - d) A(30,50,10), B(30,20,30)
 - e) A(20,20,10), B(60,10,-30)
5. Seja a reta r definida pelos pontos A e B. Identificar o nome da reta. Encontrar os ângulos que a reta forma com os PFR, bem como a VG do segmento AB.
 - a) A(0,-20,-10), B(50,20,-10)
 - b) A(30,-10,-40), B(30,20,-40)
 - c) A(50,20,15), B(70,30,35)
 - d) A(30,-30,-10), B(30,-30,20)
 - e) A(20,-20,-30), B(50,-20,-30)
 - f) A(30,10,50), B(30,-30,-15)
 - g) A(20,10,0), B(40,10,30)
6. Representar as retas horizontais que passem pelo ponto dado A e que formem ângulo dado com um dos PFR.
 - a) A(10,30,40) $\theta_3=30^\circ$
 - b) A(10,30,40) $\theta_2=30^\circ$
 - c) A(10,-40,60) $\theta_2=15^\circ$
7. Representar uma reta horizontal que passe pelo ponto dado A sabendo-se que qualquer segmento da mesma tem a sua segunda projeção reduzida a metade desse segmento.
 $A'A'' = 60$
8. Representar as retas frontais que passem pelo ponto dado A e que formem ângulo dado com um dos PFR.
 - a) A(10,30,40) $\theta_1=30^\circ$
 - b) A(10,-40,-60) $\theta_1=15^\circ$
 - c) A(10,30,40) $\theta_3=30^\circ$
9. Representar as retas de perfil que passem pelo ponto dado A e que formem ângulo dado com um dos PFR.
 - a) A(20,25,10), $\theta_1 = 60^\circ$
 - b) A(50,10,-20), $\theta_1 = 30^\circ$
 - c) A(30,20,40), $\theta_2 = 15^\circ$
10. Representar as retas quaisquer que passam pelo ponto dado A(30,20,40) e formam ângulo $\theta_1 = 30^\circ$ com π' e $\theta_2 = 45^\circ$ com π'' .

4. Posição relativa de duas retas

Duas retas r e s podem ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{coplanares} \\ \text{não – coplanares ou reversas} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{paralelas} \\ \text{concorrentes} \\ \text{coincidentes} \end{array} \right.$$

Observação: sejam $r, s, P \in r$ e $\alpha(P, s)$ então

- se $\alpha(P, s)$ possuir em comum com r apenas o ponto P então r e s são reversas e $P \in (rs)$;
- ou se r estiver contida em α então as retas r e s são coplanares.

4.1. Condições de paralelismo

1º) Retas não de perfil

Vimos propriedade 2: Se $r // s$ então $r' // s'$ ou $r' \equiv s'$ ou são pontuais.

Como trabalhamos com pelo menos duas projeções então:

$$r // s \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r' // s' \text{ e } r'' // s'' \\ r' \equiv s' \text{ e } r'' // s'' \text{ (ou } r'' \equiv s'' \text{ e } r' // s') \\ r' \text{ e } s' \text{ são pontuais e } r'' // s'' \text{ (ou } r'' \text{ e } s'' \text{ são pontuais e } r' // s') \end{array} \right.$$

Se $r' \equiv s'$ e $r'' \equiv s''$ e r e s são não de perfil então $r \equiv s$

2º) Retas de perfil

a) as retas pertencem a um mesmo plano projetante em 1ª e 2ª projeções

$$r \text{ e } s \text{ podem ser } \left\{ \begin{array}{l} \text{paralelas se } r''' // s''' \\ \text{coincidentes se } r''' \equiv s''' \\ \text{concorrentes se } r''' \times s''' \end{array} \right.$$

b) as retas pertencem a planos projetantes distintos em 1ª e 2ª projeções

$$r \text{ e } s \text{ podem ser } \left\{ \begin{array}{l} \text{paralelas se } r''' // s''' \text{ ou } r''' \equiv s''' \\ \text{reversas se } r''' \times s''' \end{array} \right.$$

4.2. Condições de incidência

1º) Retas não de perfil

$$r \times s \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r' \times s' \text{ em } P' \text{ e } r'' \times s'' \text{ em } P'' \text{ e } P'P'' \in \text{mesma LC} \\ r' \times s' \text{ e } r'' \equiv s'' \text{ (ou } r'' \times s'' \text{ e } r' \equiv s') \\ r' \times s', r'' \text{ é um ponto e } \in a s'' \text{ (ou } r'' \times s'', r' \text{ é um ponto e } \in a s') \end{array} \right.$$

2º) Uma reta é de perfil e a outra não

Além das condições anteriores deve ser verificada também a 3ª projeção.

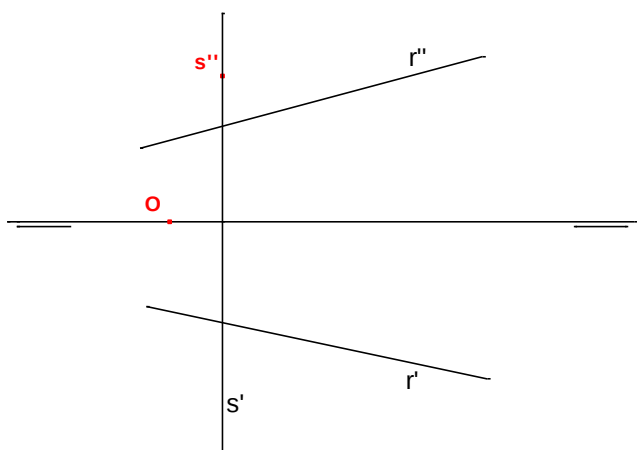
3º) Retas de perfil

Exercícios de posição relativa de duas retas

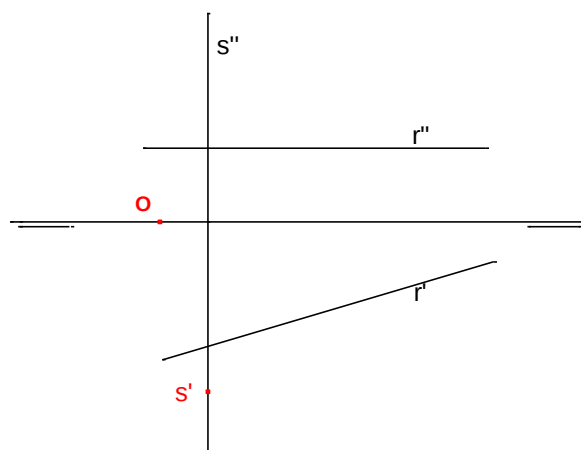
- Representar a reta r pertencente ao ponto $A(10,20,30)$ e paralela a reta $s(P,Q)$:
 - $P(40,10,30)$ $Q(40,20,30)$
 - $P(40,30,15)$ $Q(40,30,40)$
 - $P(30,30,15)$ $Q(10,30,15)$
 - $P(30,30,40)$ $Q(50,15,40)$
 - $P(30,40,20)$ $Q(50,40,40)$
 - $P(30,40,10)$ $Q(10,30,-20)$
- Representar a reta r , pertencente ao ponto dado A e paralela a reta $s(P,Q)$
 - $A(30,50,20)$ $P(30,40,50)$ $Q(30,20,30)$
 - $A(60,40,10)$ $P(40,30,40)$ $Q(40,10,20)$
 - $A(50,30,25)$ $P(50,10,35)$ $Q(50,20,20)$
 - $A(50,30,25)$ $P(40,10,35)$ $Q(40,20,20)$
- São dadas duas retas $r(A,B)$ e $s(P,Q)$, verificar se são coincidentes, paralelas, concorrentes ou reversas. Caso sejam concorrentes, determinar o ponto X em comum.

As retas dadas são não de perfil

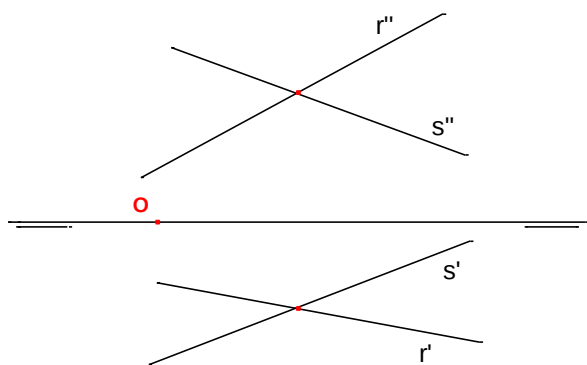
a)



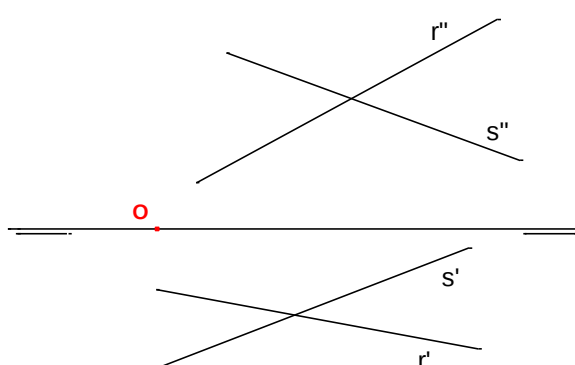
b)



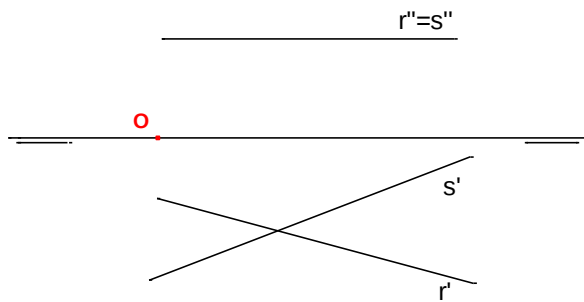
c)



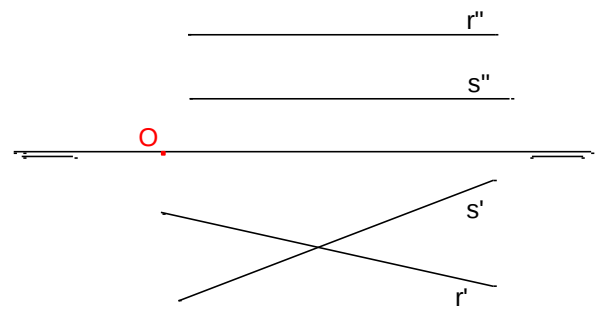
d)



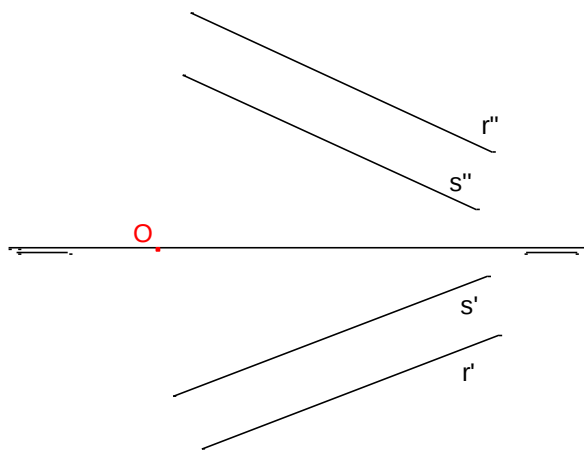
e)



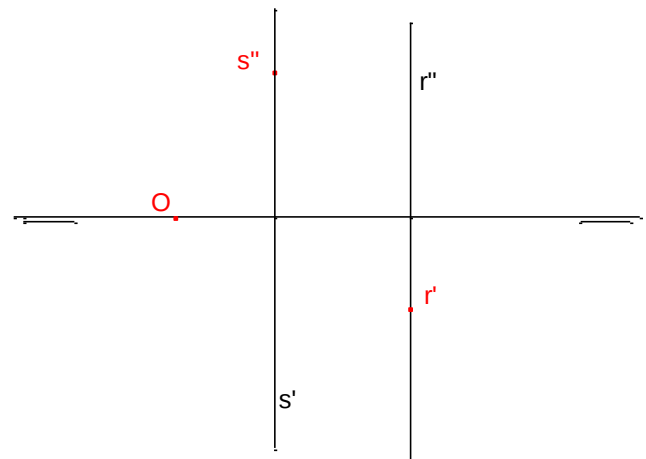
f)



g)



h)



As retas dadas são de perfil

i) A(20,30,40) B(20,40,50) P(40,40,20) Q(40,50,30)

j) A(30,-10,0) B(30,0,10) P(30,10,30) Q(30,20,40)

k) A(20,30,40) B(20,40,50) P(40,40,20) Q(40,10,30)

l) A(30,30,40) B(30,40,20) P(30,10,30) Q(30,20,40)

Uma das retas dadas é de perfil e a outra é não de perfil

m) A(30,-10,40) B(30,0,40) P(30,10,20) Q(30,20,30)

n) A(40,10,30) B(40,30,10) P(20,10,10) Q(60,30,60)

4. Representar a reta horizontal r pertencente ao ponto dado A e concorrente com uma reta qualquer $s(P,Q)$ dada. Representar o ponto X de interseção.
 $A(10,20,-10)$ $P(30,30,30)$ $Q(50,20,40)$
5. Representar a reta frontal r pertencente ao ponto dado A e concorrente com uma reta qualquer $s(P,Q)$ dada. Representar o ponto X de interseção.
 $A(10,25,-10)$ $P(30,30,40)$ $Q(50,20,50)$
6. Representar a reta de perfil r pertencente ao ponto dado A e concorrente com uma reta qualquer $s(P,Q)$ dada. Representar o ponto X de interseção.
 $A(10,20,-10)$ $P(30,30,40)$ $Q(50,20,50)$
7. Representar a reta horizontal r pertencente ao ponto dado A e concorrente com uma reta de perfil $s(P,Q)$ dada. Representar o ponto X de interseção.
 $A(10,20,20)$ $P(30,30,40)$ $Q(30,20,50)$
8. Representar a reta de topo r pertencente ao ponto dado A e concorrente com uma reta de perfil $s(P,Q)$ dada. Representar o ponto X de interseção.
 $A(30,-10,30)$ $P(30,30,20)$ $Q(30,50,10)$
9. Representar a reta vertical r pertencente ao ponto dado A e concorrente com uma reta de perfil $s(P,Q)$ dada. Representar o ponto X de interseção.
 $A(30,15,50)$ $P(30,30,20)$ $Q(30,50,10)$
10. Representar a reta fronto-horizontal r pertencente ao ponto dado A e concorrente com uma reta de perfil $s(P,Q)$ dada. Representar o ponto X de interseção.
 $A(20,30,?)$ $P(30,10,20)$ $Q(30,40,10)$
11. Representar uma reta $r(A,B)$ qualquer concorrente com uma reta de perfil $s(P,Q)$ dada. Representar o ponto X de interseção.
 $A(10,30,30)$ $B(30,20,?)$ $P(40,30,40)$ $Q(40,10,10)$

5. Perpendicularidade e ortogonalidade de retas

Relembrando a Propriedade 7 para somente uma projeção:

$$\begin{array}{l} \text{Se} \quad (1) \ r \perp s \text{ (ou } r \perp s) \\ \quad \quad (2) \ r \parallel \pi' \text{ (ou } r \subset \pi') \\ \quad \quad (3) \ s \not\perp \pi' \end{array} \quad \Rightarrow \quad (4) \ r' \perp s'$$

Recíprocas são válidas:

$$\begin{array}{l} \text{Se} \quad (2) \ r \parallel \pi' \text{ (ou } r \subset \pi') \\ \quad \quad (3) \ s \not\perp \pi' \\ \quad \quad (4) \ r' \perp s' \end{array} \quad \Rightarrow \quad (1) \ r \perp s \text{ (ou } r \perp s)$$

$$\begin{array}{l} \text{Se} \quad (1) \ r \perp s \text{ (ou } r \perp s) \\ \quad \quad (4) \ r' \perp s' \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (3) \ s \not\perp \pi' \\ (2) \ r \parallel \pi' \text{ (ou } r \subset \pi') \end{array}$$

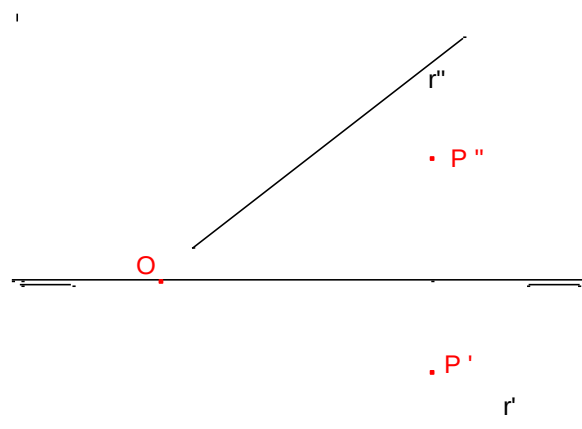
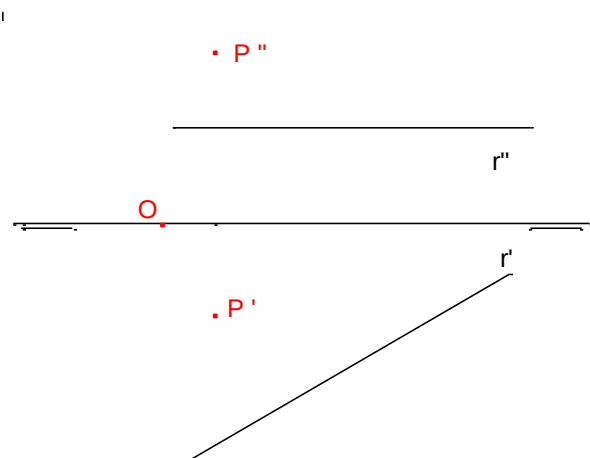
Na projeção cilíndrica ortogonal tem-se que um ângulo não reto somente se projeta em VG quando os dois lados forem paralelos ao plano de projeção. Porém, se o ângulo for reto, basta um só lado ser paralelo (ou estar contido) e o outro ser não perpendicular ao plano de projeção para que ele tenha projeção ortogonal em VG.

Exercícios de perpendicularidade e ortogonalidade de retas

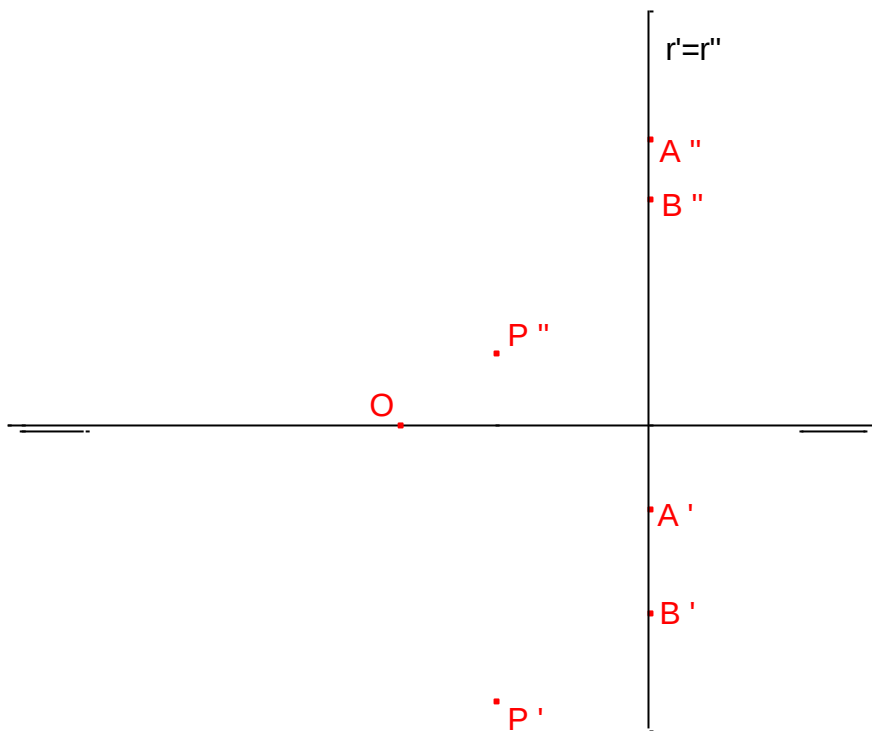
1. Representar a reta s que passe pelo ponto dado P e seja perpendicular a uma reta dada r .

a) r é horizontal

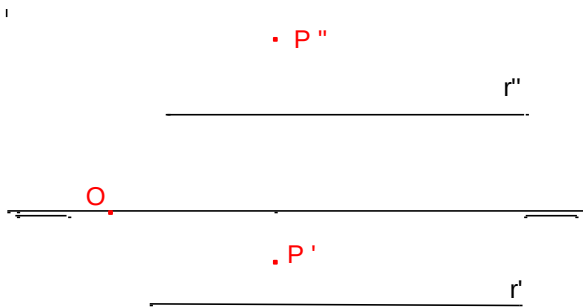
b) r é frontal



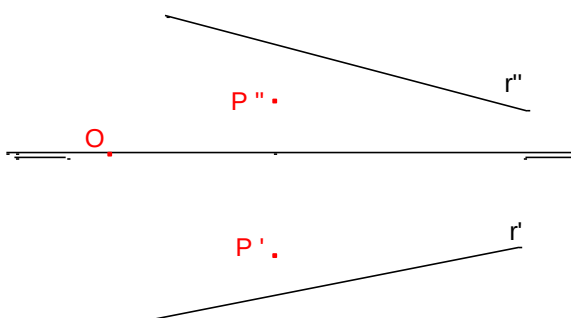
c) r é de perfil



d) r é fronto-horizontal

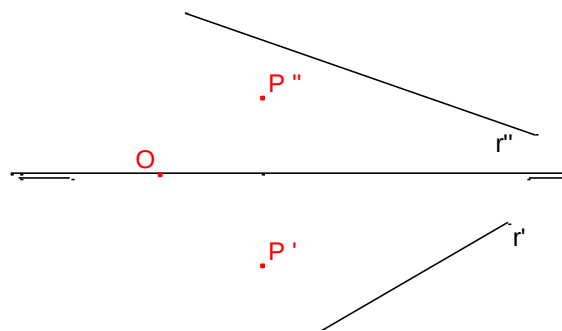


e) r é qualquer

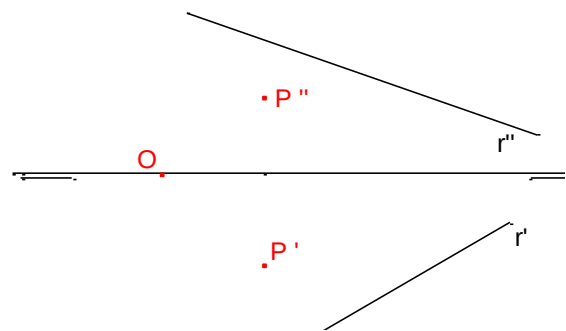


2. Representar pelo ponto dado P uma reta s ortogonal a reta dada r, sabendo-se que:

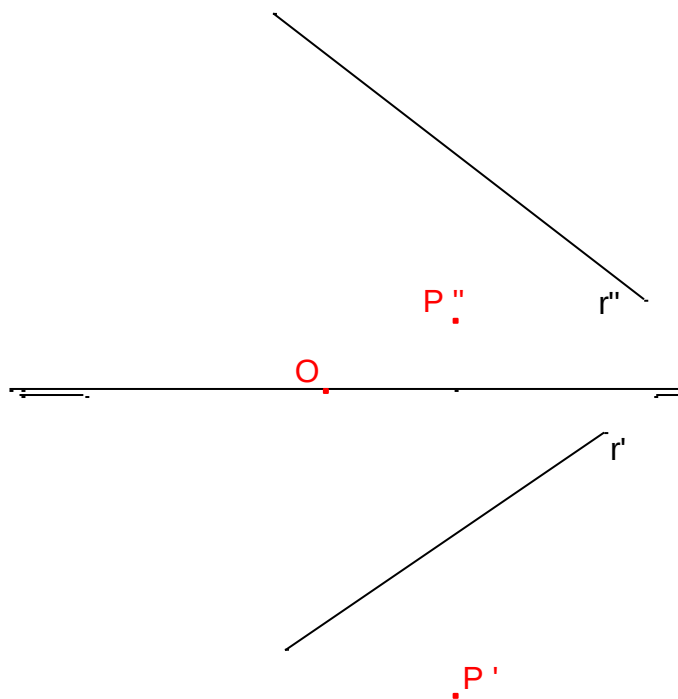
a) s é horizontal



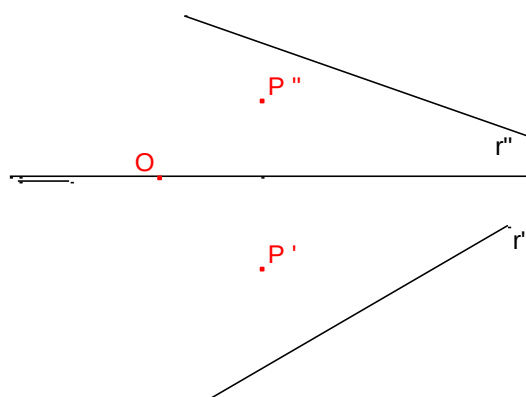
b) s é frontal



c) s é de perfil

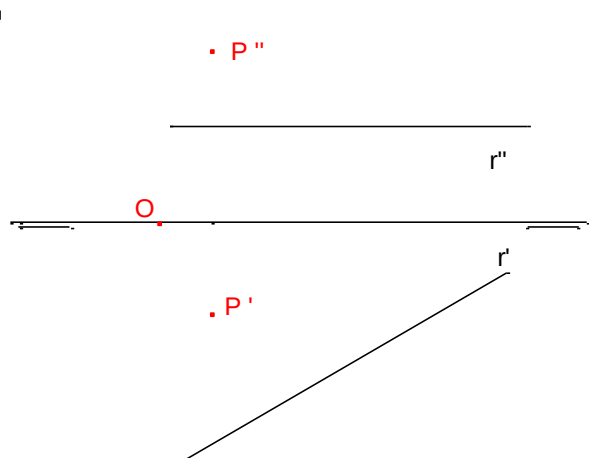


d) s é qualquer

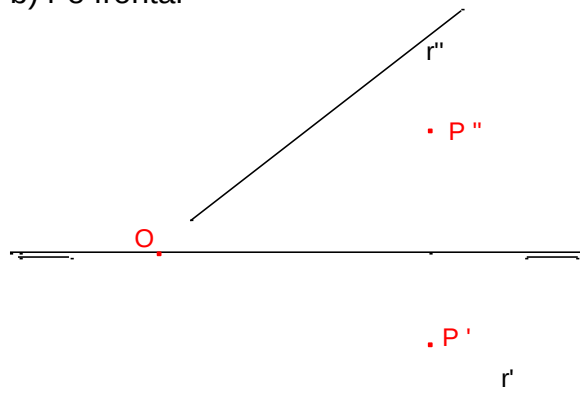


3. Representar a distância do ponto dado P a uma reta dada r. Obter a verdadeira grandeza dessa distância.

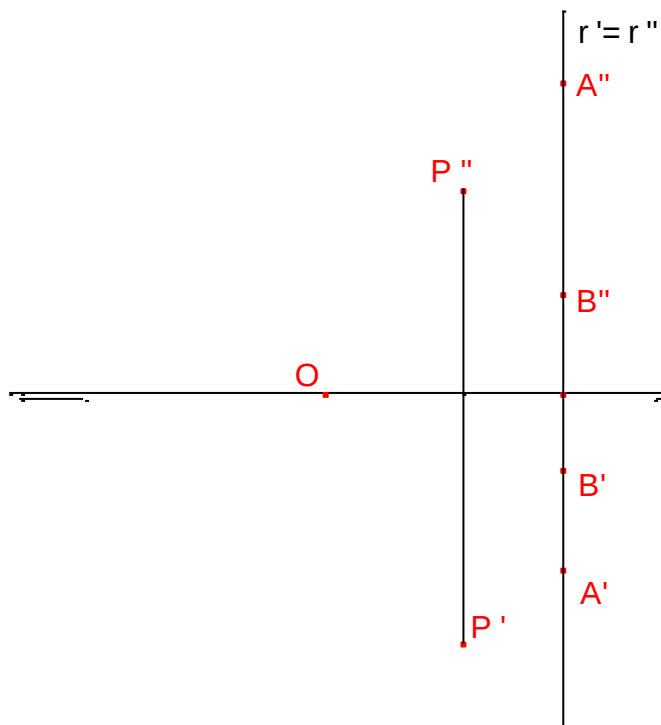
a) r é horizontal



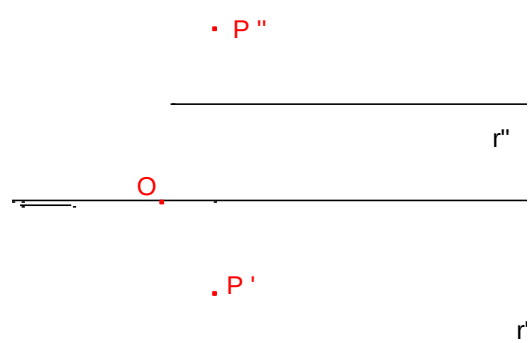
b) r é frontal



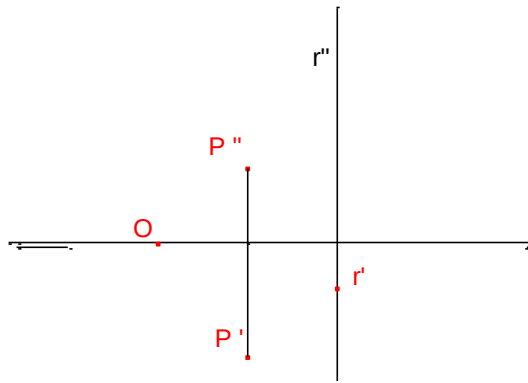
c) r é de perfil



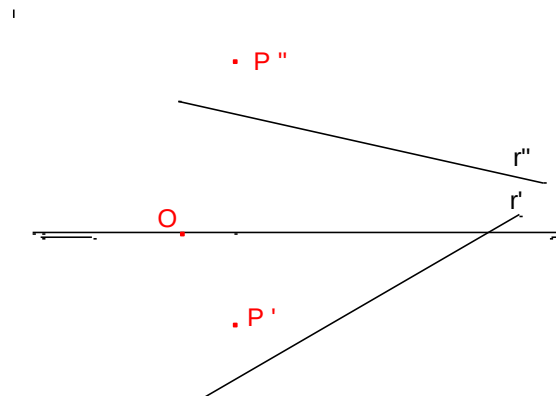
d) r é fronto-horizontal



e) r é vertical



f) r é qualquer



4. Representar o losango ABCD, de diagonal BD horizontal, sendo dados os vértices A e C, e o comprimento da diagonal BD.
A(20,25,15) C(50,15,30) BD=40

5. Representar o losango ABCD, de diagonal BD horizontal, sendo dados os vértices A e C e sabendo-se que a primeira projeção do mesmo deve ser um quadrado.
A(20,25,15) C(50,15,30)

6. Representar um triângulo ABC isósceles, de base AB horizontal dada, sendo dados o afastamento e a cota do vértice C.
A(20,40,20) B(50,50,20) C(x,60,40)

7. Representar um retângulo ABCD, sendo dados os vértices A e C, e sabendo-se que o lado AB é frontal e tem comprimento dado.
A(20,20,25) C(50,40,45) AB=20

8. São dados dois pontos A e B. Representar uma horizontal h , pertencente ao ponto A e que forme ângulo de 60° com π'' . Representar uma frontal f , pertencente ao ponto dado A e que forme ângulo de 15° com π' . Representar a reta r pertencente ao ponto B e perpendicular ao plano definido pelas retas h e f .
A(20,30,40) B(40,40,20)

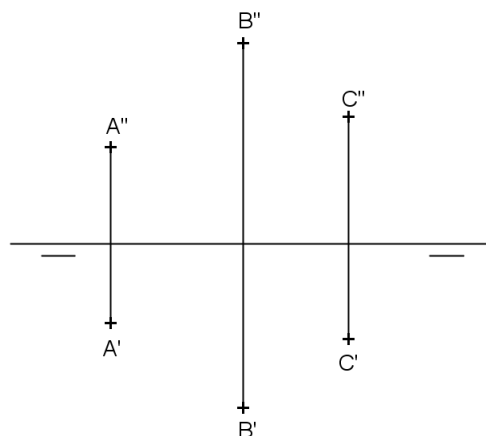
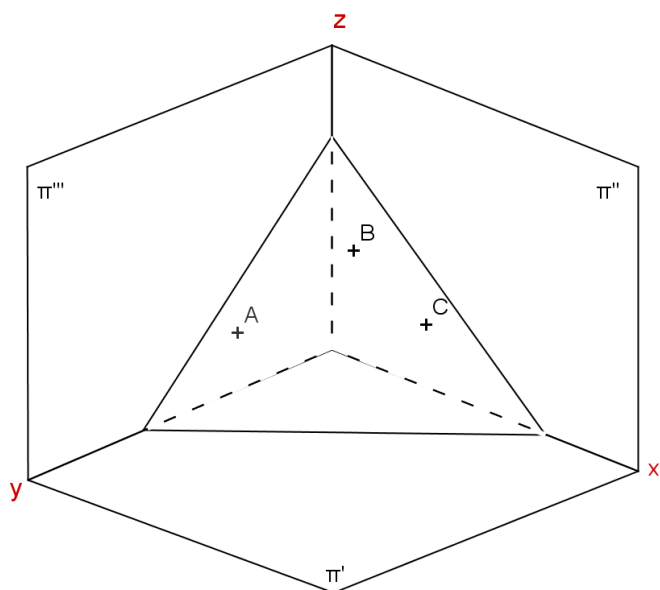
9. Representar as retas horizontal e frontal pertencentes a um ponto dado P e concorrentes com uma reta dada r qualquer nos pontos A e B. Representar o ortocentro do triângulo PAB. Representar a altura relativa ao lado AB do triângulo PAB (distância do ponto P à reta r).
P(20,45,10) Q(60,50,65) R(75,25,30) $r(P,Q)$

PARTE III – REPRESENTAÇÃO DO PLANO

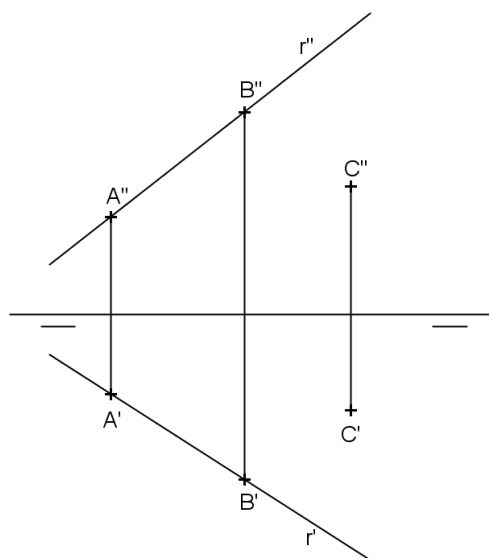
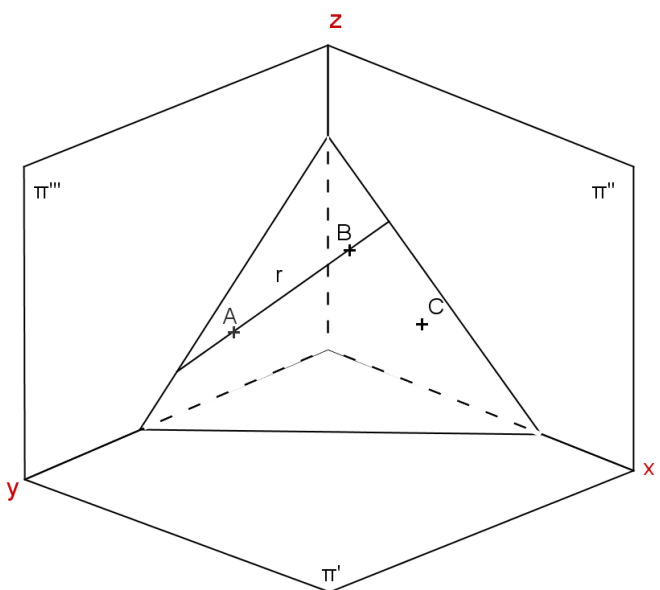
1. Representação do plano

Um plano pode ser determinado por:

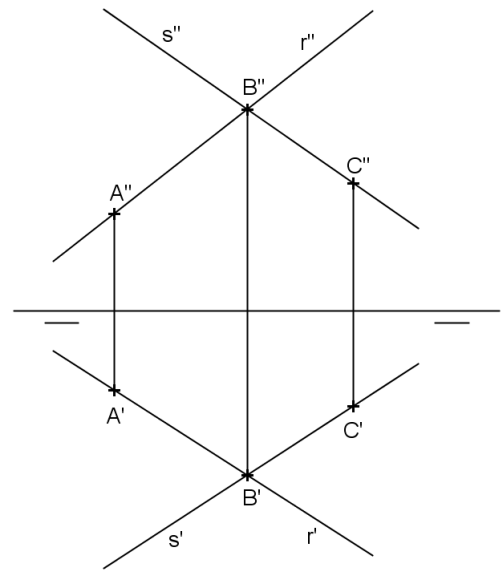
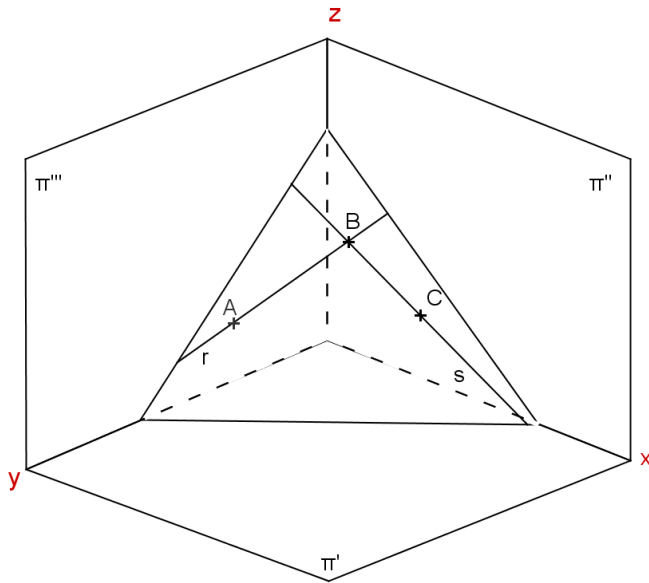
a) três pontos não colineares



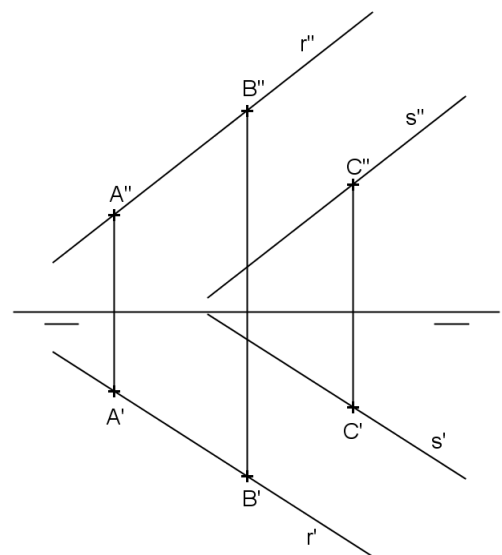
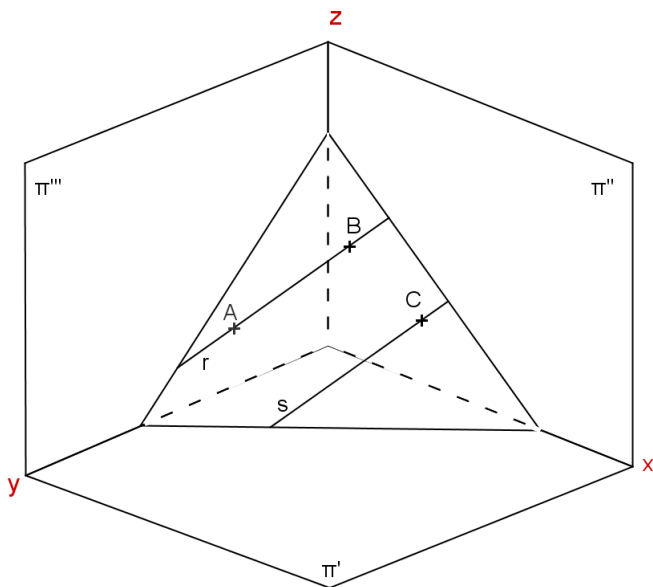
b) um ponto e uma reta que não se pertencem



c) duas retas concorrentes



d) duas retas paralelas



Pertinência de ponto e reta a um plano

2.1. Pertinência de reta a plano

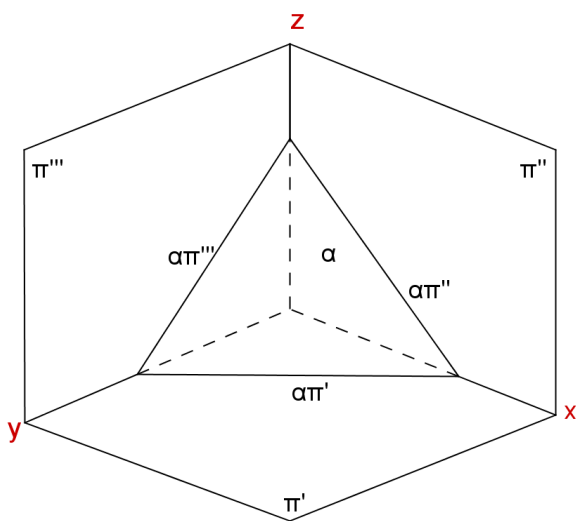
$$r \subset \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} r \times a, r \times b, \text{ onde } a, b \subset \alpha \\ r \times a, r \parallel b, \text{ onde } a, b \subset \alpha \end{cases}$$

2.2. Pertinência de ponto a plano

$$P \in \alpha \Leftrightarrow P \in r \text{ e } r \subset \alpha$$

2. Representação do plano pelos seus traços

- No espaço:



- Em écura:

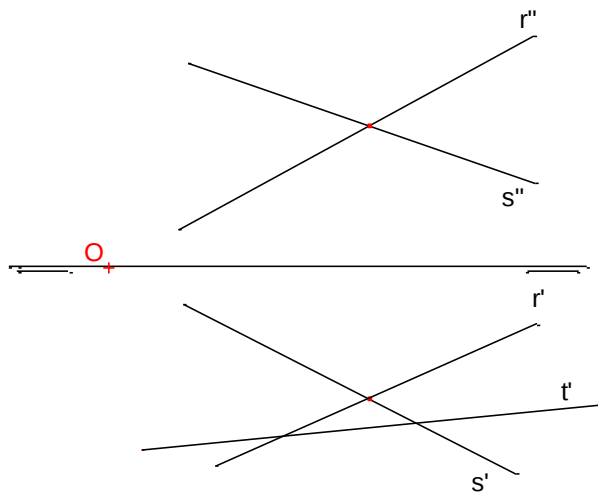


Propriedade: ou $\alpha\pi'$ intercepta $\alpha\pi''$ num ponto que pertence a Linha de Terra, ou os traços $\alpha\pi'$ e $\alpha\pi''$ são paralelos à Linha de Terra.

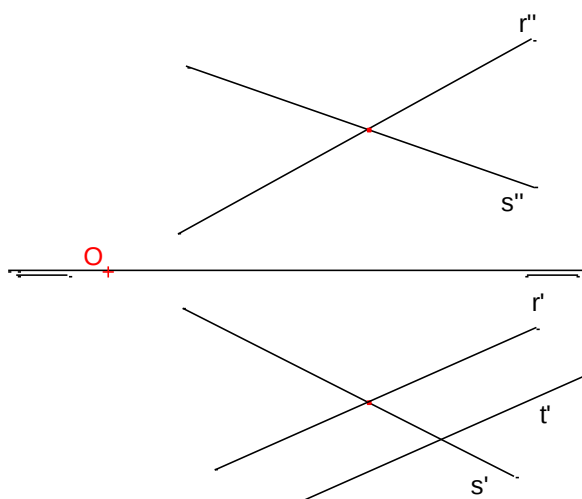
Exercícios:

1. Dado um plano $\alpha(r,s)$ representar uma reta t do mesmo do qual se conhece apenas uma das projeções.

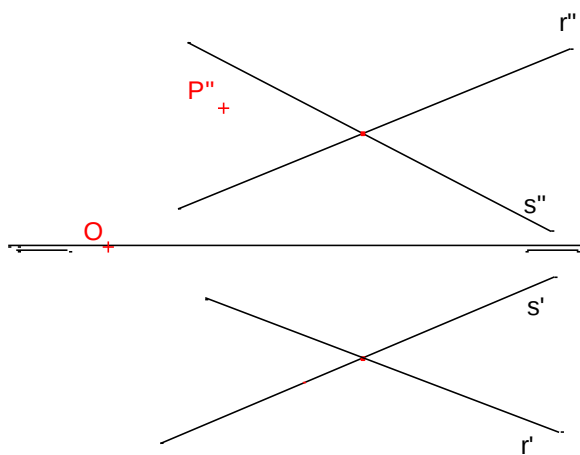
a)



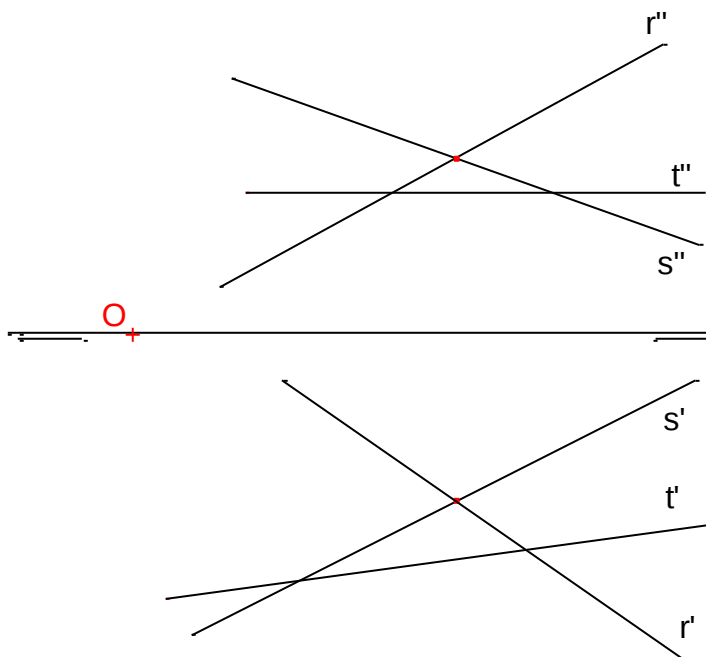
b)



2. Dado um plano $\alpha(r,s)$ representar um ponto P do mesmo do qual se conhece apenas uma das projeções.

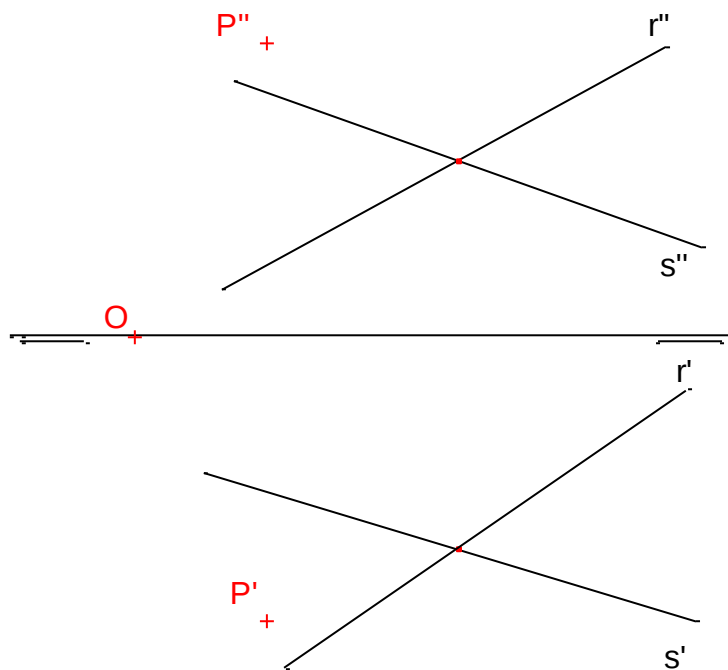


3. Verificar se a reta dada t pertence ao plano dado $\alpha(r,s)$.



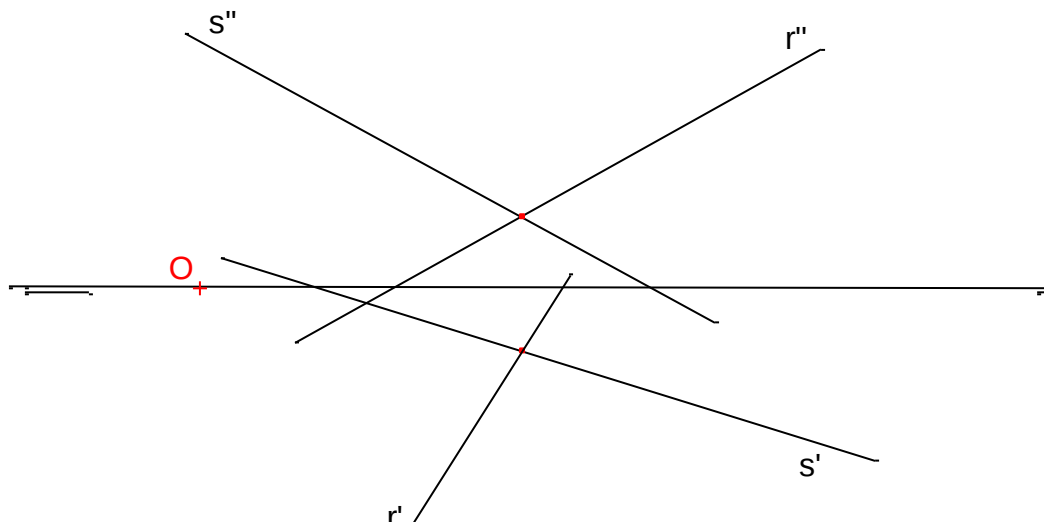
4. Verificar se o ponto dado P pertence ao plano dado $\alpha(r,s)$.

|



5. Dado o plano α representá-lo por meio de seus traços (1° e 2°).

a) $\alpha(r,s)$



b) $\alpha(A,B,C)$

A(20; -10;40)

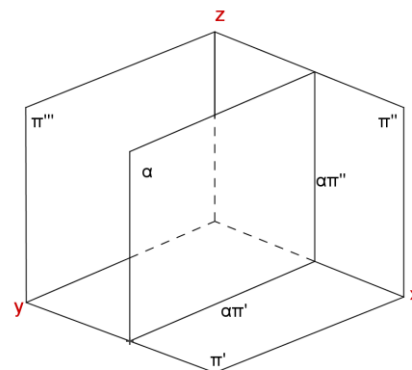
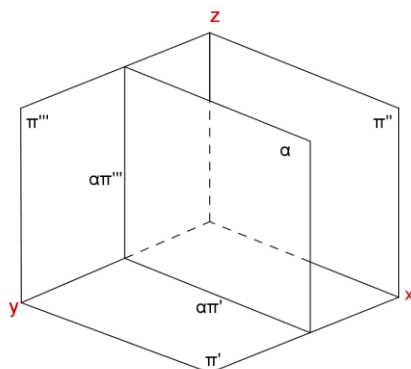
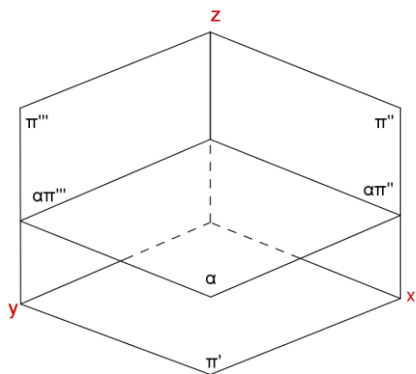
B(60;20;10)

C(90;10;40)

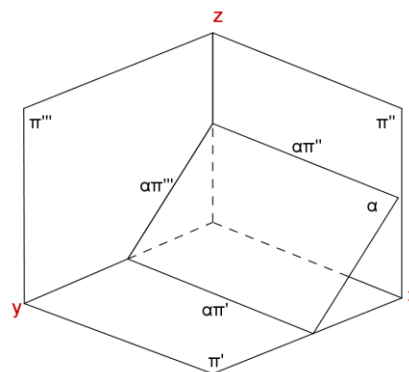
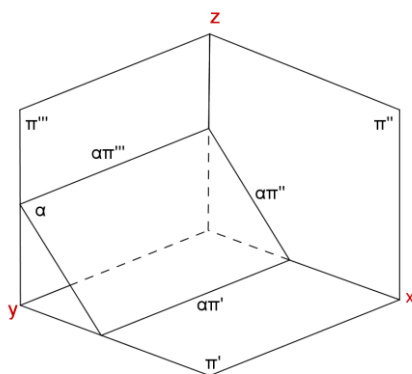
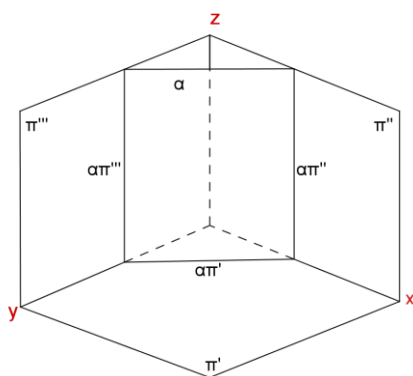
3. Posições do plano em relação aos PFR

Um plano α pode ocupar posições distintas em relação aos 3 PFR, podendo ser:

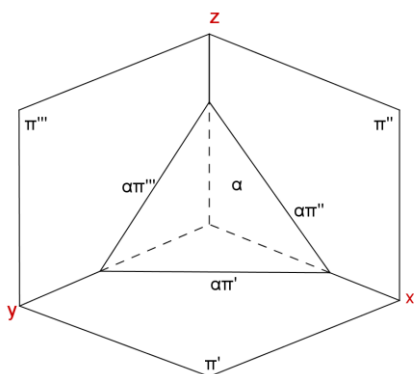
- α paralelo a um dos PFR:



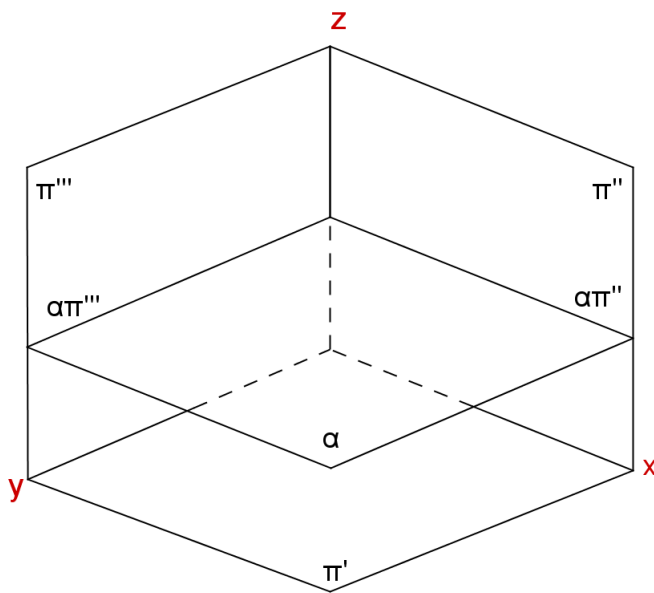
- α perpendicular a um dos PFR e oblíquo em relação a outro:



- α oblíquo em relação aos PFR:



4.1. Plano horizontal



a) Característica espacial:

b) Épura:

c) Traços: _____

d) É plano projetante? _____

- $P \in \alpha$ horizontal $\Leftrightarrow$ _____.
 - $r \subset \alpha$ horizontal $\Leftrightarrow$ _____.

e) Tem alguma projeção em VG? _____

f) Retas contidas no plano: _____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: _____

h) Ângulos:
 com π' _____
 com π'' _____
 com π''' _____

Exercícios

- 1) Representar um quadrado ABCD contido num plano horizontal α sendo dados A(10,10,20) e B(40,20,?).
- 2) Representar um hexágono regular ABCDEF contido num plano horizontal α sendo dados o centro O(30,30,20) da circunferência circunscrita ao polígono e o seu raio $r=20$, sabendo que um de seus lados é fronto-horizontal.
- 3) Representar um hexágono regular ABCDEF contido num plano horizontal α sendo dados o centro O(40,30,10) da circunferência circunscrita ao polígono e o seu raio $r=20$, sabendo que um de seus lados forma ângulo de 15° com π'' .
- 4) Representar uma pirâmide reta de base quadrada ABCD contida num plano α horizontal, de altura $h=40$, sendo dados A(10,20,30) e B(40,10,?).
- 5) Representar uma pirâmide reta de base pentagonal ABCDE contida num plano horizontal α , de altura $h=30$, sendo dados A(20,10,30) e B(40,20,?).
- 6) Representar um prisma reto de base triangular ABC contida num plano horizontal α , de altura $h=35$, sendo dados A(10,10,20) e B(50,20,?).
- 7) Representar um tetraedro regular ABCD, com a face ABC contida num plano horizontal, sendo dados o vértice A(50,40,20), a medida $m=40$ da aresta, e o ângulo $\theta=45^\circ$ que a reta suporte da aresta AB forma com π'' .
- 8) Representar um octaedro regular ABCDEF, com seção equatorial ABCD contida num plano horizontal, sendo dados o vértice A(50,50,30), a medida $m=30$ da aresta, e o ângulo $\theta=60^\circ$ que a reta suporte da aresta AB forma com π'' .
- 9) Representar um anti-prisma arquimediano com uma base ABCDEF hexagonal e contida num plano horizontal, sendo dados os vértices A(20;30;20) e B(50;20;20).

Visibilidade de um sólido

O contorno aparente é obtido pelas projetantes razantes ao sólido (aquelas que estão projetando os pontos mais afastados do objeto).

Este contorno aparente divide o sólido em duas partes, uma visível e outra não visível.

Critérios de visibilidade:

1º) O contorno aparente é sempre visível.

2º) Uma face que contém um ponto visível é visível.

3º) Uma aresta que contém um ponto visível é visível.

4º) Duas faces que tem uma aresta comum pertencente ao contorno aparente são uma visível e outra não visível.

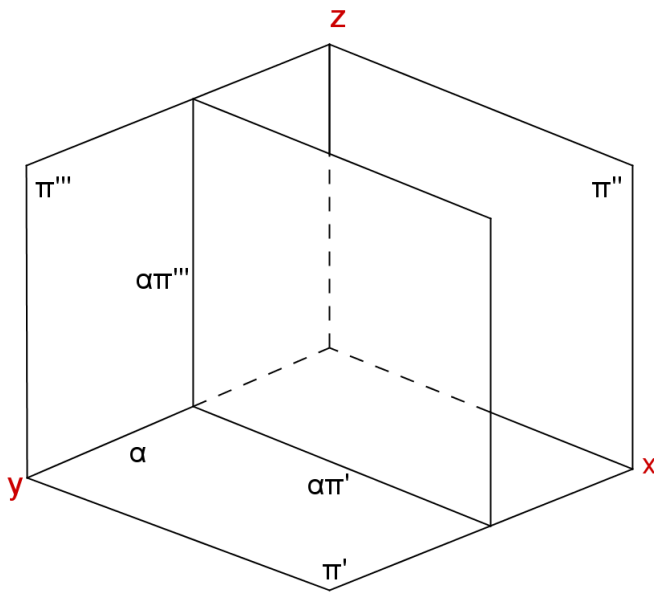
5º) Duas arestas que tem um vértice comum não pertencente ao contorno aparente são ambas visíveis ou invisíveis, depende se o vértice é ou não visível.

6º) Dois pontos que têm a mesma projeção são um visível e outro invisível.

4.2. Plano frontal

a) Característica espacial: _____

b) Épura: _____



c) Traços: _____

d) É plano projetante? _____

- $P \in \alpha$ frontal $\Leftrightarrow$ _____.

- $r \subset \alpha$ frontal $\Leftrightarrow$ _____.

e) Tem alguma projeção em VG? _____

f) Retas contidas no plano: _____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: _____

h) Ângulos:

com π' _____

com π'' _____

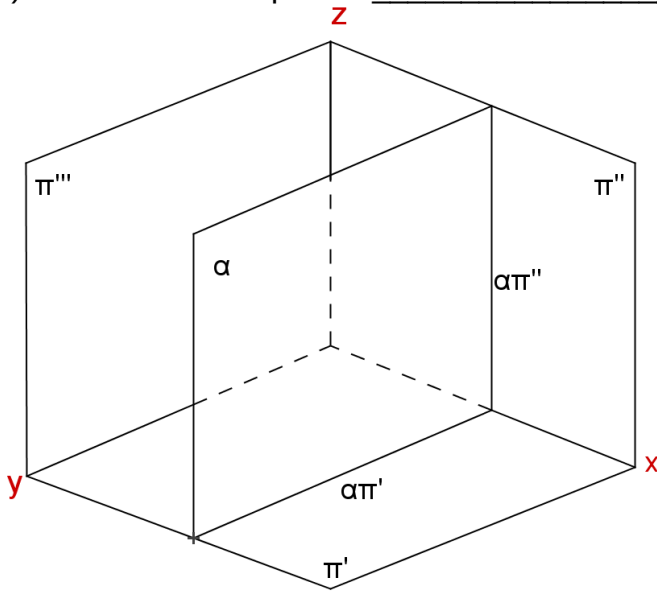
com π''' _____

Exercícios

- 1) Representar um pentágono regular ABCDE contido num plano frontal α sendo dados o centro $O(40,10,30)$ da circunferência circunscrita ao polígono e o seu raio $r=20$, sabendo que um de seus lados forma ângulo de 30° com π' .
- 2) Representar um prisma arquimediano de base hexagonal ABCDEF contida num plano frontal, sendo dados 2 vértices consecutivos $A(20,30,20)$ e $B(0,?,0)$.
- 3) Representar um tetraedro regular ABCD com a base ABC contida num plano frontal, sendo dados $A(40,20,30)$ e $B(20,?,10)$.
- 4) Representar um octaedro regular ABCDEF, sabendo-se que a seção equatorial ABCD está contida num plano α frontal. São dados o vértice $A(50,30,50)$, a medida $a=30$ da aresta e o ângulo $\theta=60^\circ$ que a reta AB faz com π' .

4.3. Plano de perfil

a) Característica espacial: _____



b) Épura: _____

c) Traços: _____

d) É plano projetante? _____

- $P \in \alpha$ de perfil $\Leftrightarrow$ _____.

- $r \subset \alpha$ de perfil $\Leftrightarrow$ _____.

e) Tem alguma projeção em VG? _____

f) Retas contidas no plano: _____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: _____

h) Ângulos:

com π' _____

com π'' _____

com π''' _____

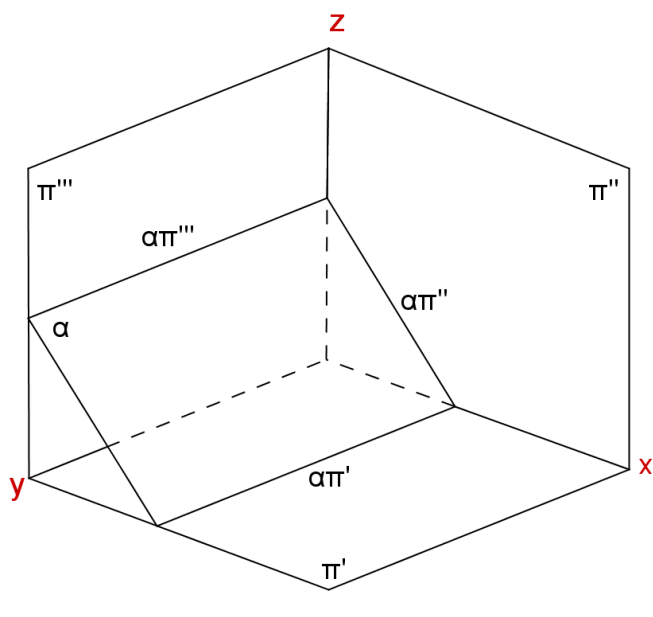
Exercícios

- 1) Representar um triângulo equilátero ABC contido num plano α de perfil sendo dados A(30,20,20) e B(?,40,40).
- 2) Representar um quadrado ABCD contido num plano α de perfil, sabendo-se que o lado AB faz ângulo θ com π' , sendo dados A(30,20,20) e que o lado mede 20mm.
- 3) Representar um prisma reto de base hexagonal ABCDEF contida num plano de perfil α e altura $h=30$, sendo dados A(30,10,30) e B(?,30,10).
- 4) Representar um tetraedro regular ABCD de aresta $a=30$, com a base ABC contida num plano α de perfil, sendo dados A(40,20,30) e o ângulo $\theta=15^\circ$ que a reta AB forma com π' .
- 5) Representar um octaedro regular ABCDEF, sabendo-se que a seção equatorial ABCD está contida num plano α de perfil. São dados o vértice A(30,10,40), a medida $a=30$ da aresta e o ângulo $\theta=60^\circ$ que a reta AB faz com π' .

4.4. Plano de topo

a) Característica espacial: _____

b) Épura: _____



c) Traços: _____

d) É plano projetante? _____

e) Tem alguma projeção em VG? _____

f) Retas contidas no plano: _____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: _____

h) Ângulos:

com π' _____

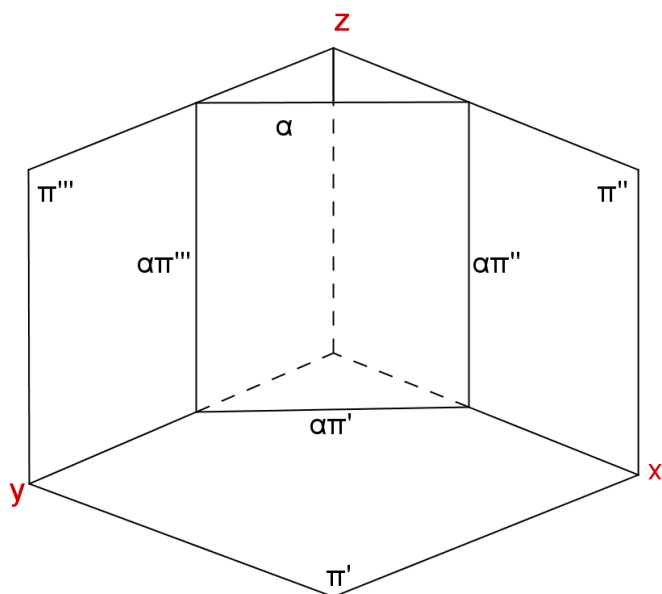
com π'' _____

com π''' _____

4.5 Plano vertical

a) Característica espacial: _____

b) Épura: _____



=====

c) Traços: _____

d) É plano projetante? _____

e) Tem alguma projeção em VG? _____

f) Retas contidas no plano: _____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: _____

h) Ângulos:

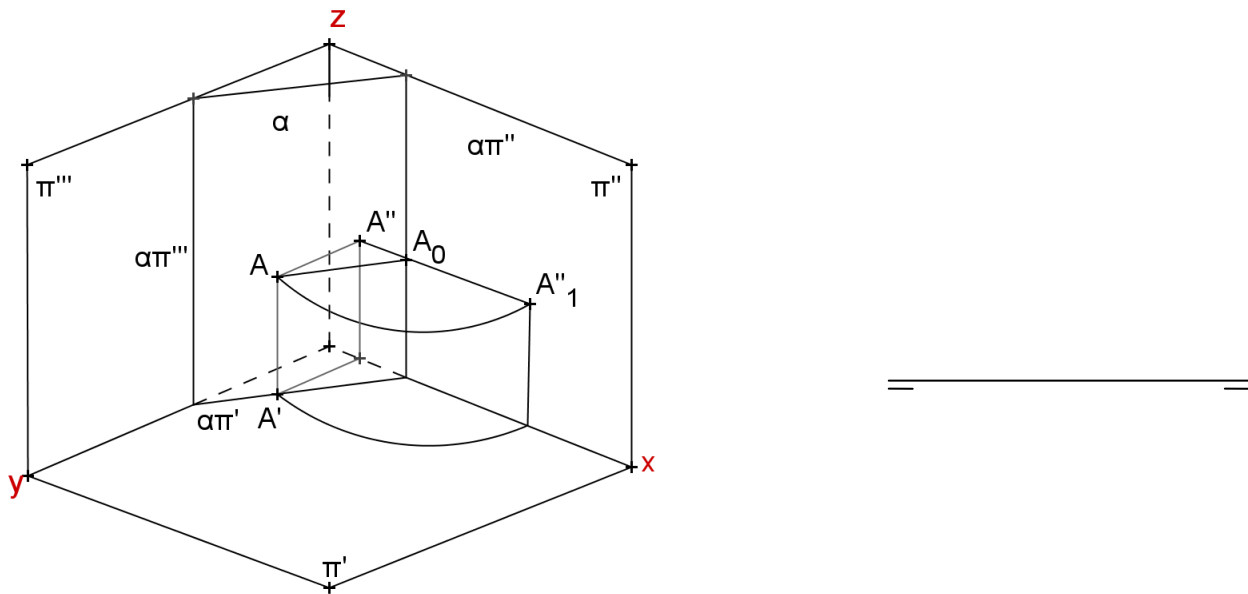
com π' _____

com π'' _____

com π''' _____

i) Processo do rebatimento

Rebatimento sobre π''



Rebatimento sobre um plano frontal: basta considerar um plano β frontal e usar $(\alpha\beta)$ como eixo do rebatimento, ou seja, utilizar $(\alpha\beta)''$ como se fosse $\alpha\pi''$.

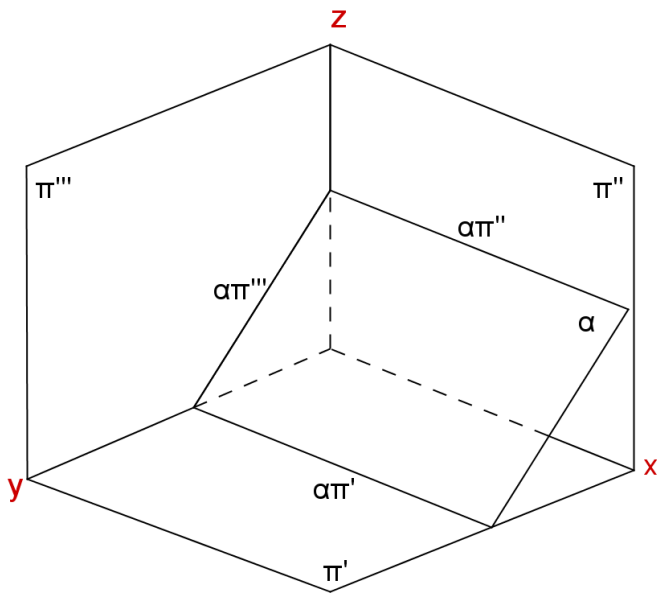
Exercícios

1. Representar o plano vertical α pertencente ao ponto dado $A(50,30,40)$ e que forme ângulo de 60° com π'' .
2. Representar um triângulo equilátero ABC contido num plano α vertical, sendo dados $A(50,40,10)$ e $B(30,20,30)$.
3. Representar um quadrado ABCD contido num plano α vertical, sendo dados $A(30,20,50)$ e $B(50,50,60)$.
4. Representar um hexágono regular ABCDEF contido num plano α vertical, sendo dados $A(50,20,30)$ e $B(40,30,10)$.
5. Representar um pentágono regular ABCDE contido num plano vertical α sendo dados o centro $O(40,30,40)$ da circunferência circunscrita ao polígono e o seu raio $r=30$, sabendo que um de seus lados é horizontal. O plano vertical forma ângulo de 60° à esquerda com π'' .
6. Representar uma pirâmide reta de altura $h=50$, cuja base seja um quadrado ABCD contido num plano α vertical, sendo dados os vértices $A(50,30,60)$ e $B(70,50,40)$.
7. Representar um tetraedro regular ABCD, sendo que a base ABC está contida num plano α vertical. São dados $A(50,30,40)$ e $B(20,10,50)$.
8. Representar um octaedro regular ABCDEF, sabendo-se que a seção equatorial ABCD está contida num plano vertical α , sendo dados $A(40,50,10)$ e $B(20,20,20)$.

4.5 Plano paralelo à linha de terra

a) Característica espacial: _____

b) Épura: _____



c) Traços: _____

d) É plano projetante? _____

e) Tem alguma projeção em VG? _____

f) Retas contidas no plano: _____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: _____

h) Ângulos:

com π' _____

com π'' _____

com π''' _____

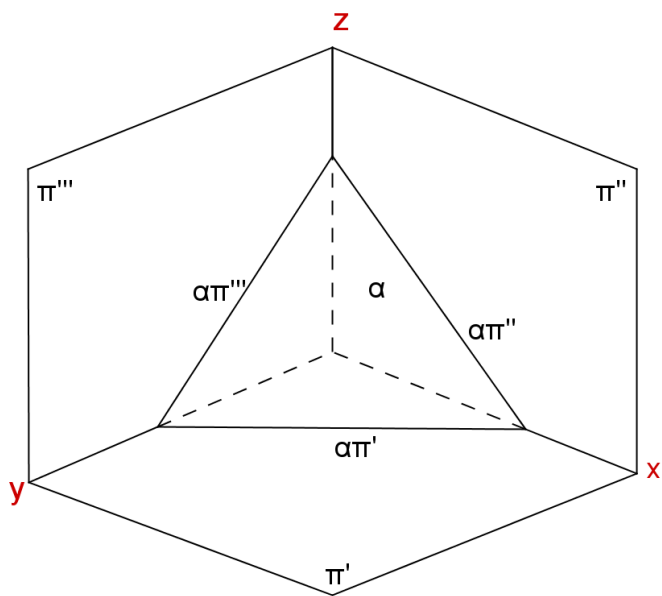
Exercícios

- 1) Representar o 1º, 2º e 3º traços do plano α paralelo à linha de terra, definido pelos pontos A(40,10,30) e B(80,40,10).
- 2) Representar o traço da reta r(P,Q) sobre o plano $\alpha(A,B)$ paralelo à linha de terra. São dados: A(40,40,30), B(10,10,20), P(30,30,60) e Q(60,20,10).
- 3) Representar a reta s que contém o ponto dado P e seja perpendicular ao plano $\alpha(r)$ paralelo à linha de terra. São dados: P(10,50,50), r(A,B), A(40,10,30), B(70,30,10).
- 4) Representar um quadrado ABCD contido num plano α paralelo à linha de terra, sendo dados A(10,10,40) e B(20,20,20).
- 5) Representar um triângulo equilátero ABC contido num plano α paralelo à linha de terra, sendo dados A(50,10,40) e B(20,30,20).
- 6) Representar um prisma reto de base hexagonal ABCDEF contida num plano α paralelo à linha de terra e altura $h=30$. São dados A(10,40,20) e B(20,60,10).
- 7) Representar um tetraedro regular ABCD, sabendo-se que a base ABC está contida num plano α paralelo à linha de terra. São dados A(60,20,30) e B(20,50,10).

4.5. Plano qualquer

a) Característica espacial: _____

b) Épura: _____



c) Traços: _____

d) É plano projetante? _____

e) Tem alguma projeção em VG? _____

f) Retas contidas no plano: _____

g) Quantidade de pontos necessários para representá-lo: _____

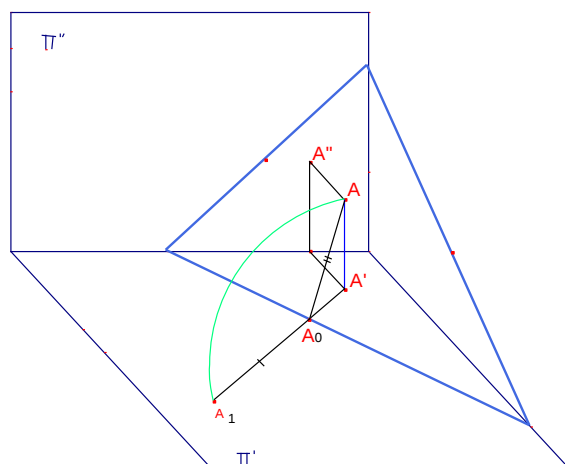
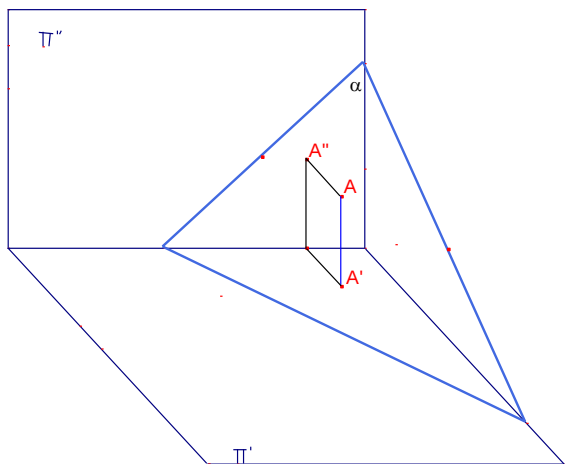
h) Ângulos:

com π' _____

com π'' _____

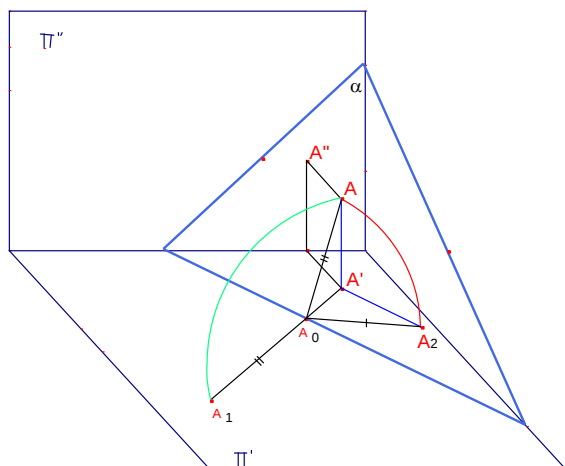
com π''' _____

i) Rebatimento sobre π' :

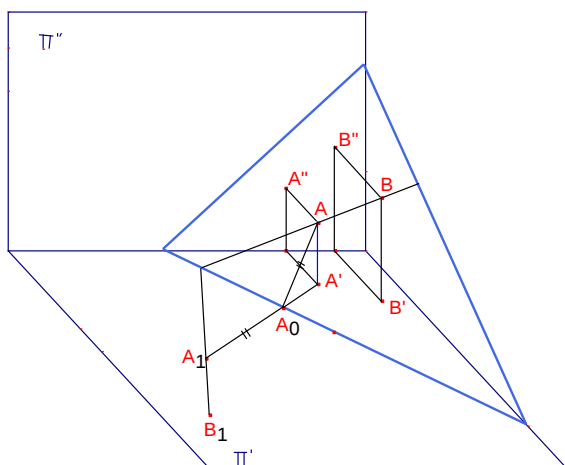


$\alpha\pi'$ é perpendicular a $A'A_0$.

Épura:



Rebatimento da reta AB:



Rebatimento sobre um plano horizontal: basta considerar um plano β horizontal e usar $(\alpha\beta)$ como eixo do rebatimento, ou seja, utilizar $(\alpha\beta)'$ como se fosse $\alpha\pi'$.

Exercícios

- 1) Representar o 1º e 2º traços do plano α qualquer, definido pelos pontos A(20,-10,40), B(60,20,10) e C(90,10,40).
- 2) Representar um quadrado ABCD contido num plano $\alpha(A,B,P)$ qualquer, sendo dados A(20,20,30), B(50,10,50) e P(100,60,20).
- 3) Representar um triângulo equilátero ABC contido num plano $\alpha(A,B,P)$ qualquer, sendo dados A(20,50,30), B(50,10,50) e P(100,30,20).
- 4) Representar um pirâmide reta de base quadrada ABCD contida num plano $\alpha(A,B,P)$ qualquer e altura $h=40$. São dados A(40,10,50), B(60,30,40) e P(10,40,10).
- 5) Representar um hexaedro regular ABCDEFGH (cubo), sabendo-se que a face ABCD está contida num plano $\alpha(A,B,P)$ qualquer. São dados A(30,20,20), B(50,10,30) e P(70,60,10).

4. Seções Planas e Desenvolvimento de Sólidos

Para determinar a seção de um poliedro por um plano, pode-se utilizar, conforme o caso, duas formas principais. Procura-se o ponto em que cada aresta do poliedro atravessa o plano, e unem-se dois a dois os pontos consecutivos; ou determina-se a seção de cada face do poliedro pelo plano dado. Às vezes, é melhor utilizar simultaneamente os dois métodos.

Desenvolver (ou planificar) um poliedro consiste em construir suas faces, justapostas duas a duas, de tal modo que todas se situem em um mesmo plano. A escolha das arestas de abertura do poliedro (para planificá-lo) é arbitrária. Deste modo, o polígono desenvolvido pode apresentar seu contorno de diferentes formas.

A partir do desenvolvimento podemos reconstruir o poliedro.

Exercícios

1. Representar a pirâmide regular de base quadrada ABCD contida num plano horizontal α e altura $h=100\text{mm}$. São dados $A(80,20,30)$ e $B(20,40,?)$.

Construir a planificação do sólido.

Representar o plano de topo β que contém o ponto P e forma 30° à esquerda com π' .

Representar a seção plana de β sobre a pirâmide regular ABCD, bem como a sua verdadeira grandeza. Construir a planificação do sólido seccionado.

a) $P(140,0,30)$

b) $P(90,0,30)$

2. Representar a pirâmide oblíqua ABCD de base ABC contida num plano horizontal α e vértice D. São dados $A(0,20,20)$, $B(30,50,20)$, $C(50,10,20)$, $D(70,30,80)$.

Construir a planificação do sólido.

Representar o plano de topo β que contém o ponto P e forma 45° à esquerda com π' .

Representar a seção plana de β sobre a pirâmide ABCD, bem como a sua verdadeira grandeza.

Construir a planificação do sólido seccionado.

a) $P(80,0,0)$

b) $P(60,0,0)$

3. Representar um prisma reto de bases pentagonais, com a base ABCDE contida num plano α horizontal. São dados $A(30,30,10)$, $B(70,10,10)$ e $h=70\text{mm}$.

Construir a planificação do sólido.

Representar o plano de topo β que contém o ponto P e forma 30° à esquerda com π' .

Representar a seção plana de β sobre o prisma, bem como a sua verdadeira grandeza.

Construir a planificação do sólido seccionado.

a) $P(150,0,0)$

b) $P(110,0,0)$

PARTE IV – MÉTODOS DESCRITIVOS

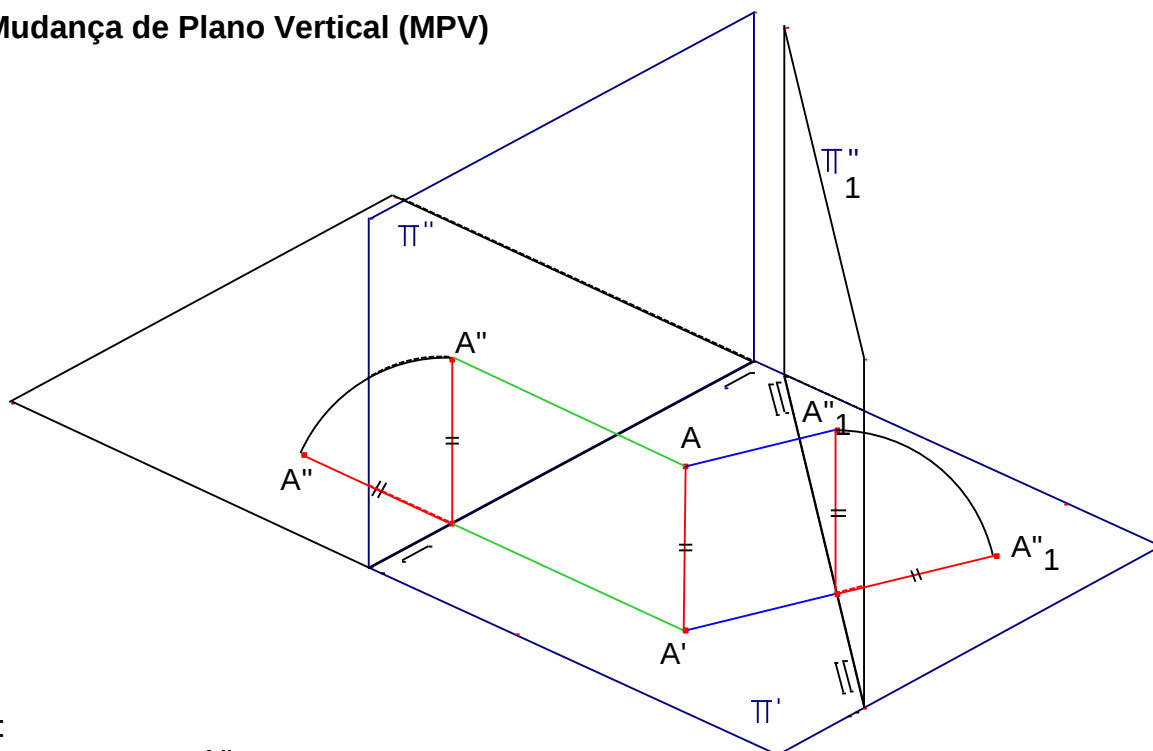
1. Método da Mudança de Planos (MP)

O grau de dificuldade de um problema depende da posição dos elementos objetivos dados em relação aos planos fundamentais de projeção (PFP).

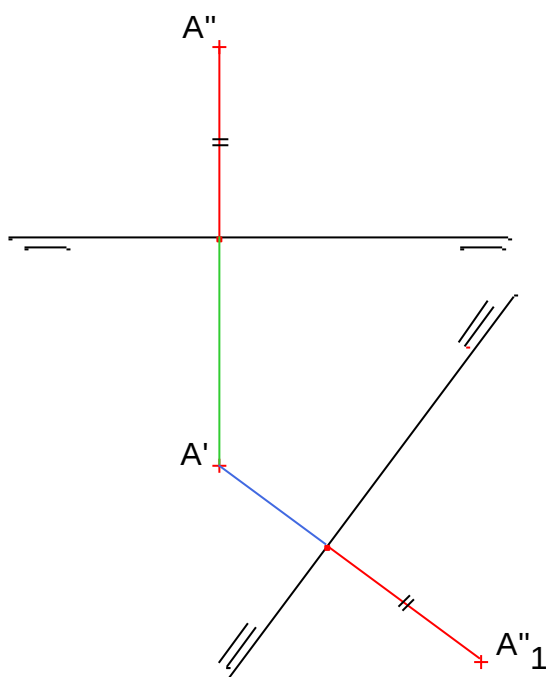
Em geral, a écura se simplifica, quando pelo menos uma reta ou um plano ocupam uma posição particular em relação aos PFP.

É interessante mudar a posição de um objeto. Estas transformações são chamadas de Métodos Descritivos, e são: mudança de planos, rotação e rebatimento.

1.1. Mudança de Plano Vertical (MPV)



Épura:



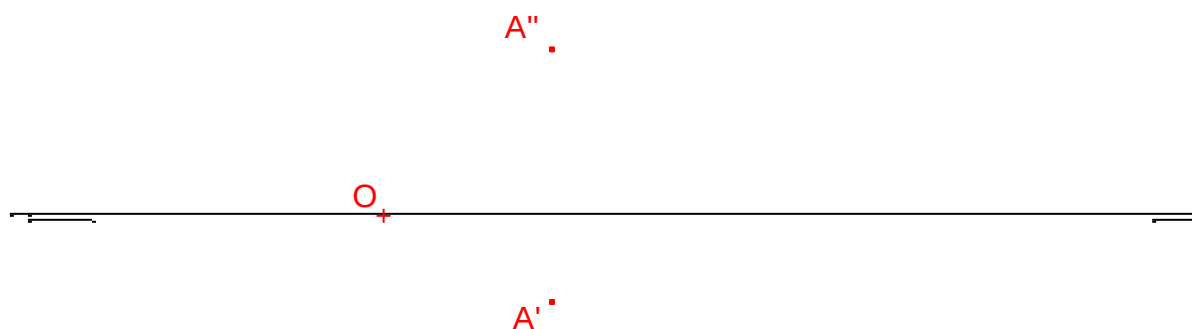
Propriedades da MPV:

- A' é o mesmo para os dois sistemas;
- $A'A''_1$ é perpendicular à NLT;
- a cota é mantida no novo sistema.

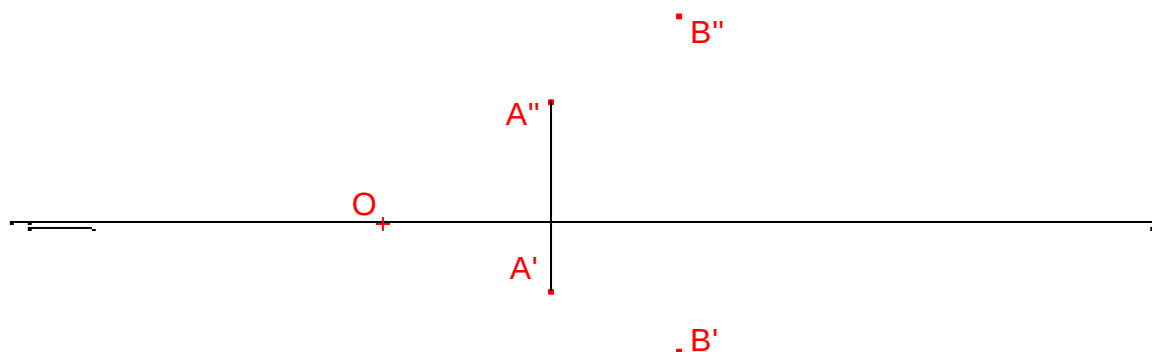
Observação: a posição da nova linha de terra (NLT) depende da simplificação que se deseja.

Exercícios

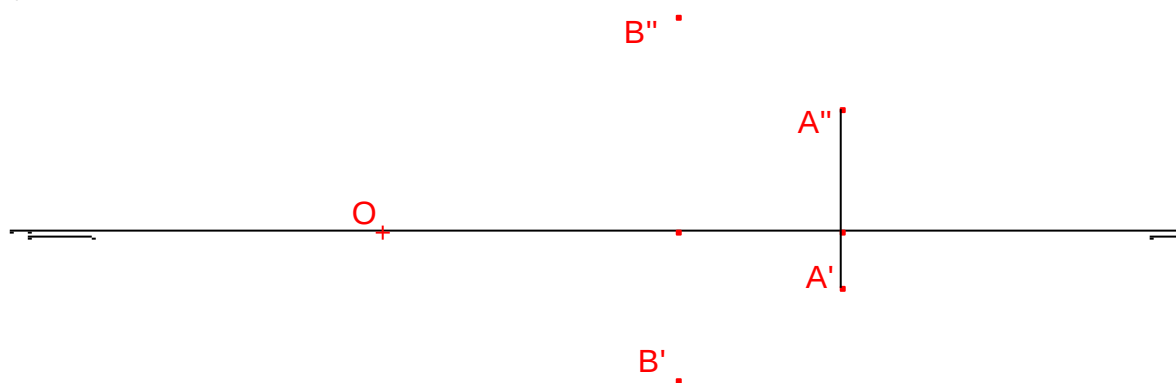
1. Efetuar uma mudança de plano vertical para o ponto A.



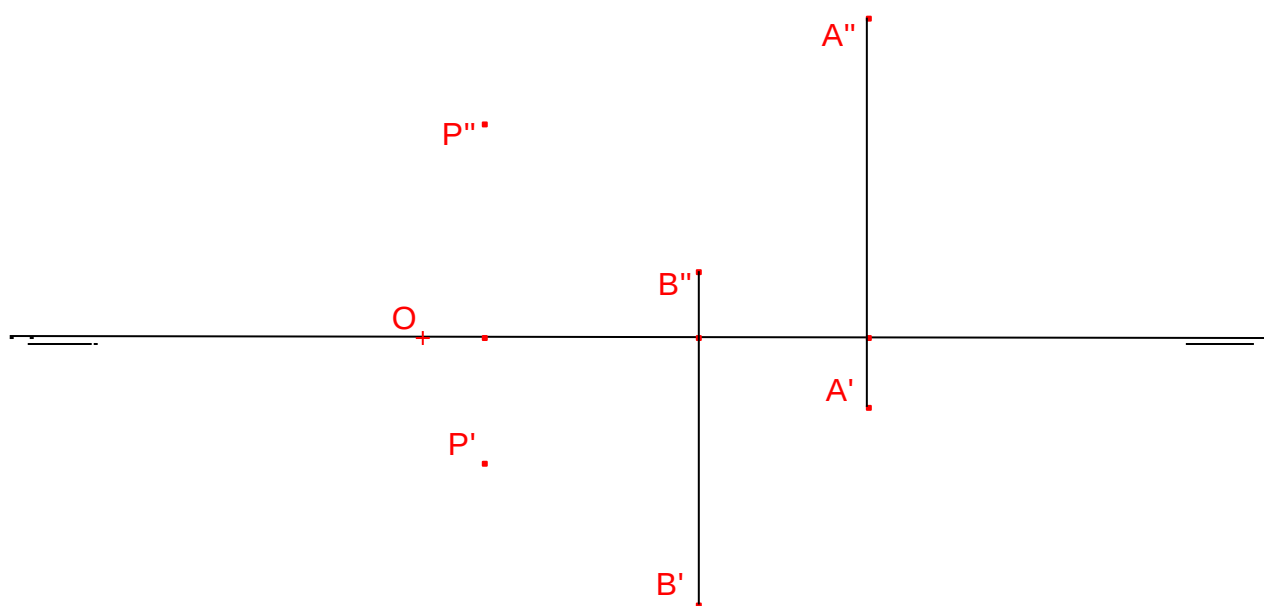
2. Efetuar uma mudança de plano vertical para a reta $r(A,B)$ de modo que se torne paralela ao novo plano de projeção.



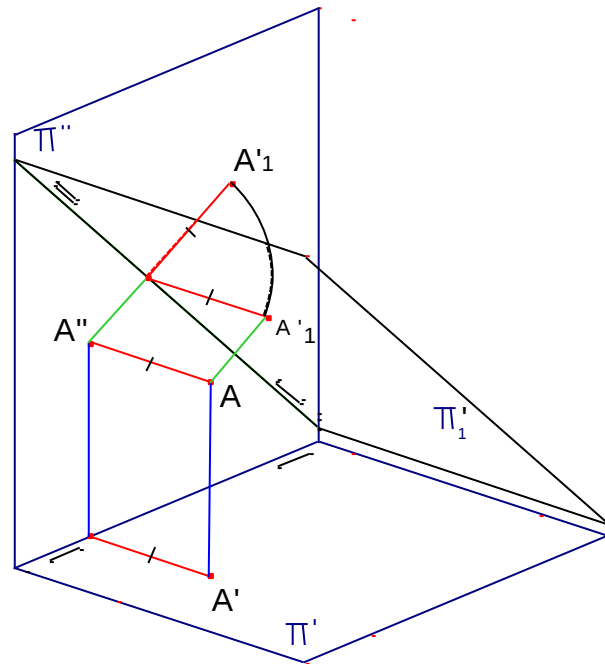
3. Obter a VG do segmento AB bem como o ângulo que a reta $r(AB)$ forma com π' .



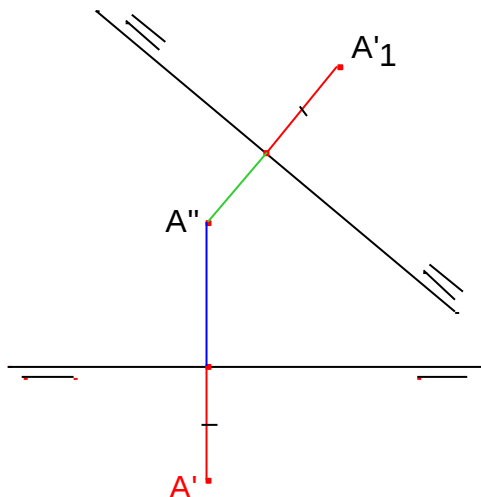
4. Mediante MPV representar a reta s que passe pelo ponto dado P e seja perpendicular a uma reta dada $r(A,B)$. Representar a distância do ponto P à reta r , bem como a sua VG.



1.2. Mudança de Plano Horizontal (MPH)



Épura:

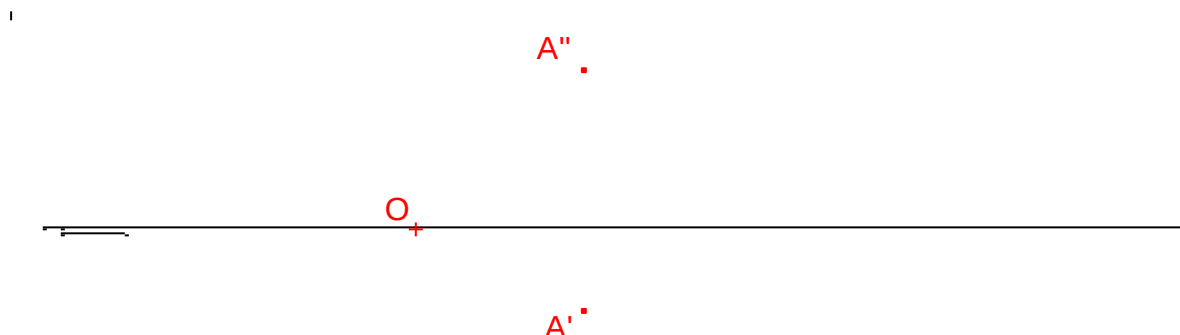


Propriedades da MPH:

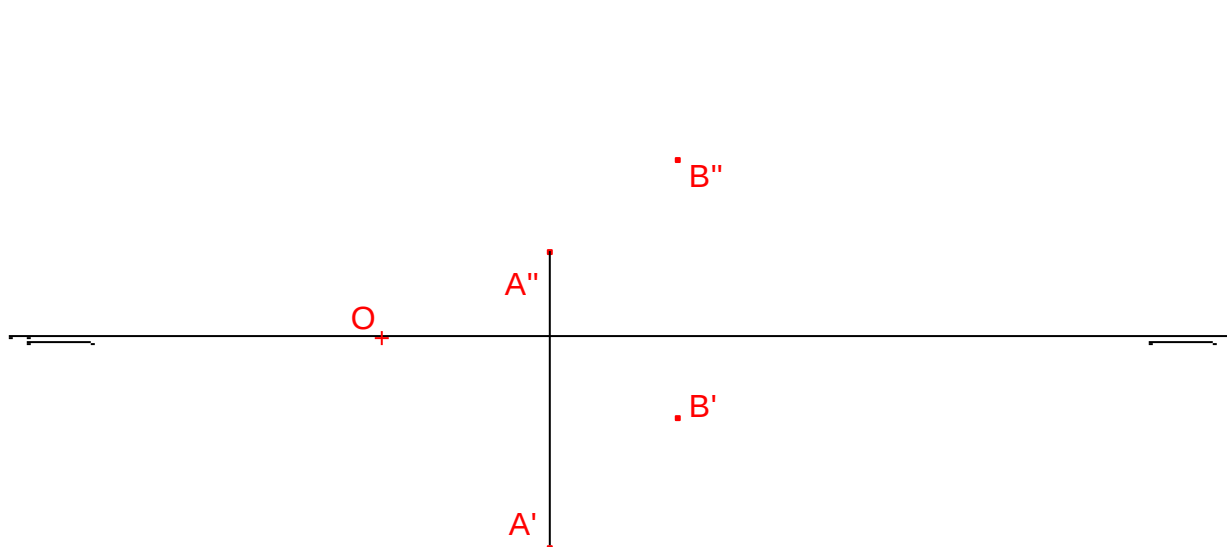
- A'' é o mesmo para os dois sistemas;
- $A''A'_1$ é perpendicular à NLT;
- o afastamento é mantido no novo sistema.

Exercícios

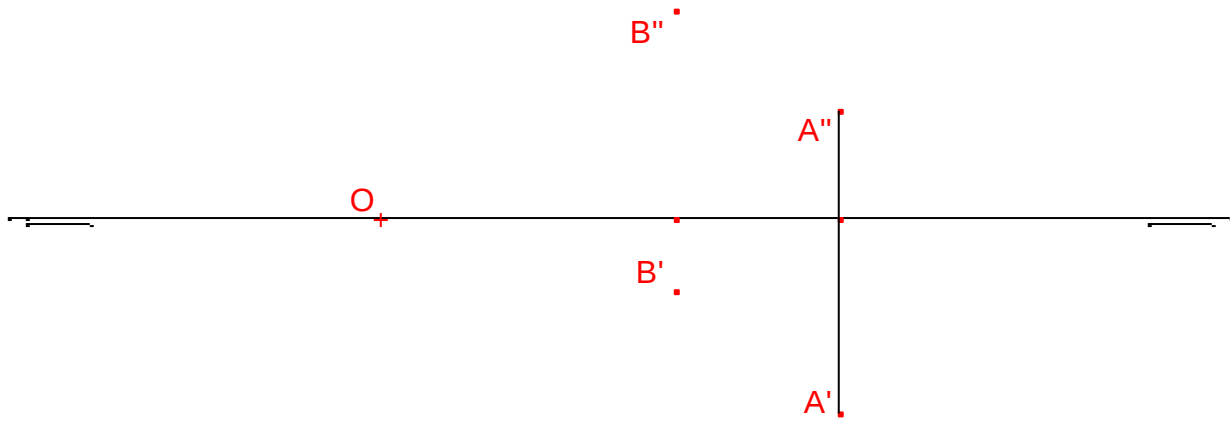
1. Efetuar uma mudança de plano horizontal para o ponto A.



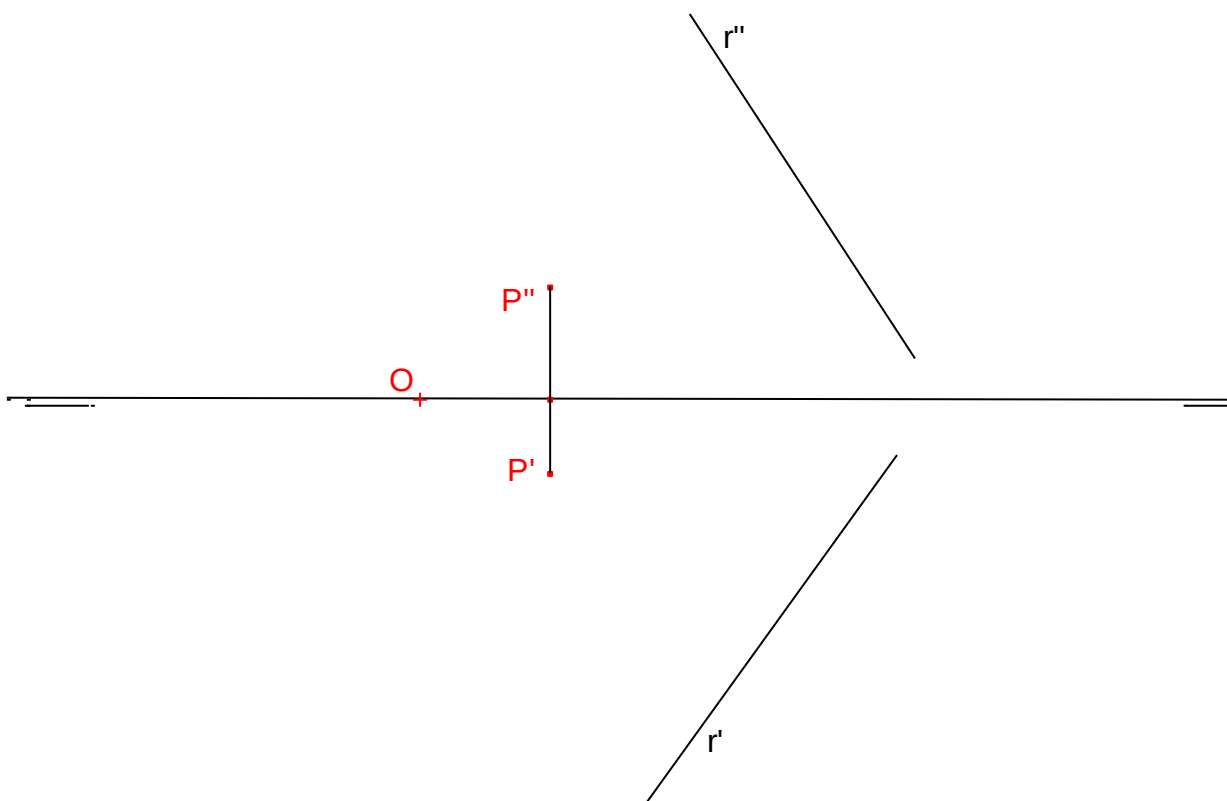
2. Efetuar uma mudança de plano horizontal para a reta $r(A,B)$ de modo que fique paralela ao novo plano de projeção.



3. Obter a VG do segmento AB bem como o ângulo que a reta $r(AB)$ forma com π'' .

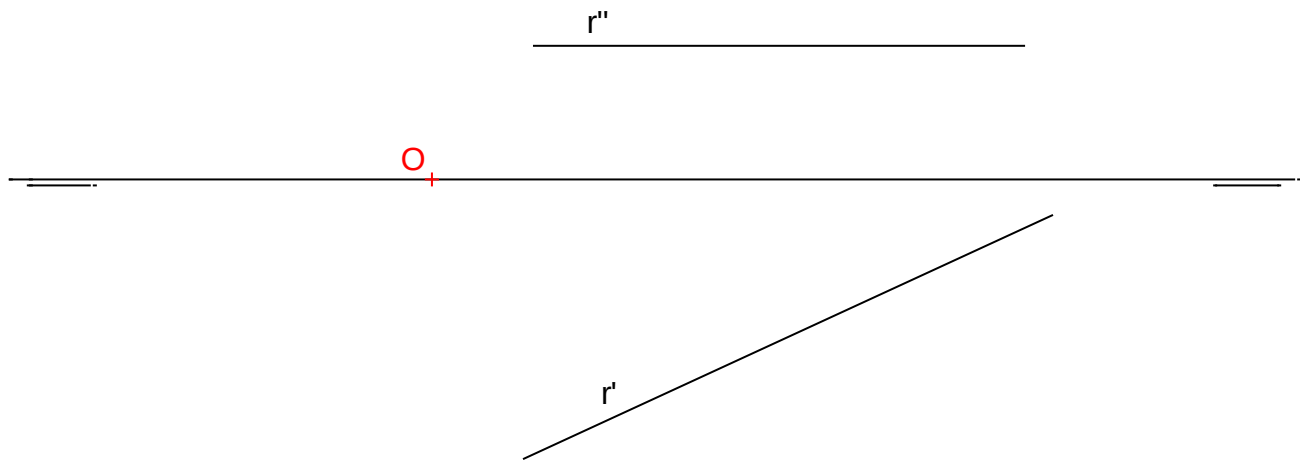


4. Mediante MPH representar a distância do ponto dado P à reta r dada, bem como a sua VG.

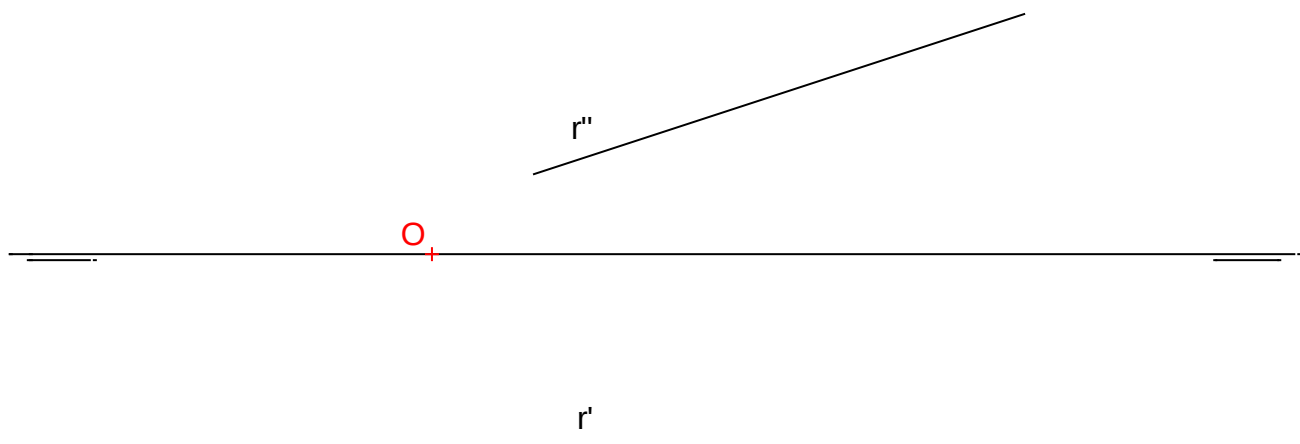


Exercícios propostos

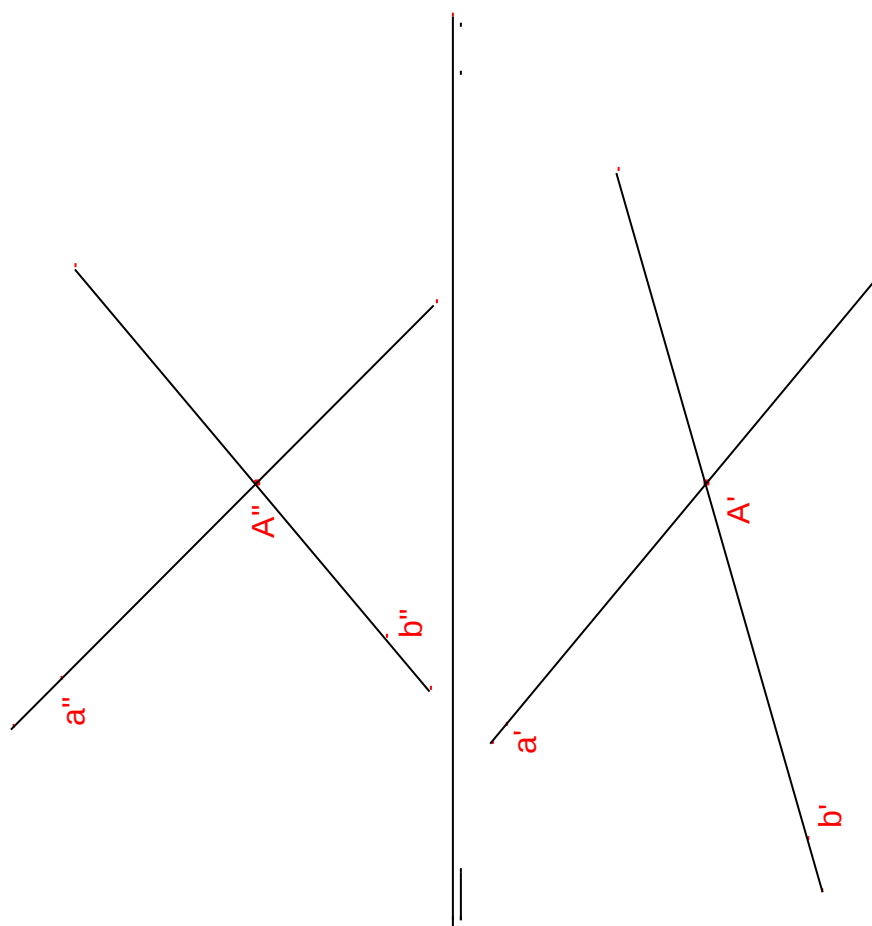
1. Efetuar uma mudança de plano para a reta r de modo que se torne de topo:



2. Efetuar uma mudança de plano para a reta r de modo que se torne vertical:

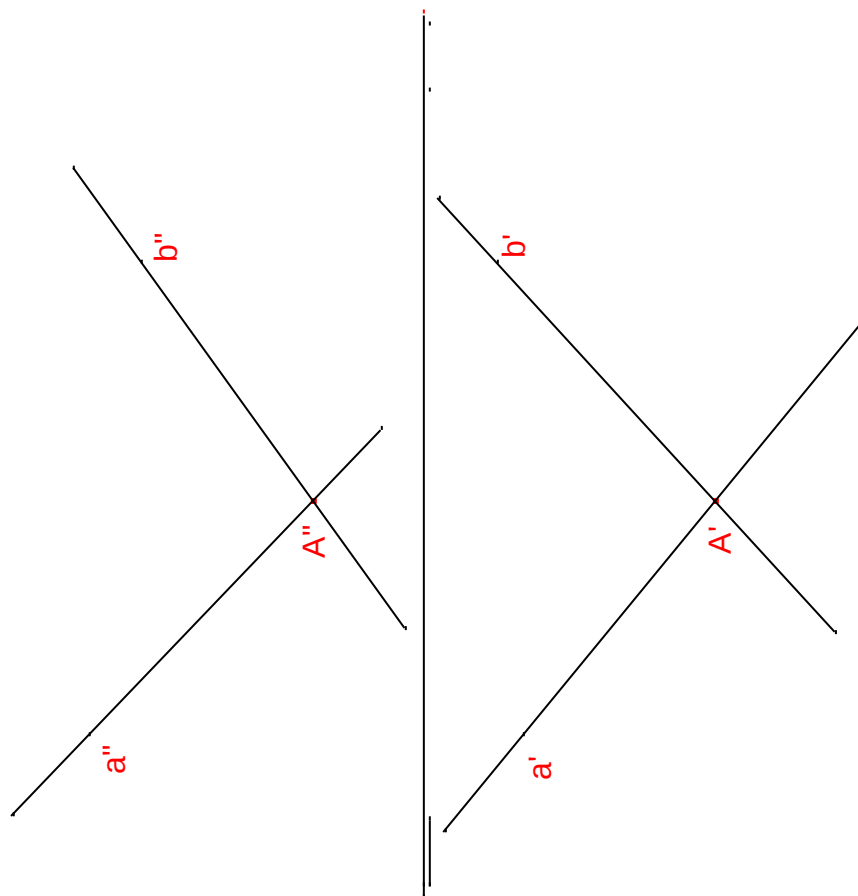


3. Efetuar uma mudança de planos para o plano dado $\alpha(a,b)$ de modo que se torne de topo.

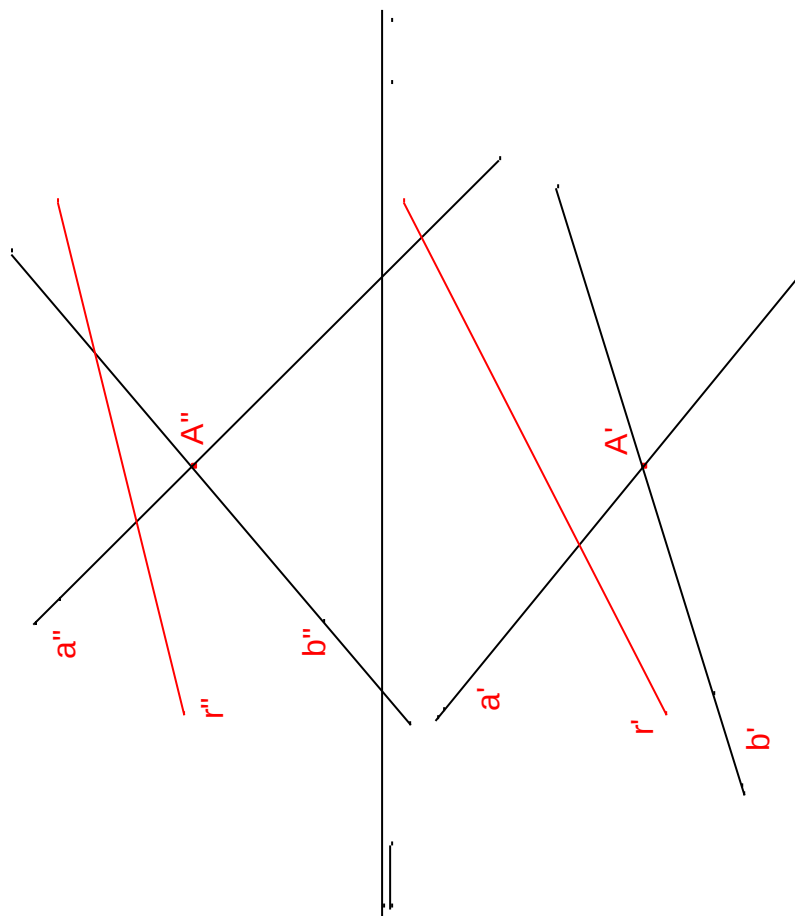


Observação: Para realizar uma MP sem LT para o plano: basta considerar um plano β horizontal e usar $(\alpha\beta)'$ como se fosse $\alpha\pi'$ (para MPV) ou um plano γ frontal e usar $(\alpha\gamma)''$ como se fosse $\alpha\pi''$ (para MPH).

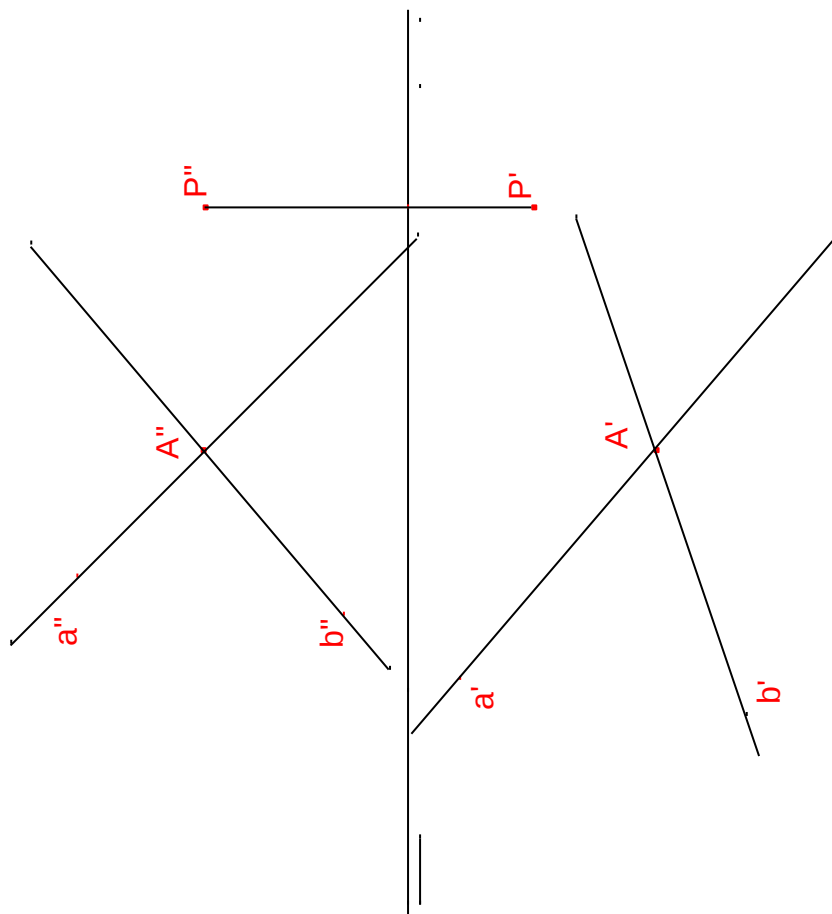
4. Efetuar uma mudança de planos para o plano dado $\alpha(a,b)$ de modo que se torne vertical.



5. Representar a interseção da reta dada r com o plano dado α .



6. Representar a reta pertencente a um ponto dado P e perpendicular ao plano dado $\alpha(a,b)$.



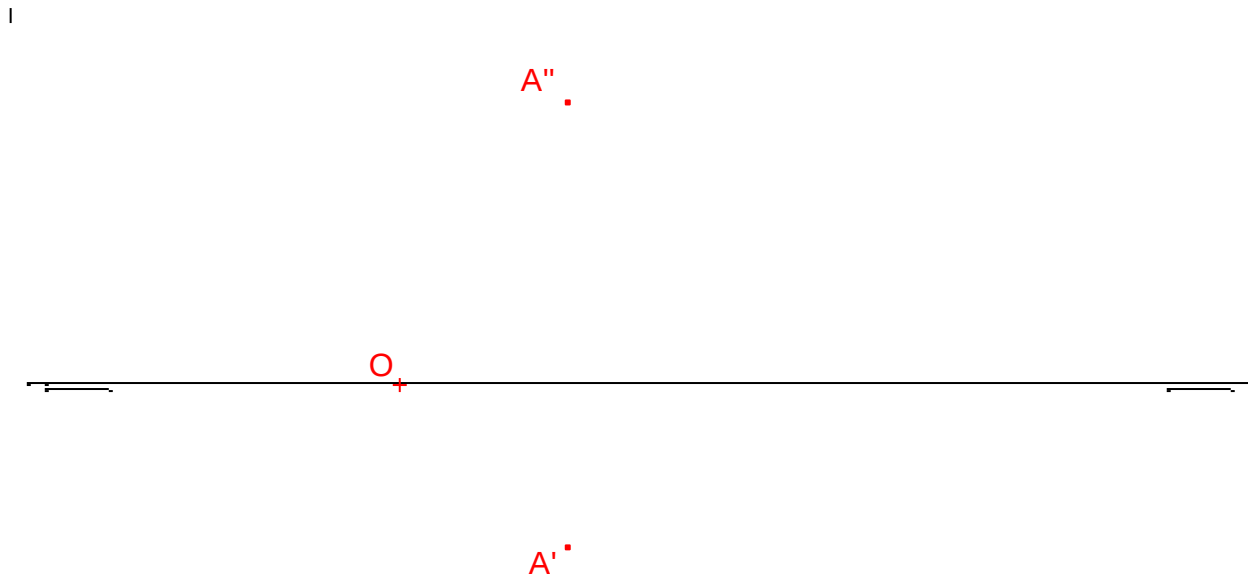
1.3. Dupla Mudança de Planos

Para se efetuar uma dupla mudança de planos deve-se primeiro realizar uma MPV (ou MPH), obtendo-se um segundo sistema de representação, e a seguir, efetuar a partir deste segundo sistema uma MPH (ou MPV), chegando-se a um terceiro sistema de representação.

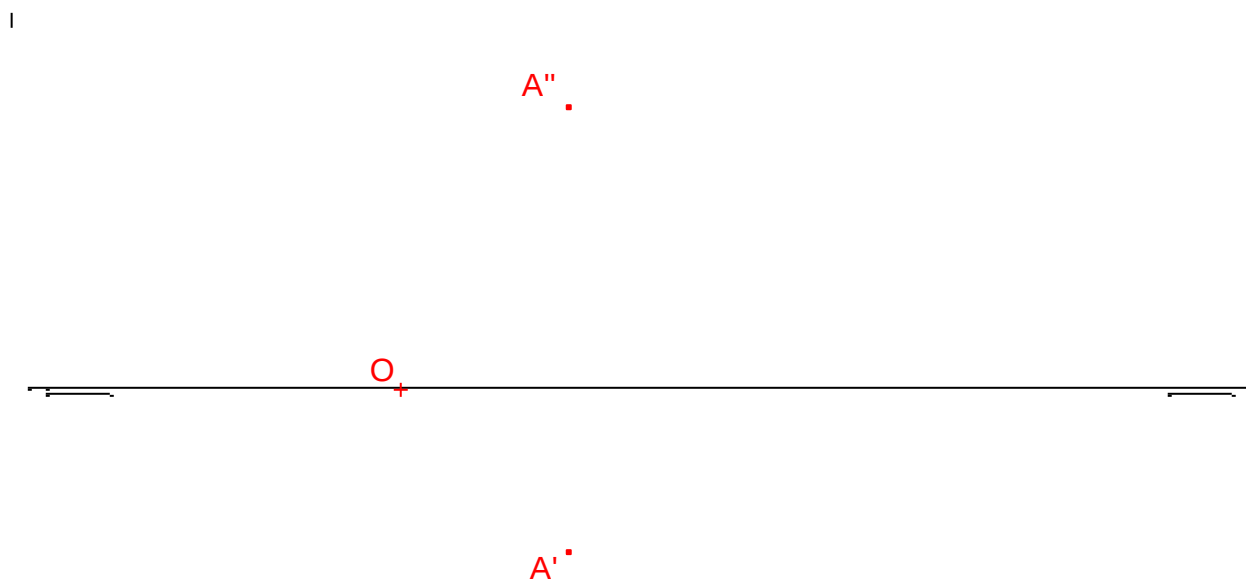
Exercícios

1. Efetuar uma dupla mudança de plano para o ponto A.

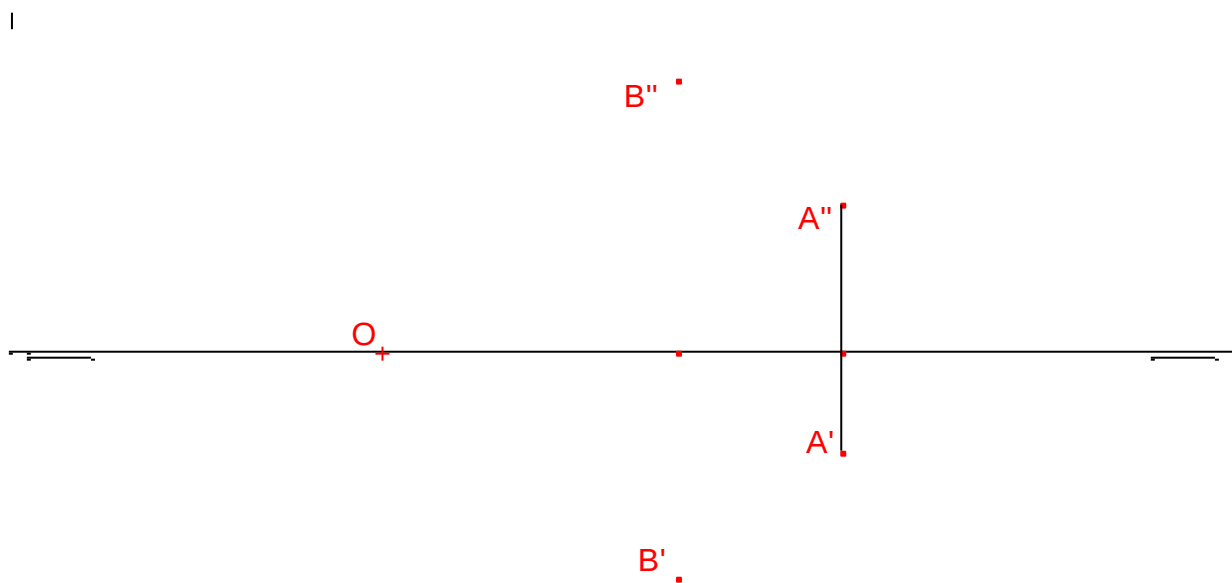
a) Efetuar MPV e a seguir MPH



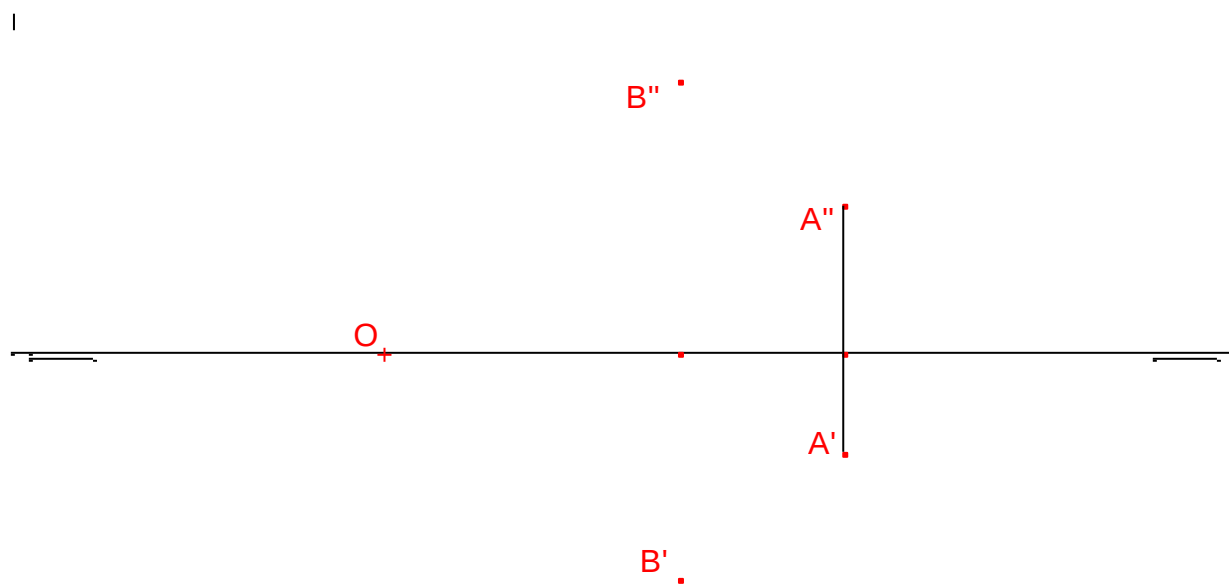
b) Efetuar MPH e a seguir MPV



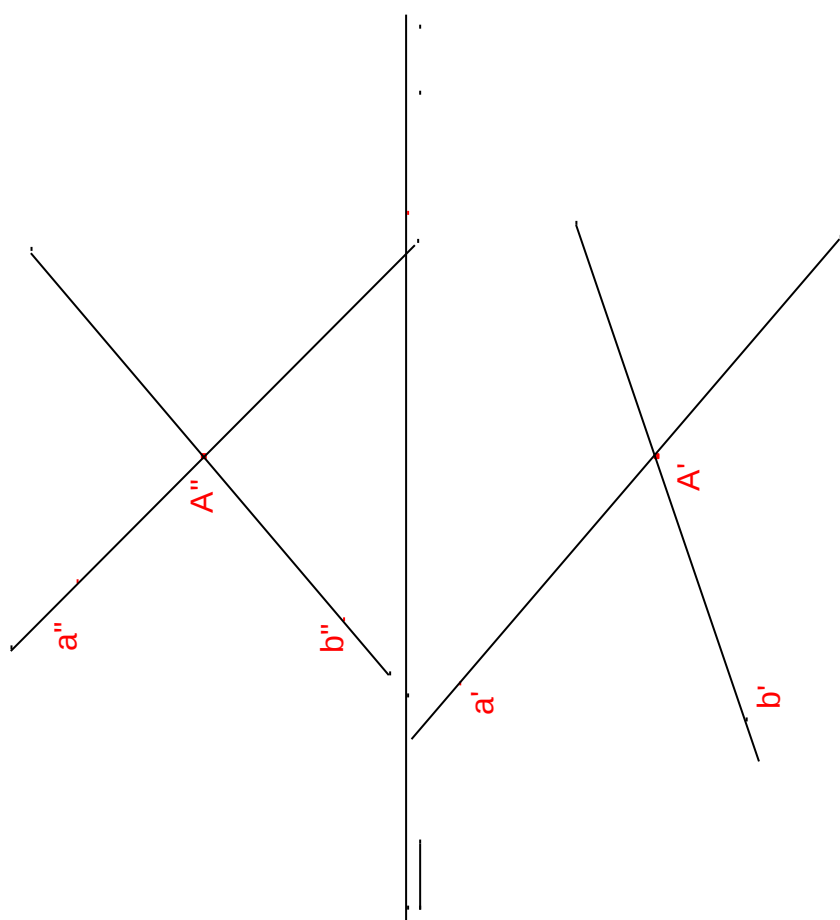
2. Tornar a reta $r(A,B)$ vertical.



3. Tornar a reta $r(A,B)$ de topo.



4. Mediante Dupla Mudança de Planos tornar $\alpha(a,b)$ horizontal.



5. Mediante Dupla Mudança de Planos tornar $\alpha(a,b)$ frontal.

